# ATTENDUS DE FIN DE SECONDE - FONCTIONS

Nous avons rassemblé ici un certain nombre de tâches liées à un travail sur les fonctions en classe de seconde.

Ces tâches illustrent ce qu'il nous semble indispensable de savoir traiter en fin de seconde pour aborder sereinement la classe de première.

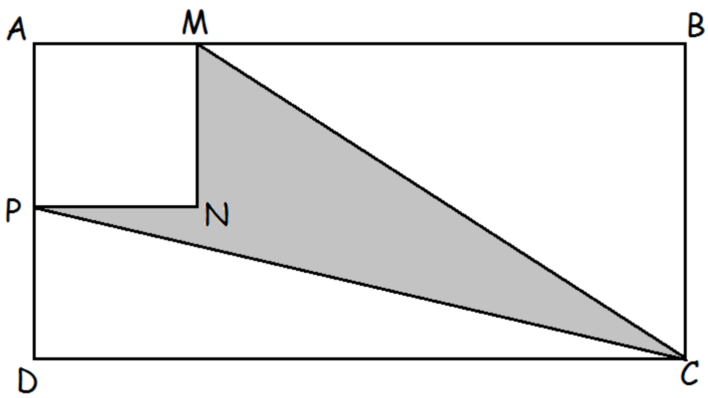
On y trouvera différentes modalités (des problèmes ouverts, des travaux d'argumentation, des travaux techniques) qui balaient la majeure partie des capacités et des compétences à travailler en seconde dans ce domaine.

## La modélisation :

Pour travailler la modélisation et évaluer les compétences des élèves dans ce domaine, on dispose de nombreux problèmes basés sur la géométrie : Nous avons choisi d'analyser celui de la flèche dans le rectangle.

### Enoncé :

On considère la figure ci-dessous, où ABCD est un rectangle tel que AB = 12 et BC = 6, M est un point mobile sur [AB], et les points mobiles N et P sont placés de telle sorte que AMNP est un carré, P étant un point du segment [AD].




Déterminer comment placer le point M si l'on veut que l'aire grisée soit la plus grande possible. Expliquer la méthode employée.

### Mise en œuvre :

On peut poser ce genre de problème en fin d'année.

On fournit aux élèves un accès à GeoBebra. On attend qu'ils construisent la figure et qu'ils tracent la courbe (avec la fonction trace, par exemple - environ 30 minutes).
On passe alors à une phase de recherche algébrique pour démontrer les conjectures, durant laquelle les élèves élaborent et manipulent les formules. On peut leur donner la forme canonique ou bien ils la conjecturent à l'aide de l'inspecteur de fonction de Geogebra.
Cette deuxième phase prend souvent plus d'une heure.

## Remarques :

- Selon l'objectif qu'on se fixe, on peut choisir qu'ABCD soit un carré ; on simplifie alors la discussion sur le domaine de définition à choisir.
- On peut présenter l'énoncé de différentes manières : avec une figure, avec 3 figures, sans figure, avec un fichier Geogebra… L'important étant de faire comprendre l'aspect dynamique de la construction. Il est important que les élèves se posent la question des points variables et points invariants.
- La principale activité qui est recherchée, dans ce travail, c'est le changement de registre. C'est donc essentiel de le laisser à la charge des élèves.
- Evidemment, nous développons cette situation ici dans un problème d'optimisation, mais on peut aussi poser des questions de recherche d'antécédent / résolution d'équation ou bien sur les variations.

## Compétences évaluées :

Nous listons ci-dessous les différentes activités qui trahissent la mise en œuvre des compétences travaillées au lycée :

- Chercher expérimenter :

Expérimenter pour différentes valeurs de AM ou de AP.

- Modéliser :

Choisir d'une variable
Elaborer une formule pour les figures intermédiaires
Réfléchir au domaine de définition

- Représenter :

Invalider des modèles habituels de calcul d'une aire (il n'y a pas de formule pour calculer l'aire d'une « flèche »).
Changer de registre à plusieurs reprises (passage d'un registre géométrique à un registre "informatique" transposition vers geogebra, puis algébrique, puis fonctionnel.)

- Raisonner/Démontrer

Elaboration de la formule.
Démontrer que la forme canonique est égale à la forme développée obtenue.
Démontrer que le maximum est atteint à la valeur conjecturée.

- Calculer :

Organiser les calculs
Développer une expression
Utiliser des logiciels de calcul

- Communiquer :

La démarche complexe demande naturellement une explication du cheminement.
On peut exiger un plan d'étude.

## Coups de pouce :

Voici quelques aides ponctuelles qui n'empiètent « pas trop » sur le travail dévolu aux élèves :

- Faire coder la figure
- Interroger sur la nature des triangles et des quadrilatères en jeu.
- Proposer de choisir différentes valeurs pour la longueur AM.
- Préciser qu'on ne connait pas de formule pour calculer l'aire d'une "flèche".
- Pour calculer l'aire colorée, on peut indiquer qu'il faut procéder par soustraction.
- Donner les formules de l'aire d'un triangle et d'un carré
- Utiliser la fonction "trace activée" pour mettre en évidence la courbe de la fonction sous-jacente.

## Critères de réalisation :

→ L'introduction d'une variable de type $AM = x$ est un attendu de cette tâche.

→ On d'attend aussi à ce que les élèves soient capables de choisir la forme la plus adaptée pour résoudre le problème de maximum.

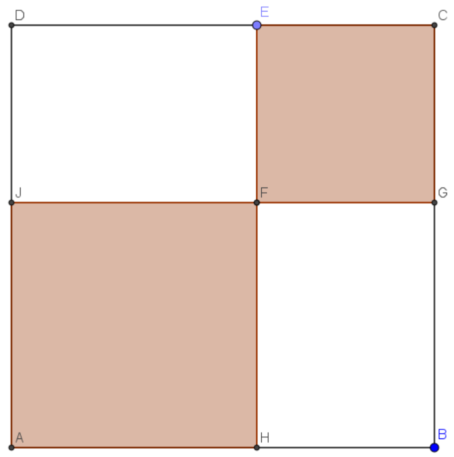
→ Il faut enfin démontrer qu'un nombre est le maximum de la fonction du second degré.

## Taches similaires :

Les situations de ce type sont très nombreuses dans la littérature. Afin de faire un parcours qui familiarise les élèves avec ce type de tâches, on trouvera entre autres :

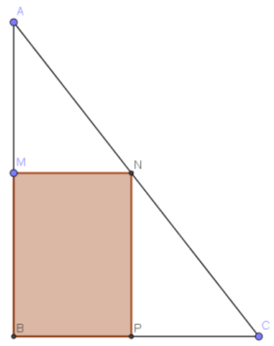
Problème des deux carrés dans le carré :

Un questionnement similaire (maximum, variations ou bien recherche d'antécédents) à partir de la situation schématisée ci-dessous permet de travailler une modélisation simple :




Problème du rectangle inscrit dans le triangle :

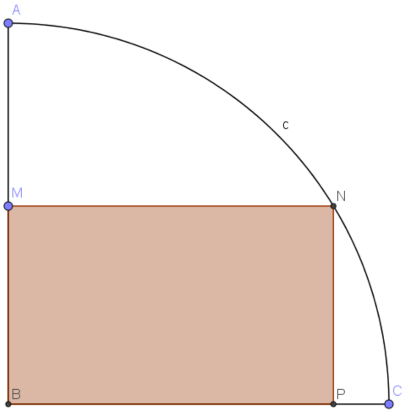
Un questionnement à propos des grandeurs qui sont variables les unes par rapport aux autres peut être une bonne approche de la notion de fonction :




En particulier si' l'on choisit $AB \neq AC$, le périmètre varie en fonction de BM, contre toute intuition.

Problème du rectangle dans le quart de disque :

Le problème ci-dessous, toujours assorti d'un questionnement du même type que celui du problème de la flèche, pose des problèmes de modélisation plus ardus, qui font travailler les techniques calculatoires. Cependant, il faudra se contenter d'une conjecture




Comment placer le point P, si l'on veut que l'aire du rectangle BPNM soit maximale ?

Dans un repère (O ;I ;J) orthonormé, on considère A(0 ;1). Pour tout point R de (OI), autre que O, on construit :

- Le point N, intersection de (OI) et de la perpendiculaire en R à (AR).

- Le point M tel que ORMN soit un rectangle.

Si R est en O, on définit M = 0.

Où sont situés les points M ainsi construits lorsque R parcourt la droite (OI) ?

## Les Equations / Recherches d'images et d'antécédents

Afin de travailler la capacité de calcul des élèves, nous sommes nombreux à systématiser des routines de début de séance. Ces routines poursuivent en même temps plusieurs objectifs :

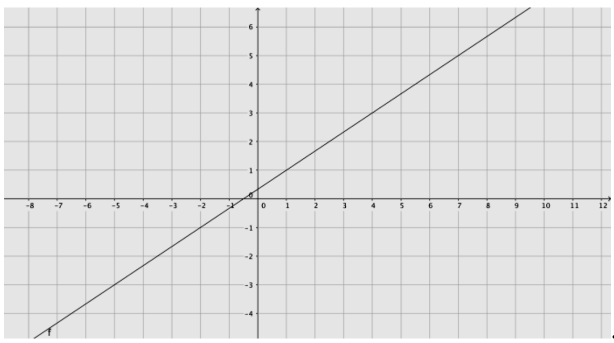
Accélérer la mise au travail

- Donner des repères
- Mettre en évidence des progrès
- Travailler les « gammes »

Nous avons choisi de présenter un dispositif un peu particulier qui consiste à valoriser les erreurs commises, il s'agit de « l'erreur favorite ».

### Mise en œuvre :

Lorsque la classe entre dans la salle, il y a au tableau une question « technique » : par exemple « donner une forme algébrique de la fonction représentée ci-dessous :



. »

Les élèves prennent alors chacun une fiche cartonnée sur laquelle ils écrivent leur nom et résolvent le problème posé.

Au bout de 3 ou 4 minutes, le professeur ramasse les fiches et les classe rapidement entre correcte et incorrecte. Parmi les fiches incorrectes, il en choisit une qui contient son « erreur favorite ». Il peut s'agir, par exemple, d'une erreur sur une chose secondaire. Typiquement, un élève qui lit directement les valeurs des coefficients et répond, par exemple :
$f(x) = 0{,}7x + 0{,}5$.

Il écrit l'erreur favorite au tableau et demande à la classe :

- « Pourquoi est-ce celle-là que je préfère ? »
- « Pourquoi est-ce une erreur ? »

La première question mettra en évidence les choses positives dans une telle réponse : La connaissance de la forme générale d'une fonction affine, la bonne compréhension des rôles graphiques de m et $p$ dans une équation de courbe du type $y = mx + p$…

La seconde permettra d'enrichir les méthodes des élèves et donnera l'occasion de proposer un corrigé du problème posé. Elle entretient aussi une habitude importante : celle de chercher une rectification à une erreur.

**Remarques :**

- Il est possible d'attendre la fin de la séance pour présenter une correction du problème posé en début d'heure : On a alors aussi une routine de sortie de classe. Cela permet aussi de se donner un peu plus de temps pour trier les réponses et faire son choix, sans que les élèves soient trop passifs à ce moment-là.
- C'est un dispositif très pratique pour mesurer précisément si une capacité donnée demande l'organisation d'une remédiation, car on voit très exactement le nombre d'élèves en mesure d'accomplir la tâche dans la classe.

**Attendus de fin de seconde :**

Dans le domaine des fonctions, on attend des élèves qui terminent leur seconde d'être capables de :

- Donner une solution approchée d'une équation à l'aide d'une méthode graphique.
- Résoudre une équation du premier degré de manière algébrique
- Factoriser une identité remarquable
- Développer une expression
- Résoudre une équation-produit
- Trouver algébriquement l'intersection de deux courbes
- Déterminer une équation de droite à partir d'une représentation graphique
- Construire une droite dans un repère à partir de son équation
- Résoudre une inéquation à l'aide d'un tableau de variations
- Construire un tableau de variations…

On peut donc envisager de stabiliser/renforcer/automatiser/approfondir ces capacités au travers de ce genre de dispositif, s'il est régulièrement mis en œuvre dans la classe.

## Les Inéquations / signe d'une fonction :

### Dispositif optimum :

On écrit au tableau la question ouverte : « Quel est le signe de (3x+7)(x-3) ? »

On peut animer un court débat pour expliciter et clarifier les termes de la question : que veut dire signe d'une expression ? On peut préciser qu'on attend une réponse en fonction de x, etc…

On place la classe en îlots pour un travail de groupe avec un ou plusieurs ordinateurs par groupe, et on désigne un rapporteur. Il est aussi possible d'organiser un travail en binôme avec ordinateur ou calculatrice.

Les élèves pourront utiliser Geogebra, Excel, Algobox…

### Objectif :

Basculer du signe d'une expression du premier degré au signe d'un produit de facteurs du premier degré.

### Pré-requis :

Pour aborder sereinement ce type de travail, il faut que soit assez bien installées les notions suivantes :

- résolution d'une équation du premier degré,
- propriété du produit de facteurs nuls,
- théorème du signe de ax+b (a≠0),

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $+\infty$ |
| Signe de ax+b (a≠0) | | Signe de - a | 0 | signe de a | |

- notion d'intervalle

### Compétences à mettre en œuvre :

Ce genre de tâche a pour objectif de travailler des compétences, particulièrement. Voici ce qu'on demande aux élèves de mettre en œuvre dans ce genre de travaux :

- Chercher Expérimenter :

Emettre des conjectures à partir du graphique, à partir d'essais numériques

Analyser le problème pour comprendre le type de réponse attendue (solution par intervalles)

- Modéliser :

Il y a de nombreux changements de registres et notamment des aller-retours entre eux (passage de l'algébrique au numérique ou au graphique, retour à l'algébrique)

- Raisonner :

Raisonner pour élucider la mécanique des expressions produit

- Démontrer

Justifier, argumenter au sein du groupe et au sein de la classe

- Communiquer

Communiquer en utilisant les langages mathématiques (intervalles, variations, équations)

Communiquer pour expliquer, argumenter et comprendre autrui

Communiquer pour porter un regard critique ou porter une objection.

**Obstacles :**

Les compétences listées précédemment sont mobilisées à cause d'un certain nombre d'obstacles qu'il est important de laisser à la charge de l'élève. En particulier lors de la phase de dévolution, il faut prendre garde à ne pas trop guider les élèves, si l'on veut qu'il leur reste des compétences à mettre en œuvre. Voici une liste d'obstacles « clé » liés à cette situation :

- Le développement de l'expression qui ne mène pas vers plus de simplicité
- La valeur $-\frac{3}{7}$ impossible à connaitre *via* les logiciels qui ne travaillent qu'avec des valeurs approchées et qui va donc imposer aux élèves la résolution de l'équation (3x+7)(x-3) =0 avant de passer à l'inéquation
- La visualisation de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto (3x+7)(x-3)$permet de conjecturer le tableau de signes final mais pas de démontrer les propriétés soulevées
- La difficulté d'obtention des tableaux de signes de $x \mapsto 3x+7$ et de $x \mapsto x-3$ car à ce moment de l'année, rien n'est stabilisé
- possibilité de résoudre 3x+7> et x-3>0 puis 3x+7<0 et x-3<0 mais celui induit un surcroît d'intervention pour expliquer le « - par - » et ensuite union et intersection d'intervalles, ce qui est complexe à mettre en œuvre et couteux en temps
- Comment agencer un tableau à plusieurs « lignes » ?
- Utilisation à bon escient de la « règle des signes »
- Liens entre signe d'une expression et position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses

*Dans ces différentes phases, il y a la dialectique de l'action (entre l'élève et le problème), celle de la formulation (qui se déroule entre les élèves et avec le professeur) et la dialectique de la validation (entre les élèves et le professeur), selon Brousseau, avec production de débats mathématiques pour faire un focus sur conjecture et moyens de synthétiser tout ce qui a été produit par les élèves en vue du tableau final.*

## Les variations des fonctions :

### Enoncé:

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *Variation de f* | | ↗ | 2 | ↘ | 0 | ↗ | |

A l'aide des informations contenues dans le tableau de variation précédent, répondre aux affirmations par **Vrai**, **Faux** ou **on ne peut pas savoir.**
On demande de justifier chaque réponse.

1) La fonction $\boldsymbol{f}$ est une fonction affine.

2) $\boldsymbol{f(-2)} > 0$.

3) Le point A(-3 ; 2) appartient à la courbe représentative de $\boldsymbol{f}$.

4) $\boldsymbol{f(0)} < 0$

5) la fonction $\boldsymbol{f}$ est positive sur [5 ; +∞[

### Objectif :

Nous visons ici l'utilisation du tableau de variation d'une fonction en tant que concept et objet d'étude. Le tableau de variation est un objet qui repose sur un grand nombre de normes que l'élève doit maîtriser. Il doit notamment avoir bien saisi que remplir un tableau de variations ne prouve rien, mais que pour autant, il contient beaucoup d'informations et qu'il y a donc un travail de preuve préliminaire à sa construction, ainsi qu'un travail d'extraction de données lorsqu'il est fourni.

Il faut donc savoir déduire ou démontrer à partir du tableau de variation d'une fonction d'autres informations que les variations et les optima locaux : appartenance de point à la courbe représentative, signe de la fonction sur des intervalles particuliers etc…

## Remarques préliminaires et obstacles :

Le tableau de variations est très régulièrement rencontré lors de l'année de seconde pour résoudre des problèmes d'extremum et effectuer des encadrements et comparer des images.

Lorsque les attendus se situent en dehors de ce champ-là, les élèves sont parfois déroutés et des confusions sont mises en évidence, en particulier entre les variations et le signe d'une fonction. Ce type de tâche permet de donner un point de vue différent des variations d'une fonction et de donner du sens aux définitions formelles de celles-ci.

## Pré-requis :

- Variations d'une fonction
- Signe d'une fonction
- Notion d'intervalle.
- Signe et variation d'une fonction affine

## Mise en œuvre :

Ce type d'exercices peut être donné comme entrainement, à résoudre seul ou à deux. On peut le retrouver aussi dans des tâches d'évaluations. C'est une activité qui peut être posée lorsque les variations et le signe des fonctions ont été abordés ; plutôt lorsqu'est déjà bien avancée l'exploration du domaine assez vaste que sont les fonctions en seconde.

Nous insistons sur l'importance de la justification donnée à chaque réponse qui devra être claire et donnée dans un langage adapté. C'est en cela que réside essentiellement l'intérêt de ce type de tâches.

## Critères de réalisation :

L'élève doit être capable à l'aide des définitions des variations d'une fonction de justifier ses réponses.

## Compétences travaillées :

- Raisonner :

Les changements de cadres sont nombreux :

A partir du tableau de variations, il faut être capable de donner des interprétations graphiques avec la courbe représentative de la fonction.

La notion d'intervalle est aussi très présente pour les questions 2) ; 3) et 5).

L'élève doit être capable de mobiliser ses connaissances concernant les fonctions affines pour la première question.

Différents registres de langage sont utilisés dans les questions ce qui demande à l'élève une certaine aisance pour basculer de l'un à l'autre.

- Démontrer :

A l'aide des définitions de la croissance et de la décroissance d'une fonction sur un intervalle, l'élève peut démontrer (à condition de rédiger correctement) toutes les questions sauf la première qui demande une mobilisation des théorèmes concernant les fonctions affines.

- Communiquer :

Toute la difficulté et, en fait, le cœur du travail résident dans la rédaction des réponses. Certaines réponses peuvent paraître évidentes mais la justification reste pointue. Elle peut être fournie en langage naturel mais ça risque de la rendre lourde et difficilement compréhensible. Elle peut aussi être formalisée à l'aide du langage mathématique et cela demande à l'élève (plutôt en fin d'année) de maîtriser le symbolisme mathématique. Dans les deux cas, la bonne compréhension de la croissance ou de la décroissance d'une fonction est nécessaire.

**Tâches similaires :**

On peut tout à fait transposer ce genre d'exercice avec des questions similaires à un tableau de signe.

Voici le tableau de signes d'une fonction (dont on ne connaît ni l'expression ni la nature) :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Répondre aux affirmations suivantes par : **VRAI**, **FAUX** ou **ON NE PEUT PAS SAVOIR**.

On demande de justifier chaque réponse.

**1)** $f(2) = 6$

**2)** La fonction $f$ est une fonction affine.

**3)** L'inéquation $f(x) < 0$ a pour ensemble de solutions [-3 ; 5].

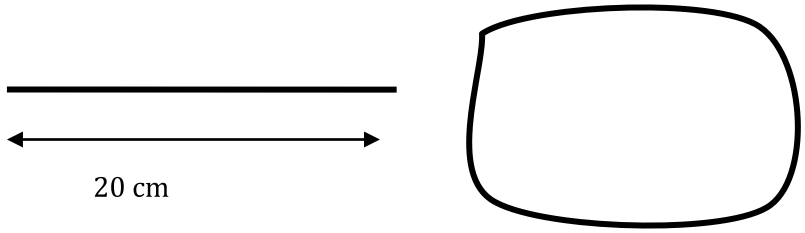
**4)** Le point A(5 ; 0) appartient à la courbe représentative de la fonction $f$.

**5)** La fonction $f$ est décroissante sur $]-\infty ; 5]$.

## Les problèmes d'optimisation

### Enoncé :

Marc s'ennuie parfois en classe, pour s'évader, il joue souvent avec un bout de ficelle de 20 cm de long. Il s'amuse à former des rectangles. Un jour, une question le taraude :
Parmi tous les rectangles qu'il peut former, lequel possède la plus grande aire ?




Qu'en penses-tu ? Propose une réponse en expliquant clairement ton raisonnement.

### Objectif :

Ce type de problème permet à l'élève d'évaluer et de travailler sa maîtrise des compétences mathématiques. C'est une attente de la seconde pour diverses compétences :

Se représenter la situation : L'énoncé possède trois informations que l'élève doit traiter pour s'approprier le problème. (longueur 20 cm, rectangle et plus grande aire) : On cherche en fait à dessiner un rectangle dont le périmètre est 20 et l'aire la plus grande.

La schématisation simpliste proposée est un premier pas vers une représentation plus structurée, elle peut servir de coup de pouce.

Chercher : Comment chercher à résoudre ce problème ? En faisant des dessins puis en calculant les aires des différents rectangles obtenus, en utilisant un logiciel de géométrie etc… Cette expérimentation est un des reflexes qu'il nous semble nécessaire d'avoir pour aborder sereinement les filières de première.

On obtient assez vite l'intuition que la réponse est le carré.

Modéliser : Si sa représentation conduit l'élève à effectuer divers rectangles, il conçoit une variable et modélise la situation à l'aide d'une fonction, (première étape de modélisation), en seconde, on peut attendre de l'élève qu'il note x sa largeur et qu'il exprime en fonction de x la longueur $10 - x$ (ou vice-versa..) après un travail algébrique qui n'est pas trivial pour nos secondes (car il y a des changements de registres à maîtriser) puis l'aire $x(10 - x)$.

Raisonner : Le raisonnement attendu tourne autour de la variation de cette fonction trinôme et son extremum. L'élève peut exploiter sa calculatrice pour répondre en demandant le maximum ou exploiter ses connaissances sur la parabole d'équation $y = x(10-x)$ . Le passage à la forme canonique $-(x-5)^2 + 25$ n'étant pas exigible, cette dernière peut être donnée pour conclure. On peut aussi envisager l'utilisation d'un grapheur (comme Geogeba ou Sine qua Non) pour arriver à l'émission de la conjecture. On passera ainsi d'une conjecture à une démonstration.

Le travail sur les inégalités pour formuler $A(x) \leq A(5) = 25$ est une attente de la classe de seconde ; cette assertion donne sens au maximum de la fonction.

Communiquer : Quel que soit le moment de l'année où le problème est posé, le travail de rédaction pour exprimer avec clarté le raisonnement utilisé est exigible. La formulation avec l'algèbre de l'expression de la fonction et de son ensemble de définition ainsi que la définition rigoureuse de la variable sont des attendus de la classe de seconde. De même, le dessin approximatif de la courbe représentative de la fonction pour valider la réponse est une exigence nécessaire pour éviter les procédures « recette de cuisine » avec la calculatrice.