HLMA206
Chapitre 2 : Sous-Espaces Vectoriels de $\mathbb{K}^n$

Philippe Castillon [1]

Exercice 1. Dans chacun des cas suivants, l'ensemble considéré est-il un sous-espace vectoriel?

1. $E_1 = \{(x_1, .., x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{k=1}^{n} x_k = -1\}$ s.e.v. de $\mathbb{K}^n$?
2. $E_2 = \{(x_1, .., x_n) \in \mathbb{K}^n \mid \sum_{k=1}^{n} (-2)^k x_k = 0\}$ s.e.v. de $\mathbb{K}^n$?
3. $E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$ s.e.v. de $\mathbb{R}^2$?
4. $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x + i\bar{x} - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\bar{y} = 0\}$ s.e.v. de $\mathbb{C}^2$?
5. $E_5 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x| + |y| \leq 2\}$ s.e.v. de $\mathbb{C}^2$?

Exercice 2. Soient E et F des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. Dans chacun des cas suivants, déterminer une famille de vecteurs qui engendre $E \cap F$, et écrire $E \cap F$ sous forme cartésienne et paramétrique.

1. $E = \{(x, y, z) \mid ix + 2y - iz = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \mid 2x + (1 + i)y - z = 0\}$, s.e.v. de $\mathbb{C}^3$.
2. $E = \{(x, y, z, t) \mid x - y - z + t = 0\}$ et $F = \{(x, y, z, t) \mid x + 2y + z - t = 0\}$, s.e.v. de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 3. Soient E et F des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$, et soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des parties génératrices de E et F. Montrer que $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est génératrice de $F + G$.

Exercice 4. Soient E et F les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. Dans chacun des cas suivants, déterminer $E + F$ et préciser si la somme est directe.

1. $E = \{(t, 0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{(x, y, z) \mid x - 2y + z = 0\}$, sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. $E = \{(it, it, t) \mid t \in \mathbb{C}\}$ et $F = \{(x, y, z) \mid x - 2y + iz = 0\}$, sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^3$.

Exercice 5. Parmi les familles de vecteurs suivantes, déterminer celles qui sont libres, génératrices.

1. (u, v) dans $\mathbb{C}^2$ avec $u = (1, i)$, $v = (1 + i, 1 - i)$
2. (u, v) dans $\mathbb{R}^3$ avec $u = (1, 2, 3)$, $v = (-1, 4, 6)$.
3. (u, v, w) dans $\mathbb{C}^3$ avec $u = (1, i, i)$, $v = (1 - i, -1, i)$ et $w = (1 + i, 1 + 2i, i)$.
4. (u, v, w) dans $\mathbb{R}^3$ avec $u = (1, -1, 0)$, $v = (2, -1, 2)$ et $w = (1, 0, a)$ (discuter suivant la valeur de a).

[1] Pour toutes remarques ou commentaires : `philippe.castillon@umontpellier.fr`

Exercice 6. Soit I un ensemble fini et $(u_i)_{i\in I}$ une famille libre de $\mathbb{K}^n$. Montrer que toute sous-famille est libre : pour tout $K \subset I$, $(u_i)_{i\in K}$ est libre.

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $u = (1, 1, 0)$, $v = (4, 1, 4)$ et $w = (2, -1, 4)$. Montrer que les familles (u, v), (v, w) et (w, u) sont libres. La famille (u, v, w) est-elle libre?

Exercice 7. Dans chacun des cas suivants, donner une base des sous espaces E et F et déterminer $E+F$. Cette somme est-elle directe ?

1. Dans $\mathbb{R}^3$, $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - 2z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 2y = x + z\}$
2. Dans $\mathbb{C}^3$, $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid ix-(1+i)y+2iz = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x-2iy+(1-i)z = 0\}$

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^4$, soient $u_1 = (1, 0, 1, 0)$, $u_2 = (0, 1, -1, 0)$, $u_3 = (1, 1, 1, 1)$, $v_1 = (0, 0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0, -1)$, et soient $E = \mathrm{vect}(u_1, u_2, u_3)$ et $F = \mathrm{vect}(v_1, v_2)$. Déterminer les dimensions de E, F, $E+F$ et $E \cap F$.

Exercice 9. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $u_1 = (a + 2, a, a - 2)$, $u_2 = (1, a, -1)$, $u_3 = (a, -a, 1)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Déterminer pour quelles valeurs de a la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Si $\mathcal{F}$ n'est pas une base, déterminer la dimension de $\mathrm{vect}(\mathcal{F})$.

Exercice 10. Soit $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_n)$ une base de $\mathbb{K}^n$. Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{K}^n$?

1. $\mathcal{F} = (u_1 - u_2, u_2 - u_3, \ldots, u_k - u_{k+1}, \ldots, u_{n-1} - u_n, u_n - u_1)$
2. $\mathcal{G} = (u_1 + u_2, u_2 + u_3, \ldots, u_k + u_{k+1}, \ldots, u_{n-1} + u_n, u_n + u_1)$

Exercice 11. Dans chacun des cas suivants, montrer que la famille $\mathcal{A} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base, écrire la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{A}$ et déterminer les coordonnées de v dans la base $\mathcal{A}$.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 0, 1)$, $u_3 = (1, 1, 0)$ et $v = (1, 2, 3)$.
2. Dans $\mathbb{C}^3$, $u_1 = (1, -1, i)$, $u_2 = (-1, i, 1)$, $u_3 = (i, 1, -1)$ et $v = (1 + i, 1 - i, i)$.

Exercice 12. Soient $u_1 = (2, 3, -1)$, $u_2 = (1, -1, -2)$, $v_1 = (3, 7, 0)$ et $v_2 = (5, 0, -7)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, et soient $E = \mathrm{vect}(u_1, u_2)$, $F = \mathrm{vect}(v_1, v_2)$. Montrer que $E = F$, que $\mathcal{A} = (u_1, u_2)$ et $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ sont des bases de ce sous-espace et écrire la matrice de passage de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$.

Exercice 13. Soient $\mathcal{A} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ deux familles de $\mathbb{R}^3$ où $u_1 = (1, -1, 3)$, $u_2 = (0, -1, 5)$, $u_3 = (-2, 0, 3)$ et $v_1 = (0, 2, 1)$, $v_2 = (1, -1, 0)$, $v_3 = (1, 2, 1)$. Vérifier que les familles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des bases, écrire les matrices de passage de la base canonique vers $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ et en déduire la matrice de passage de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$.

Pour s'entrainer

Exercice 14. Dans chacun des cas suivants, l'ensemble considéré est-il un sous-espace vectoriel ?

1. $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ } et \text{ } y \leq 0\}$ s.e.v. de $\mathbb{R}^2$?
2. $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 3\}$ s.e.v. de $\mathbb{R}^2$?
3. $E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$ s.e.v. de $\mathbb{C}^2$?
4. $E_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid \bar{x} - 2\bar{y} + i\bar{z} = 0\}$ s.e.v. de $\mathbb{C}^3$?
5. $E_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + ix\bar{y} - 2\bar{x}z = 0\}$ s.e.v. de $\mathbb{C}^3$?

Exercice 15. Soient E et F les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ Dans chacun des cas suivants, déterminer $E+F$ et préciser si la somme est directe.

1. $E = \{(t, -t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ et $F = \{(x, y, z) \mid 2x + y - z = 0\}$, sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. $E = \{(2t, -2it, it) \mid t \in \mathbb{C}\}$ et $F = \{(x, y, z) \mid (1+i)x - iy + 2z = 0\}$, sous-espaces vectoriels de $\mathbb{C}^3$.

Exercice 16. Soient E et F des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$. Dans chacun des cas suivants, déterminer une famille de vecteurs qui engendre $E \cap F$.

1. $E = \{(x, y, z) \mid ix - z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \mid 2x - (1+2i)y + (1+i)z = 0\}$, s.e.v. de $\mathbb{C}^3$.
2. $E = \{(x, y, z, t) \mid 3x - 2y + t = 0\}$ et $F = \{(x, y, z, t) \mid 2x + y + z - t = 0\}$, s.e.v. de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 17. Parmi les familles de vecteurs suivantes, déterminer celles qui sont libres, génératrices.

1. (u, v) dans $\mathbb{C}^2$ avec $u = (1+i, i)$, $v = (2, 1+i)$.
2. (u, v, w) dans $\mathbb{R}^3$ avec $u = (1, 2, -1)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (-1, 2, -3)$.
3. (u, v, w) dans $\mathbb{C}^3$ avec $u = (1, -1, i)$, $v = (-1, i, 1)$ et $w = (i, 1, -1)$.
4. (u, v, w) dans $\mathbb{R}^3$ avec $u = (1, 0, t)$, $v = (1, 1, t)$ et $w = (t, 0, 1)$ (discuter suivant la valeur de t).
5. (u, v, w, z) dans $\mathbb{R}^4$ avec $u = (1, 2, 3, 4)$, $v = (5, 6, 7, 8)$, $w = (9, 10, 11, 12)$ et $z = (13, 14, 15, 16)$.

Exercice 18. Dans chacun des cas suivants, donner une base des sous espaces E et F et déterminer $E+F$. Cette somme est-elle directe ?

1. Dans $\mathbb{R}^3$, $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 2z = 0\}$
2. Dans $\mathbb{C}^3$, $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x + (1+i)y + (1-i)z = 0\}$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid ix + y = iy + z = iz + x\}$
3. Dans $\mathbb{R}^4$, $E = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid b - 2c + d = 0\}$ et $F = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a = d \text{ et } b = 2c\}$

Exercice 19. Dans $\mathbb{R}^4$, soient $u_1 = (1, 2, 3, 4)$, $u_2 = (1, 1, 1, 3)$, $u_3 = (2, 1, 1, 1)$, $v_1 = (-1, 0, -1, 2)$, $v_2 = (2, 3, 0, 1)$, et soient $E = \text{vect}(u_1, u_2, u_3)$ et $F = \text{vect}(v_1, v_2)$. Déterminer les dimensions de E, F, $E+F$ et $E \cap F$.

Exercice 20. Soit H un hyperplan de $\mathbb{K}^n$ et soit E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Que peut-on dire de la dimension de $H \cap E$ si E est un sous-espace vectoriel qui n'est pas inclus dans H ?

Exercice 21. Soit $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et soient $E = \text{vect}(e_1, e_2 + e_3 + e_4)$, $F = \text{vect}(e_2, e_1 + e_3 + e_4)$, $G = \text{vect}(e_3, e_1 + e_2 + e_4)$ et $H = \text{vect}(e_4, e_1 + e_2 + e_3)$.

Quelles sont les dimensions de ces sous-espaces vectoriels ? Déterminer $E \cap F \cap G \cap H$.

Exercice 22. Dans chacun des cas suivants, montrer que la famille $\mathcal{A} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base, écrire la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{A}$ et déterminer les coordonnées de v dans la base $\mathcal{A}$.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (1, 1, 1)$, $u_3 = (0, 2, 1)$ et $v = (-1, 2, 1)$.
2. Dans $\mathbb{C}^3$, $u_1 = (1-i, i, 1+i)$, $u_2 = (-1, 1, 3)$, $u_3 = (1-i, i, i)$ et $v = (1+i, 2, i)$.

Exercice 23. Soient $\mathcal{A} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ deux familles de $\mathbb{R}^3$ où $u_1 = (2, 0, 1)$, $u_2 = (1, -1, 3)$, $u_3 = (-7, -2, 1)$ et $v_1 = (-3, -1, 1)$, $v_2 = (-3, 0, 5)$, $v_3 = (4, 5, -2)$. Vérifier que les familles $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des bases, écrire les matrices de passage de la base canonique vers $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ et en déduire la matrice de passage de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$.

Exercice 24 (extrait d'un CC, 2016). Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ où $u_1 = (1, 1, 2)$, $u_2 = (1, a, 2)$ et $u_3 = (1, a, a + 2)$. On note $E = \mathrm{vect}(u_1, u_2)$ et $F = \mathrm{vect}(u_3)$.

1. Déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Dans les cas où $\mathcal{F}$ n'est pas une base, déterminer les dimensions de E, F, $E + F$ et $E \cap F$.
3. Dans ce qui suit, on suppose que $\mathcal{F}$ est une base. Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
4. Donner la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{F}$. Si $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donner ses coordonnées dans la base $\mathcal{F}$.

Exercice 25 (extrait d'examen, 2016 session 1). On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et $u_1 = (-1, 0, 2)$, $u_2 = (-2, 1, 4)$.

On considère E et F, deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$E = \mathrm{vect}(u_1, u_2) \quad \text{et} \quad F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x + y + z = 0 \text{ et } x + z = 0\}$$

1. Montrer que F est de dimension 1 et déterminer un vecteur $u_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que $F = \mathrm{vect}(u_3)$.
2. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base et donner la matrice de passage de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{B}$. Si $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donner ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.
3. Montrer que E et F sont supplémentaires.

Exercice 26 (extrait d'examen, 2017 session 2). Soit $\mathcal{B} = (u_1, \ldots, u_p)$ une base de $\mathbb{C}^n$. Étant donné un nombre complexe $a \in \mathbb{C}$ fixé, on considère la famille $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_n)$ où

$$v_1 = u_1 - au_2, \quad v_2 = u_2 - au_3, \quad \ldots, \quad v_{n-1} = u_{n-1} - au_n, \quad v_n = u_n - au_1$$

1. Pour $n = 2$ et $n = 3$, déterminer les valeurs de a pour lesquelles $\mathcal{F}$ est une base.
2. Pour un entier n quelconque, calculer $\det_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n)$.
3. En déduire les valeurs de a pour lesquelles $\mathcal{F}$ n'est pas une base de $\mathbb{C}^n$.