Université de Montpellier - Faculté des Sciences

Année Universitaire 2017-2018

HLMA206
Chapitre 4 : Comparaison de fonctions

Philippe Castillon [1]

Exercice 1. On considère les six fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}_+^*$

$$f_1(x) = \mathrm{e}^x \quad f_2(x) = \mathrm{e}^{-x}, \quad f_3(x) = 5^x, \quad f_4(x) = x^2, \quad f_5(x) = (\ln x)^{20}, \quad f_6(x) = \frac{1}{x}.$$

1. Comparer ces fonctions en $+\infty$ et en 0
2. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer quelle(s) fonction(s) f_i lui est (sont) équivalente(s) :

$$g_1(x) = \sqrt{x} + \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} + 5^x, \quad g_2(x) = \frac{x^2 + \sqrt{x^3+1}}{x^3 + \ln x}, \quad g_3(x) = \frac{x^2+3}{\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^{20} + 1}.$$

Exercice 2. En utilisant (éventuellement) des équivalents, calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)(1+2x)}{x^2-x^4}$.
2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin^2 x)}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\sin x}$.
4. $\lim\limits_{n\to +\infty} \sqrt{4n+1}\ln(1-\frac{\sqrt{n+1}}{n+2})$.
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln(x^2+2)-\ln(x^2+1)}{\ln(x+2)-\ln(x+1)}$.
6. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(2x^2-1)}{x\sqrt{x}-1}$.
7. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.
8. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln x}$.
9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{\ln(1+x)}$, pour tout $a, b > 0$.
10. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{(1-\mathrm{e}^x)^2}$.

Exercice 3. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles qui ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

1. A-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$?
2. Montrer que $\mathrm{e}^{u_n} \sim_{+\infty} \mathrm{e}^{v_n}$ si et seulement si $u_n - v_n = o(1)$ en $+\infty$.
3. Trouver un exemple de suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles $u_n \sim_{+\infty} v_n$ mais pour lesquelles il est faux que $\mathrm{e}^{u_n} \sim_{+\infty} \mathrm{e}^{v_n}$.

Exercice 4. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Montrer que si $u_n = o(n^2)$ en $+\infty$ alors $\sqrt{n^2+u_n} - n \sim_{+\infty} \frac{u_n}{2n}$.
2. Montrer que si $u_n = o(\sqrt{n})$ en $+\infty$ alors $(1+\frac{u_n}{n})^n \sim_{+\infty} \mathrm{e}^{u_n}$.
3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, montrer que si $u_n = o(n)$ en $+\infty$ alors $(n+u_n)^p - (n-u_n)^p \sim_{+\infty} 2pn^{p-1}u_n$.

[1] Pour toutes remarques ou commentaires : `philippe.castillon@umontpellier.fr`

Exercice 5. Calculer les développements limités suivants :

1. $\sqrt{1+\sin x}$ en 0, à l'ordre 3.
2. $\frac{\cos x}{1+x^2}$, en 0, à l'ordre 4.
3. $\frac{1}{1+\cos x}$, en 0, à l'ordre 4.
4. $e^{\cos x} - (1+x)^x$ en 0, à l'ordre 2.
5. $\ln(a+x)$ en 0 à l'ordre n, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $a > 0$.
6. $\frac{\sqrt{x}-1}{\ln x}$ en 1 à l'ordre 3.
7. $\ln(3e^x + e^{-x})$ en 0 à l'ordre 3.
8. $\cos(\ln x)$ en 1 et en $e^{\frac{\pi}{2}}$, à l'ordre 3.
9. $\frac{x^2 \sin x}{1+x}$, en 0, à l'ordre 5.
10. $\sqrt{x}$, $\ln x$ et e^x en a à l'ordre n, pour tout $a > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x + \cosh x - 2}{x^4}$.
2. $\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}$.
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{\tan x - x}$.
4. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2}$.
5. $\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - x\tan x}{\sin^3 x}$.
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x\cos x}{(\tan x - x)\sin x}$.

Exercice 7. En utilisant une formule de Taylor, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\left|\cos x - 1\right| \leq \frac{x^2}{2}, \qquad \left|\cos x - (1 - \frac{x^2}{2})\right| \leq \frac{x^4}{4!} \quad \text{et} \quad \left|\cos x - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!})\right| \leq \frac{x^6}{6!}.$$

En déduire un nombre rationnel qui soit une valeur approchée à 10^{-2} près de $\cos 1$.

Exercice 8. En utilisant une formule de Taylor, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_- \qquad |e^x - P_n(x)| \leq \frac{|x|^n}{n!}$$

En déduire un nombre rationnel qui soit une valeur approchée à 10^{-2} près de $\frac{1}{e}$.

Exercice 9. Montrer que chacune des fonctions suivantes se prolonge par continuité en 0. Si ce prolongement est dérivable, donner la position du graphe par rapport à sa tangente au voisinage de 0.

1. $x \mapsto \frac{\ln(\cos x)}{\sin x}$
2. $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$

Exercice 10. Montrer que les fonctions suivantes possèdent une asymptote en $+\infty$ et étudier la position relative de leur graphe par rapport à cette asymptote :

1. $x \mapsto x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
2. $x \mapsto \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

Exercice 11 (extrait d'un sujet d'examen, 2016 session 1). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(2x)-1}{x(e^x-1)} & \text{si } x \neq 0 \\ -2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. On s'intéresse à la dérivabilité de f en 0.
   (a) Donner les développements limités en 0 à l'ordre 4 de $x \mapsto \cos(2x) - 1$ et $x \mapsto x(e^x - 1)$.
   (b) En déduire le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.
   (c) Montrer que f est dérivable en 0, donner l'équation de sa tangente et la position de son graphe par rapport à la tangente au voisinage de 0.

Pour s'entrainer

Exercice 12. En utilisant (éventuellement) des équivalents, calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 1} \tan(\frac{\pi x}{2})\tan(\pi x)$.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\mathrm{e}^{\sqrt{n^2+1}-n}-1)$.
3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{1+\cos 2x}$.
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} (3(2)^{\frac{1}{n}}-2(3)^{\frac{1}{n}})^n$.

Exercice 13. Calculer les développements limités suivants :

1. $\mathrm{e}^x\cos x$ en 0, à l'ordre 3.
2. $\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$ en 1, à l'ordre 3.
3. $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ en 0, à l'ordre 3.
4. $\ln(\sin x)$ en $\frac{\pi}{2}$, à l'ordre 4.

Exercice 14. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{x^2}-\cos x}{x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{3}}-1-\sin x}{\cos x-1}$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(2x^2-1)}{\sin(x-1)}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\sinh^2 x}$.

Exercice 15. Calculer les cinq premières dérivées en 0 de la fonction $x\mapsto(\ln(1+x))^2$.

Exercice 16. En utilisant une formule de Taylor, trouver un polynôme P tels que

$$\forall x\in\mathbb{R} \qquad \left|\sin x-P(x)\right|\leq\frac{|x|^5}{5!}.$$

En déduire un rationnel qui soit une valeur approchée à 10^{-2} près de $\sin 1$.

Exercice 17. En utilisant une formule de Taylor, montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+ \qquad |\ln(1+x)-P_n(x)|\leq\frac{x^n}{n}$$

En déduire un nombre rationnel qui soit une valeur approchée à 10^{-2} près de $\ln 2$.

Exercice 18. Montrer que chacune des fonctions suivantes se prolonge par continuité en 0. Si ce prolongement est dérivable, donner la position du graphe par rapport à sa tangente au voisinage de 0.

1. $x\mapsto\frac{x^2}{\sinh x}$
2. $x\mapsto(\cosh x)^{\frac{1}{x}}$

Exercice 19. Montrer que les fonctions suivantes possèdent une asymptote en $+\infty$ et étudier la position relative de leur graphe par rapport à cette asymptote :

1. $x\mapsto(x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
2. $x\mapsto\ln(\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x+1)$

Exercice 20 (extrait d'un sujet d'examen, 2016 session 2). Soit $f : [-\frac{1}{2}, +\infty) \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{1+2x}}{e^{3x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{3} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur son domaine de définition et calculer sa limite en $+\infty$.
2. On s'intéresse à la dérivabilité de f en 0.
   (a) Donner les développements limités en 0 à l'ordre 2 de $x \mapsto \sqrt{1+2x}$ et $x \mapsto \frac{x}{e^{3x}-1}$.
   (b) En déduire le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.
   (c) Montrer que f est dérivable en 0, donner l'équation de sa tangente et la position de son graphe par rapport à la tangente au voisinage de 0.

Exercice 21 (extrait d'un sujet d'examen, 2017 session 1). Soit $f : [-\frac{1}{2}, +\infty) \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(2x)\sqrt{1+2x}}{e^{x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur son domaine de définition et calculer sa limite en $+\infty$.
2. On s'intéresse à la dérivabilité de f en 0.
   (a) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $x \mapsto \sqrt{1+2x}$.
   (b) Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $x \mapsto \frac{\sin(2x)}{e^{x}-1}$.
   (c) En déduire le développement limité de f en 0 à l'ordre 2.
   (d) Montrer que f est dérivable en 0, donner l'équation de sa tangente et la position de son graphe par rapport à la tangente au voisinage de 0.

Exercice 22 (extrait d'un sujet d'examen, 2017 session 2). Soit $f :]0, +\infty) \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{x^2-1} & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur son domaine de définition et calculer ses limites en 0 et $+\infty$.
2. On s'intéresse à la dérivabilité de f en 1.
   (a) Donner le développement limité en 0 à l'ordre 2 des fonctions $u(y) = \sqrt{1+y}$, $v(y) = \frac{\ln(1+y)}{y}$ et $w(y) = \frac{1}{2+y}$.
   (b) Calculer le développement limité de f en 1 à l'ordre 2.
   (c) Montrer que f est dérivable en 1, donner l'équation de sa tangente et la position de son graphe par rapport à la tangente au voisinage de 1.

Développements limités à connaître

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{n} \Big(\prod_{j=0}^{k-1} (\alpha - j)\Big) \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2} + \cdots + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \\
\sinh x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1}) \\
\cosh x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})
\end{aligned}
$$

En particulier, le troisième DL de cette liste donne, pour $\alpha = -1$,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)
\end{aligned}
$$