Université de Montpellier - Faculté des Sciences

Année Universitaire 2016-2017

HLMA206
Chapitre 5 : Intégration

Philippe Castillon [1]

Exercice 1. Soit $f : [0,6] \to \mathbb{R}$ la fonction définie, pour tout $t \in [0,6]$, par $f(t) = \ln(1 + \mathrm{E}(\frac{t}{2}))$. Montrer que f est une fonction en escalier.

Pour tout $x \in [0,6]$, calculer $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. La fonction F est-elle continue sur $[0,6]$? Est-elle dérivable ?

Exercice 2. Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition, montrer que la fonction est dérivable sur ce domaine et calculer sa dérivée.

1. $f(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \mathrm{e}^{\cos t} dt$
2. $g(x) = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^x} \sqrt{1 + (\ln t)^2} dt$

Exercice 3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $u_n = \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)dt$.

1. En majorant $|u_n|$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
2. On suppose maintenant que f est de classe C^1. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n = f(1)$.

Exercice 4. Calculer les primitives suivantes en précisant sur quel(s) intervalle(s).

1. $\displaystyle\int t\mathrm{e}^{-3t^2} dt$.
2. $\displaystyle\int \frac{2x dx}{(x+1)(x-2)}$.
3. $\displaystyle\int x^2 \ln x dx$.
4. $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^3 x dx$
5. $\displaystyle\int \frac{dt}{3 + \mathrm{e}^{-t}}$ (changement de variable)
6. $\displaystyle\int \frac{tdt}{\sqrt{1+t}}$ (poser $x = \sqrt{1+t}$)

Exercice 5. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x)dx}{1 + \cos^2 x}$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x dx}{\sqrt{\mathrm{e}^x + 1}}$ (changement de variable)
4. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\cos t}$ (poser $x = \sin t$)
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan t}{1+t^2} dt$
6. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^t \cos t dt$

[1] Pour toutes remarques ou commentaires : `philippe.castillon@umontpellier.fr`

Exercice 6 - Intégrales de Wallis. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que $I_{n+1} \sim I_n$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$ et en déduire que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Pour s'entrainer

Exercice 7. Pour chacune des fonctions suivantes, donner le domaine de définition, montrer que la fonction est dérivable sur ce domaine et calculer sa dérivée.

1. $f(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} \frac{tdt}{1+\mathrm{e}^t}$
2. $g(x) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{x}} \ln\left(\sqrt{1+t^2}\right) dt$

Exercice 8. Calculer les primitives suivantes en précisant sur quel(s) intervalle(s).

1. $\displaystyle\int \frac{t^2 dt}{1+t^3}$
2. $\displaystyle\int \ln x dx$ puis $\displaystyle\int (\ln x)^2 dx$
3. $\displaystyle\int \frac{dt}{\cosh t}$ (poser $x = \mathrm{e}^t$)
4. $\displaystyle\int \sin(\ln t) dt$ (poser $x = \ln t$)
5. $\displaystyle\int \frac{x+2}{(x-4)(x+1)} dx$
6. $\displaystyle\int x \arctan x dx$

Exercice 9. Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{4-\cos t} dt$
2. $\displaystyle\int_0^1 (t^2-1)\mathrm{e}^{-2t} dt$
3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x dx$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+\sqrt{t}}$ (poser $x = \sqrt{t}$)
5. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\mathrm{e}^x} dx$
6. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$ (poser $x = \cos(2t)$)

Exercice 10 (extrait d'un sujet d'examen, 2016 session 1). Les deux questions sont indépendantes.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
   (a) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}$ on ait
   $$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{\alpha}{x-a} - \frac{\alpha}{x-b}.$$
   En déduire les primitives de $x \mapsto \frac{1}{(x-a)(x-b)}$ sur $]b, +\infty[$.
   (b) Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{\mathrm{e}^t+1}$. *On pourra faire le changement de variable* $x = \mathrm{e}^t$.
2. Soit $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{2-\mathrm{E}(t)}{1+\mathrm{E}(t)}$, où E désigne la fonction partie entière.
   Montrer que la fonction f est en escalier sur $[0,4]$ et calculer $\int_0^4 f(t)dt$.

Exercice 11 (extrait d'un sujet d'examen, 2016 session 2). Les deux questions sont indépendantes.

1. On note
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \cos(t)dt \quad \text{ et } \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin(t)dt$$
   (a) A l'aide d'intégrations par parties, déterminer $I+J$ et $I-J$. En déduire I et J.
   (b) En effectuant le changement de variable $s = \frac{\pi}{2} - t$, calculer $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-t}\cos(t)dt$.
   (c) Calculer $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-t}\sin(t)dt$.

2. Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{\mathrm{E}(2t)-1}{\mathrm{E}(t)+1}$, où E désigne la fonction partie entière.
   Montrer que la fonction f est en escalier sur $[0,2]$ et calculer $\int_0^2 f(t)dt$.

Exercice 12 (extrait d'un sujet d'examen, 2017 session 1). Les quatre questions sont indépendantes.

1. Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = (E(2t)+1)\mathrm{e}^{E(t)}$, où E désigne la fonction partie entière.
   Montrer que la fonction f est en escalier sur $[0,2]$ et calculer $\displaystyle\int_0^2 f(t)dt$.
2. Calculer $\displaystyle\int t^\alpha \ln t dt$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Calculer $\displaystyle\int x \sin x \cos x dx$
4. On note $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\cos t + \sin t} dt$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t + \sin t} dt$.
   (a) En utilisant le changement de variable $s = \frac{\pi}{2} - t$, montrer que $I = J$.
   (b) Calculer $I + J$ et en déduire I et J.
   (c) En utilisant ce qui précède, calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 13 (extrait d'un sujet d'examen, 2017 session 2). Les trois questions sont indépendantes.

1. Soit $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{\sin\left(\mathrm{E}(t)\frac{\pi}{6}\right)}{1+\mathrm{E}(t)}$, où E désigne la fonction partie entière.
   Montrer que la fonction f est en escalier sur $[0,4]$ et calculer $\displaystyle\int_0^4 f(t)dt$.
2. Calculer $\displaystyle\int t^2 \mathrm{e}^{\alpha t} dt$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a > 1$.
   (a) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{dx}{(x-a)(x+a)}$
   (b) En utilisant un changement de variable, en déduire $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin t}{\sin^2 t + a^2 - 1} dt$.