

---

## TD 1 : espaces vectoriels, lois de composition et sous-espaces vectoriels

---

---

### Espaces vectoriels, lois de compositions

---

#### Exercice 1 :

Considérons trois fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , notées  $f$ ,  $g$  et  $h$ , définies par :

$$f(x) = 1, \quad g(x) = \cos(x), \quad h(x) = \cos(2x).$$

1. On pose  $u = g^2$ . Montrer que l'on peut écrire  $u = (f + h)/2$ .
2. Dans le plan  $\mathbb{R}^2$ , on représente la fonction  $f$  par le point  $(1, 0)$  et la fonction  $h$  par le point  $(0, 1)$ .
  - (a) Dessiner le point du plan qui représente la fonction  $u$ .
  - (b) Pouvez-vous trouver un point du plan qui représente la fonction  $g$ ?

#### Exercice 2 :

Dans l'ensemble  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  des suites de nombres réels, on définit la somme de deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  comme étant la suite  $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

1. Montrer que l'addition ainsi définie est une opération commutative et associative.
2. Montrer qu'il existe une suite qui est un élément neutre pour cette addition.
3. Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a un opposé pour cette addition, que l'on explicitera.

#### Exercice 3 :

Soit  $n$  un entier naturel. On note  $\mathbb{R}_n[X]$  l'ensemble des fonctions polynomiales réelles de degré strictement plus petit que  $n$ . Autrement dit

$$p \in \mathbb{R}_n[X] \Leftrightarrow \exists (a_0, \dots, a_{n-1}) \text{ tel que } p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}.$$

1. Montrer que la somme de deux éléments de  $\mathbb{R}_n[X]$  appartient à  $\mathbb{R}_n[X]$ . Montrer aussi que si  $p \in \mathbb{R}_n[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors  $\lambda p \in \mathbb{R}_n[X]$ . Que vient-on de démontrer ?
2. Si  $p$  et  $q$  sont des polynômes, peut-on déduire le degré de  $p + q$  de celui de  $p$  et celui de  $q$  ? Et si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , peut-on déduire le degré de  $\lambda p$  de celui de  $p$  ?

**Exercice 4 :**

Soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle et  $C(I)$  l'ensemble des fonctions continues de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

1. Rappeler la définition de l'addition de deux fonctions et du produit d'une fonction par un scalaire.
2. Montrer que  $C(I)$  muni de ces opérations est un espace vectoriel.

---

**Sous-espaces vectoriels**

---

**Exercice 5 :**

Parmi les exemples suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  ?

1.  $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x^2 - y^2 + z = 0\}$ ;
2.  $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + y - z = 1\}$ ;
3.  $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x + y + z = 2x + y = 0\}$ ;
4.  $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$ .

**Exercice 6 :**

Parmi les exemples suivants, déterminer les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^4$  :

1.  $F_1 = \{(\cos(\theta), \sin(\theta), \cos(\varphi), \sin(\varphi)), (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2\}$ ;
2.  $F_2 = \{(t, t + 1, -s, -u), (s, t, u) \in \mathbb{R}^3\}$ ;
3.  $F_3 = \{(t, s, t, s), (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$ .

**Exercice 7 :**

On note  $E_p$  l'ensemble des fonctions continues paires de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $E_i$  l'ensemble des fonctions continues impaires de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que  $E_p$  et  $E_i$  sont des sous-espaces vectoriels de  $C(\mathbb{R})$ .
2. Calculer  $E_p \cap E_i$ .
3. Montrer que tout  $f \in C(\mathbb{R})$  s'écrit  $f = g + h$  avec  $g \in E_p$  et  $h \in E_i$  et expliciter les fonctions  $g$  et  $h$  en fonction de  $f$ .
4. En déduire que  $C(\mathbb{R}) = E_p \oplus E_i$ .

**Exercice 8 :**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et soient  $F, G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

1. Montrer que  $F \cap G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
2. Montrer que  $F + G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
3. Montrer que si  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  alors on a forcément  $F \subset G$  ou  $G \subset F$ .

**Exercice 9 :**

Soient  $E$  l'espace vectoriel des suites réelles et

$$F = \{u \in E, \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = 0\},$$
$$G = \{u \in E, \forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = u_{2n+1}\}.$$

Démontrer que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires.

**Exercice 10 :**

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel  $E$  tels que  $F + G = E$ . Soit  $F'$  un supplémentaire de  $F \cap G$  dans  $F$ . Montrer que

$$F' \oplus G = E.$$

**Exercice 11 :**

Soit  $E$  l'ensemble des applications  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles qu'il existe  $A \in \mathbb{R}_+^*$  et  $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  croissantes tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, (|x| \geq A \implies f(x) = g(x) - h(x)).$$

Montrer que  $E$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel pour les lois usuelles.