Université de Montpellier - Faculté des Sciences

Année Universitaire 2017-2018

HLMA206
Chapitre 3 : Applications linéaires

Philippe Castillon [1]

Exercice 1. Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Si c'est le cas, déterminer le noyau et l'image.

1. $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ définie par $f(x, y, z) = ix - (3 - i)y + z - 2i$;
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x + y + z, x + 2y - z, 2x - y + z)$;
3. $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ définie par $f(x, y) = (x^2 - 2x + y, xy)$;

Exercice 2. Calculer le rang des applications linéaires suivantes et déterminer si elles sont injectives et/ou surjectives.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (2x + y, 2x - y, x + y)$.
2. $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^4$ définie par $f(x, y) = (x - y, x + iy, (2 + i)x + y, 3ix + y)$.
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (2x + my - z, 2x + 2y, x - 2z)$ (discuter suivant la valeur de m).

Exercice 3. Justifier qu'il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ telle que $f(1, 0, 1) = (1, 2)$, $f(1, 1, 1) = (0, 2)$ et $f(0, 2, 1) = (2, -1)$. Exprimer $f(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 4. On considère une application linéaire $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ et on se demande si son noyau et son image peuvent être égaux.

1. Montrer que $\mathrm{im}(f) \subset \ker(f)$ si et seulement si $f \circ f = 0$.
2. On suppose que n est impair. Montrer qu'on a nécessairement $\mathrm{im}(f) \neq \ker(f)$.
3. On suppose que n est pair. Montrer que $\mathrm{im}(f) = \ker(f)$ si et seulement si $f \circ f = 0$ et $\mathrm{rg}(f) = \frac{n}{2}$.

Exercice 5. On considère une base $\mathcal{A} = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{A}$ est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, on note $v_1 = u_1 + u_3$, $v_2 = u_1 + u_2$ et $v_3 = u_1 + u_2 + u_3$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de f dans $\mathcal{B}$.
2. En utilisant ce qui précède, calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. On considère la famille $\mathcal{A} = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ où $u_1 = (2, 3, 1)$, $u_2 = (3, 4, 1)$ et $u_3 = (1, 2, 2)$. On note $E = \mathrm{vect}(u_1)$ et $F = \mathrm{vect}(u_2, u_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une base et que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

[1] Pour toutes remarques ou commentaires : `philippe.castillon@umontpellier.fr`

2. On note $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la projection sur F parallèlement à E. Écrire la matrice de p dans la base $\mathcal{A}$ et en déduire sa matrice dans la base canonique.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (-x + 2z, -2x + y + 3z, \frac{x}{2} - y)$$

1. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. L'application f est-elle un isomorphisme?
2. Calculer le rang de f. A-t-on $\ker(f) \oplus \mathrm{im}(f) = \mathbb{R}^3$?
3. Soient $v_1 = (0, -1, 1)$, $v_2 = (2, 2, 1)$ et $v_3 = (2, 1, 1)$. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base. Donner la matrice de f dans $\mathcal{B}$. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, calculer $f^5(x, y, z)$.

Exercice 8. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2-a \\ a-2 & a-1 & a-2 \\ -1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles l'application linéaire f est un isomorphisme.
2. Soient $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (1, -1, 0)$ et $v_3 = (-1, 1, 1)$. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base et donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
3. On suppose que $a = 1$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice de ϕ^n dans la base canonique. Déterminer le rang de ϕ. A-t-on $\ker(\phi) \oplus \mathrm{im}(\phi) = \mathbb{R}^3$?

Pour s'entrainer

Exercice 9. Calculer le rang des applications linéaires suivantes et déterminer si elles sont injectives et/ou surjectives.

1. $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z, t) = (x + 2y + t, 2x + y + 3z + t, 2x + 4y + 2t)$.
2. $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ définie par $f(x, y, z) = (x + iz, -iy + 2z, ix + y + 2iz)$.

Exercice 10. On considère une base $\mathcal{A} = (u_1, u_2, u_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{A}$ est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, on note $v_1 = 2u_1 + u_2 - u_3$, $v_2 = u_1 + u_2$ et $v_3 = 2u_1 + u_2 + u_3$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice de f dans $\mathcal{B}$.
2. En utilisant ce qui précède, calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11 (extrait d'un CC, 2017). Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 2(x, y, z)\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 1, et montrer que $E = \mathrm{vect}(u_1)$ où $u_1 = (1, 1, 1)$.

2. Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$. Déterminer l'image du vecteur $(1,2,1)$ par la projection sur E parallèlement à F.

3. Donner deux vecteurs u_2 et u_3 tels que (u_2, u_3) soit une base de F. Montrer que (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans cette base.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer la matrice de f^n dans la base canonique.

Exercice 12 (extrait d'un sujet d'examen, 2015 session 2). Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x,y,z) = (\ -5x+4y-3z\ ,\ -4x+3y-2z\ ,\ 2x-2y+2z\ )$$

1. Donner la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. L'application f est-elle un isomorphisme? Calculer son rang.

2. A-t-on $\ker(f) \oplus \mathrm{im}(f) = \mathbb{R}^3$?

3. Soient $u_1 = (1,0,-2)$, $u_2 = (1,1,0)$ et $u_3 = (1,2,1)$. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base.

4. Donner la matrice de f dans $\mathcal{B}$. Pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, calculer $f^3(x,y,z)$.

Exercice 13 (extrait d'un sujet d'examen, 2016 session 1). Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ deux endomorphismes.

1. Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\mathrm{im}(f) \subset \ker(g)$.

2. On suppose que $g \circ f = 0$. Montrer que

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \leq n \leq \dim(\ker(f)) + \dim(\ker(g)).$$

3. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$ définie par

$$f(x,y,z) = (x+iy+3iz, ix+y+z, 3x-iy+iz)$$

   (a) Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$.
   (b) A-t-on $f \circ f = 0$?

Exercice 14 (extrait d'un sujet d'examen, 2016 session 1). On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et $u_1 = (-1,0,2)$, $u_2 = (-2,1,4)$.

On considère E et F, deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$E = \mathrm{vect}(u_1, u_2) \quad \text{et} \quad F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+y+z=0 \text{ et } x+z=0\}$$

1. Montrer que F est de dimension 1 et déterminer un vecteur $u_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $F = \mathrm{vect}(u_3)$.

2. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base et donner la matrice de passage de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{B}$. Si $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, donner ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

3. Montrer que E et F sont supplémentaires.

4. On note f la projection sur E parallèlement à F. Donner $f(u_1)$, $f(u_2)$, $f(u_3)$ et écrire la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$.

5. Déduire de ce qui précède la matrice de f dans la base canonique.

Exercice 15 (extrait d'un sujet d'examen, 2016 session 2). On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{C}$, et on note $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(x,y,z) = (2x+5y+3z, -x-2y-z, x+y)$$

Par ailleurs, on note $u_1 = (1,-1,1)$, $u_2 = (2,-1,1)$ et $u_3 = (-1,0,1)$.

1. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$. A-t-on $\ker(f) \oplus \mathrm{im}(f) = \mathbb{R}^3$?

2. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base et donner la matrice de passage de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{F}$. Si $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donner ses coordonnées dans la base $\mathcal{F}$.

3. On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$ la matrice de f dans $\mathcal{C}$, et $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(f)$ sa matrice dans $\mathcal{F}$. Déterminer M et N.

4. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $f^{2k+1} = f$.

5. On considère deux autres applications linéaires : $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y, z) = (x+2y+z, y+z)$ et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $h(x, y) = xu_2 + yu_3$.

   (a) On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(h)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$. En déduire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f \circ h)$.

   (b) Calculer $g(u_2)$ et $g(u_3)$ et retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 16 (extrait d'un sujet d'examen, 2017 session 1). Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a-2 & -a+5 & -a+3 \\ -1 & a+2 & 1 \\ 1 & -a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles l'application linéaire f est un isomorphisme.

2. Soient $v_1 = (1, 0, 1)$, $v_2 = (2, 1, -1)$ et $v_3 = (1, 1, -1)$. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

4. On suppose que $a = 0$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $f^{2k+1} = f$.

5. On suppose maintenant que $a = 1$. Montrer que f est la projection sur E parallèlement à F, où E et F sont des sous-espaces vectoriels que l'on précisera.

Exercice 17 (extrait d'un sujet d'examen, 2017 session 2). On considère $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{C}$, et on note $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = (\,4x - 2y + z\,,\, 4x - 2y + 2z\,,\, -4x + 2y + z\,)$$

Par ailleurs, on note $u_1 = (1, 2, 0)$, $u_2 = (0, 1, 2)$ et $u_3 = (1, 2, 1)$.

1. Déterminer $\ker(f)$ et $\mathrm{im}(f)$. A-t-on $\ker(f) \oplus \mathrm{im}(f) = \mathbb{R}^3$?

2. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base et donner la matrice de passage de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{F}$. Si $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donner ses coordonnées dans la base $\mathcal{F}$.

3. On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$ la matrice de f dans $\mathcal{C}$, et $N = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(f)$ sa matrice dans $\mathcal{F}$. Déterminer M et N.

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, déterminer les matrices de f^k dans les bases $\mathcal{F}$ et $\mathcal{C}$.

5. On considère deux autres applications linéaires : $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x, y, z) = (x+y-z, x+z)$ et $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $h(x, y) = xu_2 + yu_3$.

   (a) On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(h)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(g)$. En déduire $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g \circ f \circ h)$.

   (b) Calculer $g(u_2)$ et $g(u_3)$ et retrouver le résultat de la question précédente.