Université de Montpellier IAE Master 2 SIAD 2022-2023

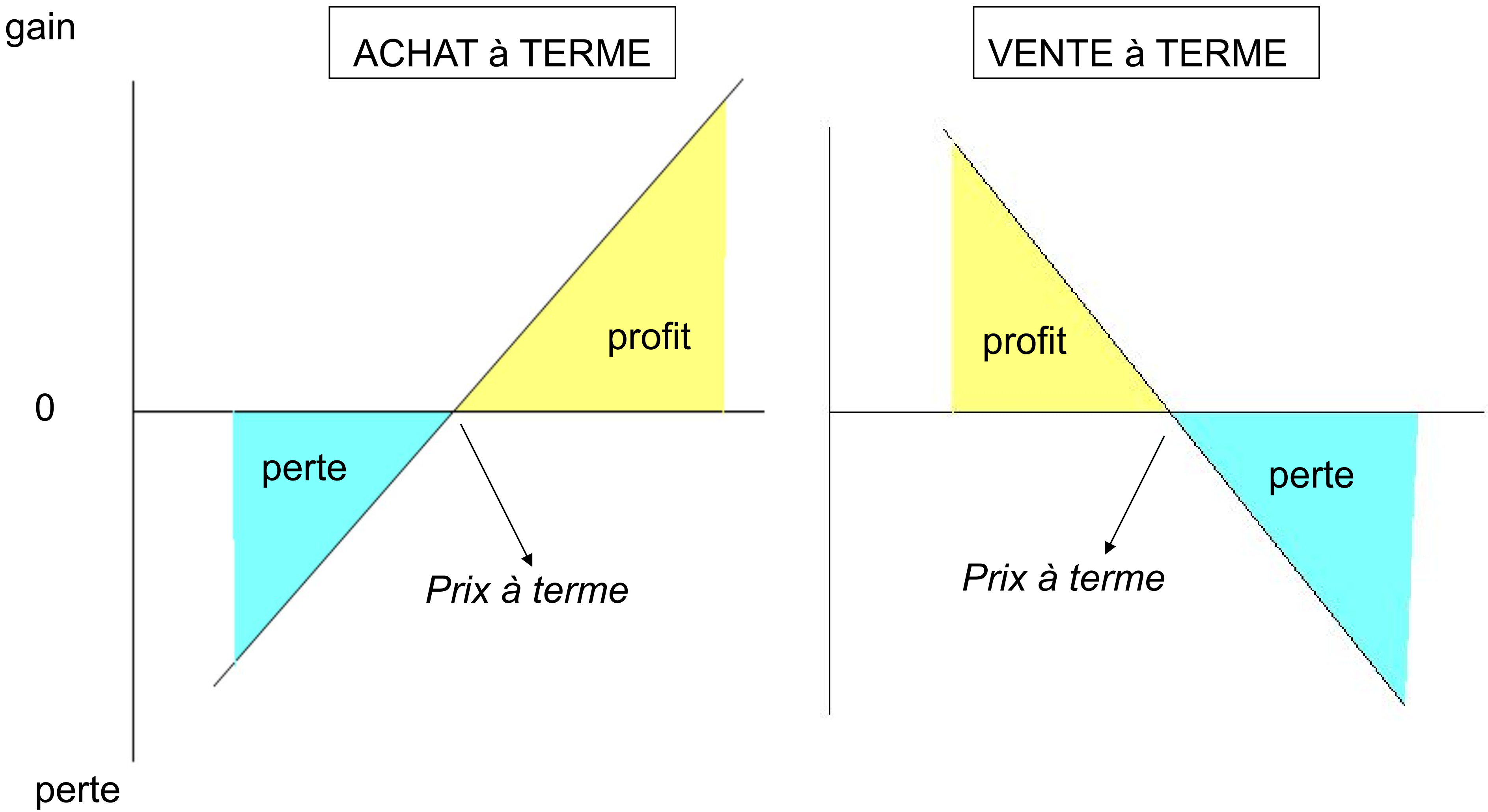
Gestion des Risques

Contrats d'OPTIONS

Pr. Alain FRANCOIS-HEUDE alain.francois-heude@umontpellier.fr

UM ENT MOODLE Cours : A**nalyse Financière des Risques**

Comportement stratégique pour un contrat à terme



Il y a compensation des gains et des pertes entre l'acheteur et le vendeur

Présentation de l'option financière de type européen

Contrat bilatéral (un acheteur et un vendeur) :

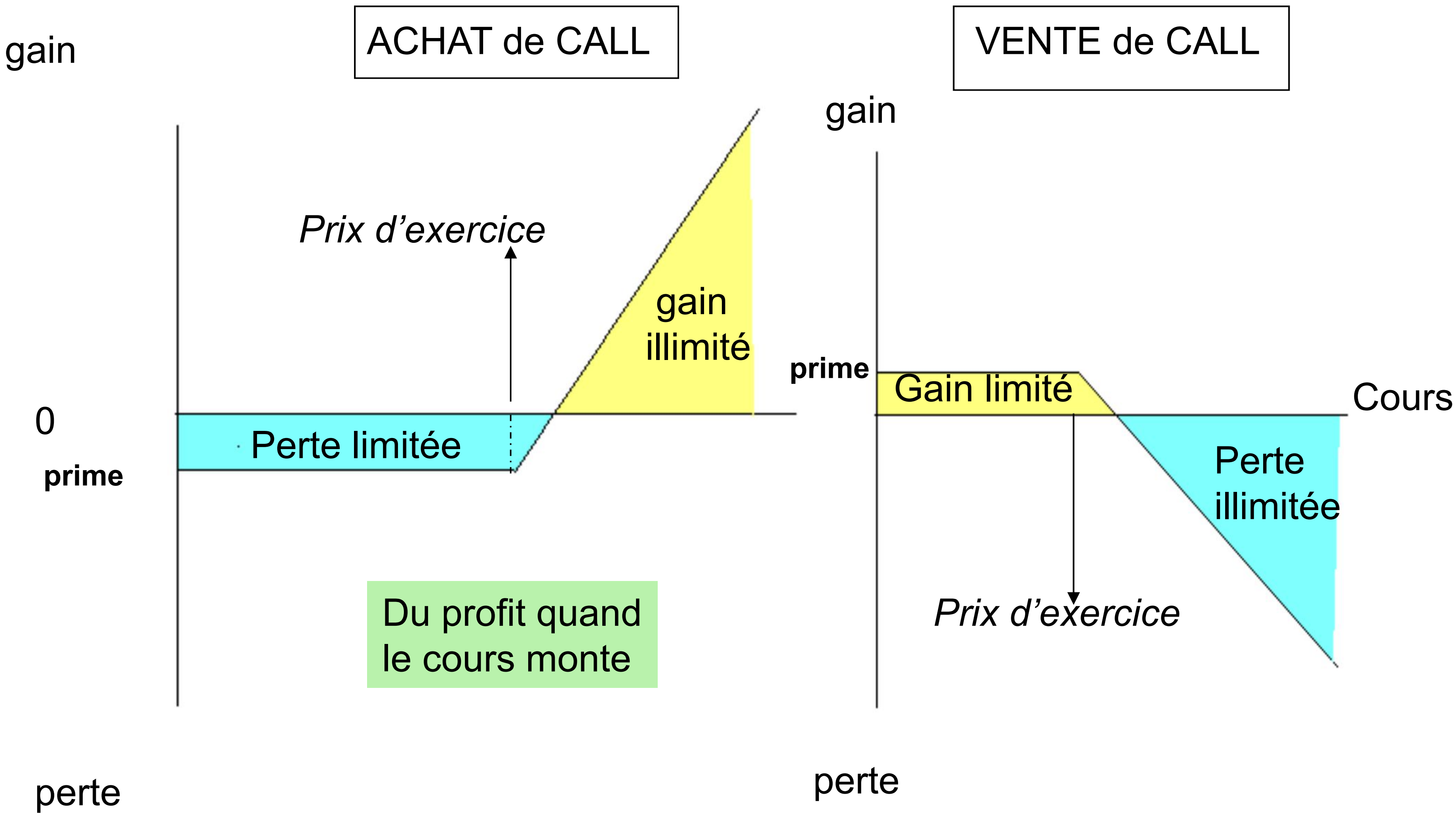
- un actif sous jacent clairement identifié avec un prix S_t
- porte sur le droit d'acheter (Call) ou de vendre (Put) le sous jacent
- fixation en t=0 d'un prix d'exercice (*Strike*) noté E
- date terminale (maturité) pour le contrat (t = T)
- paiement d'une prime par l'acheteur de l'option (en t = 0)
- possibilité à l'échéance pour l'acheteur d'exercer son droit

Dans un premier temps, on considère des options :

- de type européen
- sans flux intermédiaire (ex : dividende)
- le sous jacent est un actif au comptant
- le sous jacent n'implique pas les devises

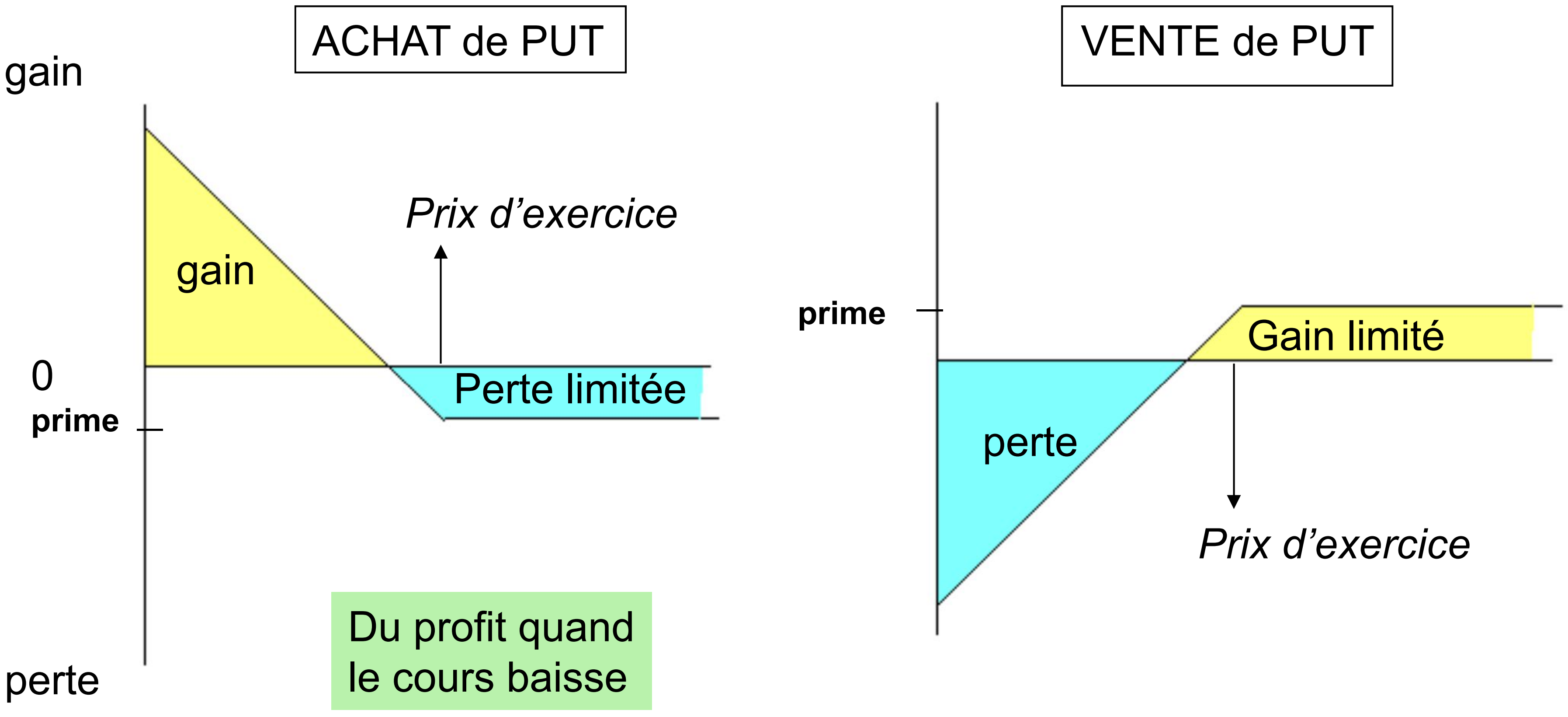
Ces contraintes seront relâchées par la suite

Comportement stratégique pour un Call (option d’achat)



Il y a compensation des gains et des pertes entre l’acheteur et le vendeur

Comportement stratégique pour un Put (option de vente)



Il y a compensation des gains et des pertes entre l'acheteur et le vendeur

Analyse de la position à l'échéance en cas d'achat

Action	:	prix au comptant = S (Spot)	S = 98
Contrat à terme	:	prix à terme = F (Forward) dans 1 trimestre (T)	F = 100
CALL	:	prix d'exercice E = 100, prime 5, échéance T=1 trimestre	
PUT	:	prix d'exercice E = 100, prime 4, échéance T=1 trimestre	

A L' ECHEANCE

Action	Contrat	CALL	PUT
93	-7	-5	7-4= +3
98	-2	-5	2-4= -2
100	0	-5	0-4= -4
103	+3	3-5= -2	-4
105	+5	5-5= 0	-4
112	+12	12-5= 7	-4

abandon

abandon

Analyse de stratégie à l'échéance et Parité Call-Put

Portefeuille composé d'un Forward acheté et d'un achat de Put

Action	Contrat	CALL	PUT	F + P
93	-7	-5	3	-7+3=-4
98	-2	-5	-2	-2-2=-4
100	0	-5	-4	0-4=-4
103	+3	-2	-4	3-4=-1
105	+5	0	-4	5-4=1
112	+12	7	-4	12-4=8

Conclusion :

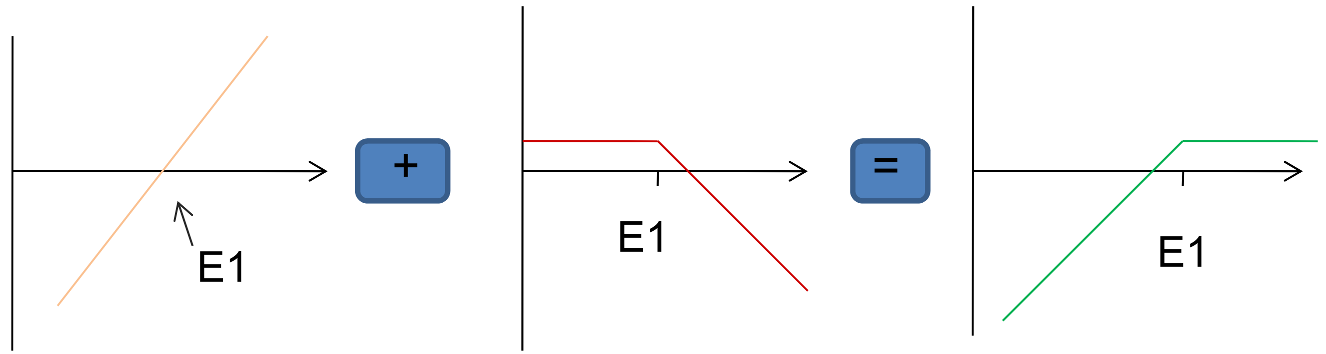
F + P = C + 1

C – P = F - 1

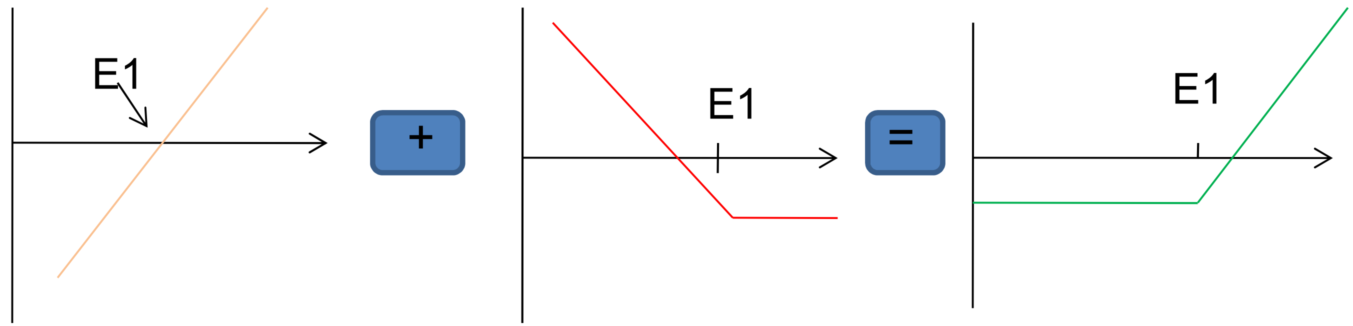
Achat de Call & Vente de Put = Achat à Terme & Impact Trésorerie

Stratégies élémentaires avec des options Call & Put

F – C = - P



F + P = C



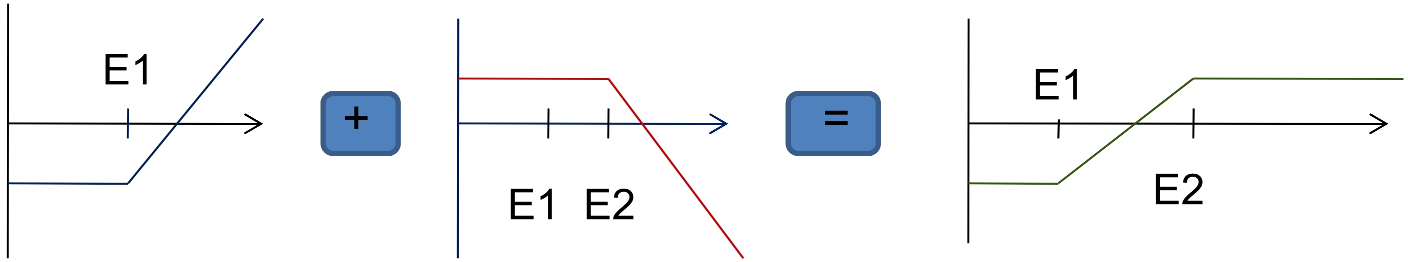
E1 prix d'exercice

D'autres options synthétiques : - F + C = P ou encore - F - P = - C

Stratégies élémentaires de type *Spread* (1)

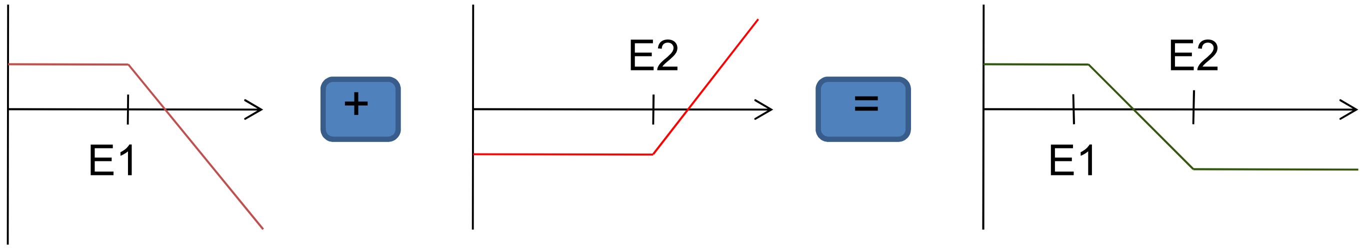
Avec deux *CALL* de prix d'Exercice différents : (E1 < E2) mais de même maturité

Spread haussier



Achat de *Call* à E1 & Vente de *Call* à E2 → *Bull Spread*

Spread baissier



Vente de *Call* à E1 & Achat de *Call* à E2 → *Bear Spread*

Avec deux *PUT* de prix d'Exercice différents : (E1 < E2) mais de même maturité

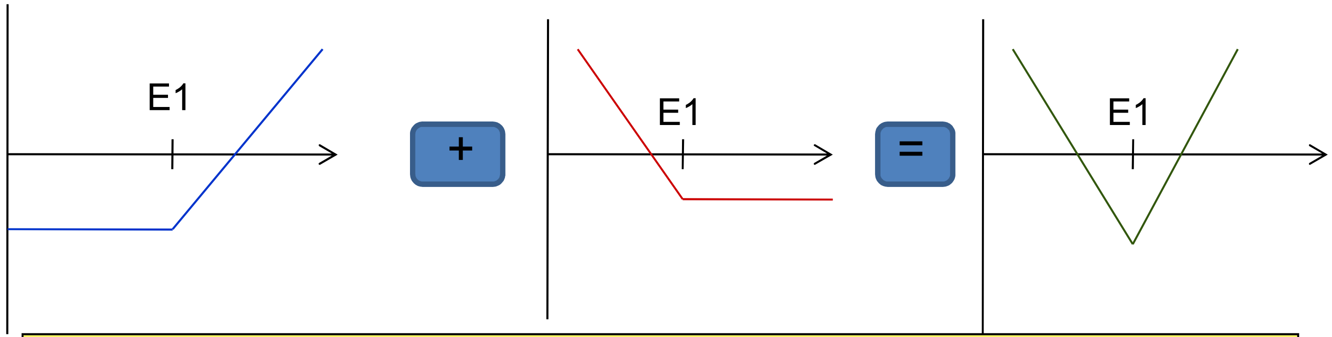
Spread haussier → Achat de *Put* à E1 et Vente de *Put* à E2

Spread baissier → Vente de *Put* à E1 et Achat de *Put* à E2

Stratégies élémentaires de type *Spread* (2)

Avec un *CALL* et un *PUT* de même prix d'exercice et de même maturité

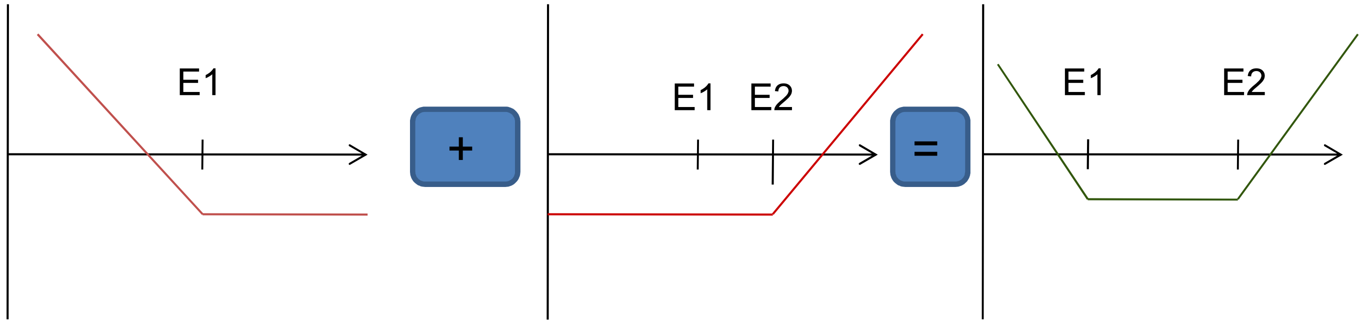
Straddle baissier



Achat de *Call* à E1 & Achat de *Put* à E1 ➔ *Bear Straddle*

Avec un *PUT* à E1 et un *CALL* à E2 et de même maturité

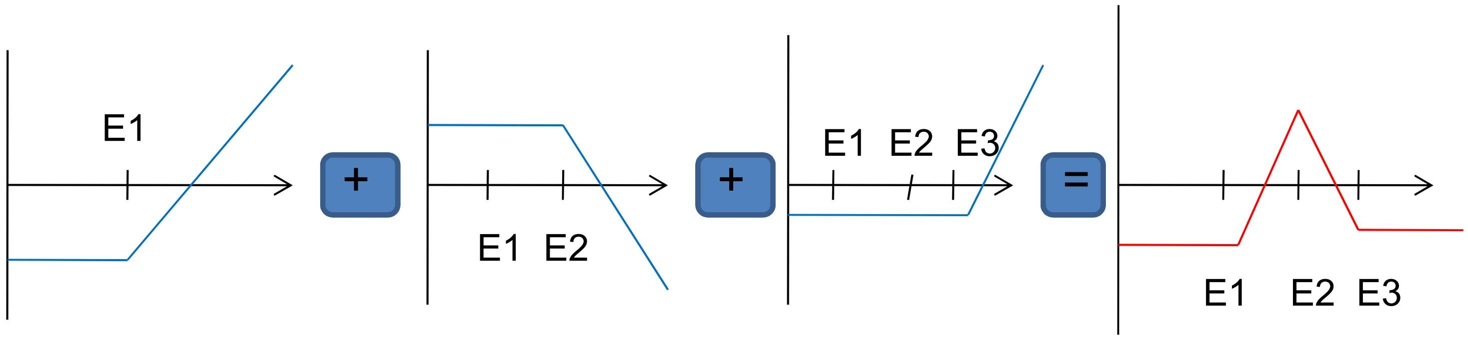
Strangle baissier



Achat de *Put* à E1 & Achat de *Call* à E1 ➔ *Bear Strangle*

Stratégies élémentaires de type *Spread* (3)

Ecart papillon



Achat *Call* à E1 & Vente 2 *Call* à E2 & Achat *Call* à E3 → *Butterfly Spread*

Même résultat avec des *Put* ex : écart baissier -P(E1) + 2P(E2) – P(E3)
Un *Condor* est un *Butterfly* impliquant 4 options !

D'autres possibilités :

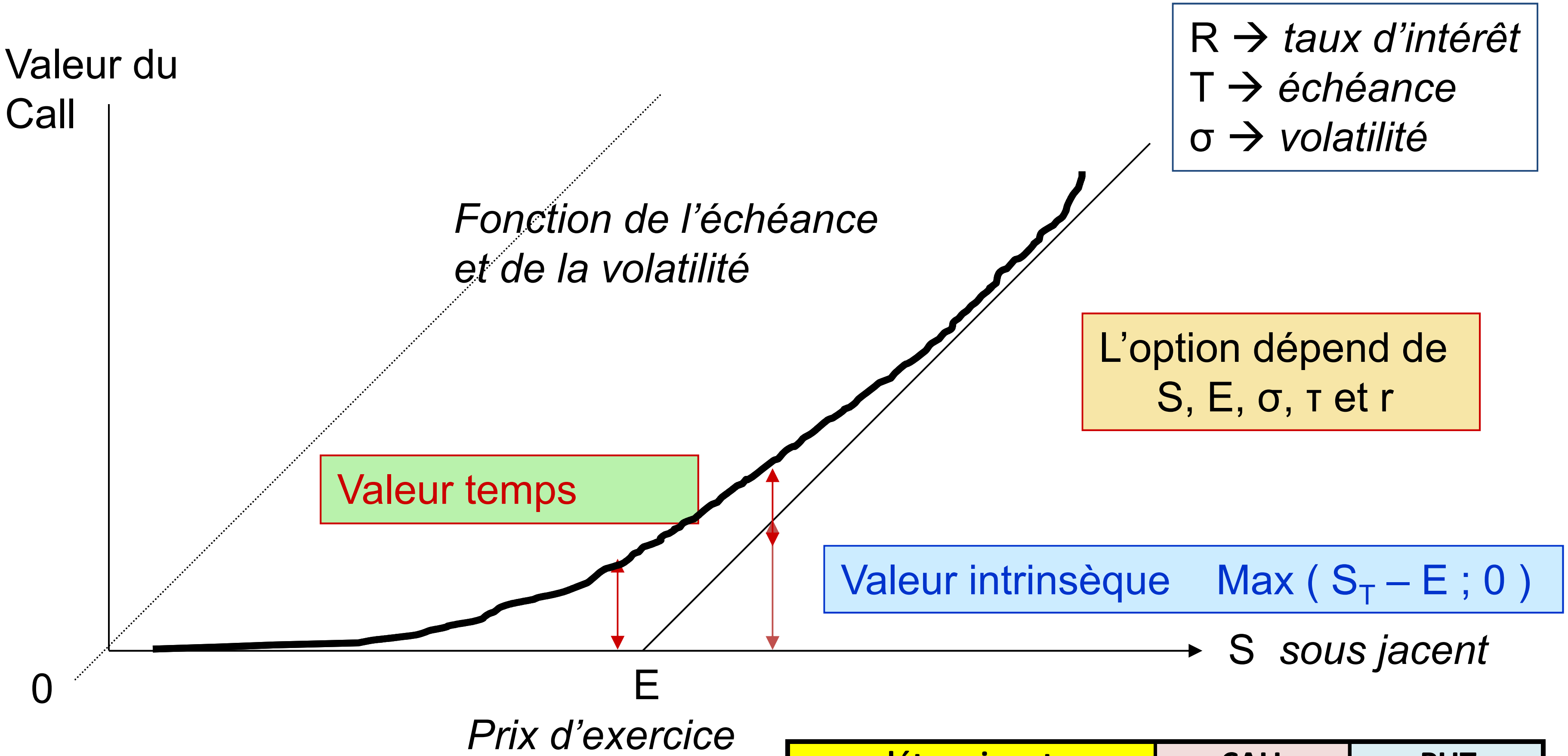
Strip : Achat de 1 Call et achat de 2 Put de même E et même T
→ l'investisseur anticipe une forte variation (plutôt à la baisse)

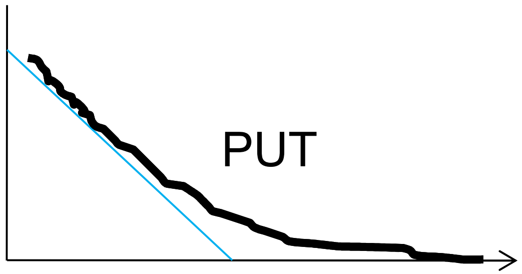
Strap : Achat de 2 Call et achat de 1 Put de même E et même T
→ l'investisseur anticipe une forte variation (plutôt à la hausse)

Spread Calendar : 2 Call ou 2 put de même *Strike* mais d'échéances différentes

….

Comportement du prix de l'option européenne





déterminants	CALL	PUT
Cours sous jacent ↑	> 0	< 0
Prix d'exercice ↑	< 0	> 0
Volatilité ↑	> 0	> 0
Échéance ↑	> 0	?
Taux d'intérêt ↑	> 0	< 0

CALL – PUT PARITY

Principe :

en t = 0 $\begin{cases} \text{Stratégie A : Acheter un CALL (C) et détenir du Cash en quantité } E.e^{-r\tau} \\ \text{Stratégie B : Acheter un Put (P) et acheter le Sous-jacent (S)} \end{cases}$

<u>Stratégie A</u> : Acheter un CALL (C) et détenir du Cash en quantité $E.e^{-r\tau}$

<u>Stratégie B</u> : Acheter un Put (P) et acheter le Sous-jacent (S)

en t = T

- si $S_T > E$ Exercice au prix de E, abandon du Put → on détient l'actif
- si $S_T < E$ Abandon du Call, Exercice du Put à E → on détient un cash E

Pas d'arbitrage profitable en T, donc : $\mathbf{C + E.e^{-r\tau} = P + S}$

Exemple : que faire avec les paramètres suivants ?

C = 3,00	P = 2,25
E = 30	S = 31
r = 10%	τ = 0,25

Str. A : $\mathbf{C + E.e^{-r\tau} = 3{,}00 + 30.e^{(-10\%/4)} = 32{,}26}$

Str. B : $\mathbf{P + S = 2{,}25 + 31 = 33{,}25}$

<u>Solution</u> : faire la stratégie A (moins coûteuse) et l'inverse de la stratégie B → gain ≈ 1

- si $S_T > E$ Exercice du call payé E et livraison du titre contre 31 (put non exercé)
- si $S_T < E$ Le put est exercé, pas le call : on paie E et on livre le titre contre 31

EVALUATION des OPTIONS avec un modèle binomial

Modèle binomial à une période

Principe d'arbitrage

« No Investment No Risk No Profit »

En t = 0 : un portefeuille (Q_0) est constitué par l'achat d'une action (S_0) et par la vente d'une quantité (h) d'options (O_0)

En t = T : le choix judicieux de la quantité (h) conduit à une valeur du portefeuille indépendant de l'état de la nature (donc sans risque)

$$S_0 \left\langle \begin{matrix} S_1^+ \\ S_1^- \end{matrix} \right. \qquad \mathrm{O}_0 \left\langle \begin{matrix} O_1^+ \\ O_1^- \end{matrix} \right. \qquad \mathrm{Q}_0 \left\langle \begin{matrix} Q_1^+ = S_1^+ - hO_1^+ \\ Q_1^- = S_1^- - hO_1^- \end{matrix} \right.$$

$$Q_1^+ = Q_1^- \Leftrightarrow S_1^+ - hO_1^+ = S_1^- - hO_1^- \Rightarrow h = \frac{S_1^+ - S_1^-}{O_1^+ - O_1^-}$$

$$Q_0 = \frac{Q_1^*}{1+r} \Leftrightarrow S_0 - hO_0 = \frac{S_1^* - hO_1^*}{1+r}$$

$$\rightarrow \boxed{O_0 = \begin{cases} \left(S_0 - \dfrac{S_1^+}{1+r}\right)\dfrac{1}{h} + \dfrac{O_1^+}{1+r} \\ \left(S_0 - \dfrac{S_1^-}{1+r}\right)\dfrac{1}{h} + \dfrac{O_1^-}{1+r} \end{cases}}$$

EVALUATION des OPTIONS avec un modèle binomial

Exemple à une période (τ = 1) : cas du CALL

$$S_0 \left\langle \begin{matrix} S_1^+ \\ S_1^- \end{matrix} \right. \qquad C_0 \left\langle \begin{matrix} C_1^+ = Max\left(S_1^+ - E;0\right) \\ C_1^- = Max\left(S_1^- - E;0\right) \end{matrix} \right. \Rightarrow h = \frac{S_1^+ - S_1^-}{C_1^+ - C_1^-}$$

$$C_0 = \left(S_0 - \frac{S_1^+}{1+r}\right)\frac{C_1^+ - C_1^-}{S_1^+ - S_1^-} + \frac{C_1^+}{1+r}$$

Valeurs : E = 104
r = 5%
τ = 1

$$S_0 = 100 \left\langle \begin{matrix} S_1^+ = 125 \\ S_1^- = 90 \end{matrix} \right. \qquad C_1 \left\langle \begin{matrix} C_1^+ = Max(125-104;0) = 21 \\ C_1^- = Max(90-104;0) = 0 \end{matrix} \right.$$

$$h = \frac{125-90}{21-0} = \frac{35}{21} = \frac{5}{3} = 1,667$$

$$C_0 = \left(100 - \frac{90}{1+5\%}\right)\frac{1}{1,667} + \frac{0}{1+r} = 8,571$$

Le Call (E=104, τ = 1) a une valeur de 8,57

EVALUATION des OPTIONS avec un modèle binomial

Exemple à une période (τ = 1) : cas du PUT (E = 104)

$$P_0 \left\langle \begin{array}{l} P_1^+ = Max\left(E - S_1^+;0\right) = Max(104-125;0) = 0 \\ P_1^- = Max\left(E - S_1^-;0\right) = Max(104-90;0) = 14 \end{array} \right. \Rightarrow h = \frac{125-90}{0-14} = -2,50$$

$$P_0 = \left(100 - \frac{125}{1+5\%}\right)\frac{1}{(-2,5)} + \frac{0}{1+r} = 7,619$$

Le Put (E=104, τ = 1)
a une valeur de 7,62

Vérification de la relation parité Call-Put

Call = Put + Titre – E / (1+r)

Call = 7,619 + 100 – 104/(1+5%)

Call = 8,571

Avec une option européenne, il suffit de '*pricer*' le Call

EVALUATION des OPTIONS avec un modèle binomial

Modèle binomial à plusieurs périodes

$$S_0 = 100$$

$$S_1^{+} = 125 \qquad S_1^{-} = 90$$

$$S_2^{++} = 157 \qquad S_2^{+-} = 106 \qquad S_2^{--} = 81$$

$$C_2^{++} = Max(157 - 104; 0) = 53$$

$$C_2^{+-} = Max(106 - 104; 0) = 2$$

$$C_2^{--} = Max(81 - 104; 0) = 0$$

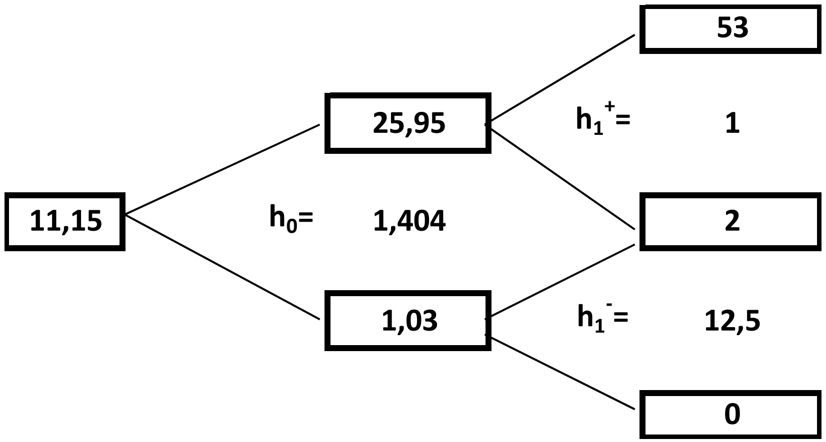
$$\boxed{C_{t-1} = \left(S_{t-1} - \frac{S_t^*}{1+r} \right) \frac{1}{h_{t-1}^*} + \frac{C_t^*}{1+r}}$$

<ins>Méthodologie</ins> :

a) la période t_1 , t_2 en haut

b) la période t_1 , t_2 en bas

c) la période t_0 , t_1



Le prix du Call est donc de 11,15
celui du Put est de 5,48

EVALUATION des OPTIONS avec un modèle binomial

Modèle binomial : analyse des déterminants

$S=100$; $E=104$; $r = 5\%$; $\tau = 1$ → $C_0 = 8{,}57$ $P_0 = 7{,}62$

Le sous jacent (S) de 100 à 101	$C_0(S=101) = 9{,}17$	$P_0(S=101) = 7{,}22$
Prix d'exercice (E) de 104 à 106	$C_0(E=106) = 7{,}75$	$P_0(E=106) = 8{,}71$
Volatilité (S_1^+) de 125 à 126	$C_0(S_1^+=126) = 8{,}73$	$P_0(S_1^+=126) = 7{,}78$
Taux d'intérêt (r) de 5% à 6%	$C_0(r = 6\%) = 9{,}06$	$P_0(r = 6\%) = 7{,}17$
Maturité (τ) de 1 à 2	$C_0(\tau = 2) = 11{,}15$	$P_0(\tau = 2) = 5{,}48$

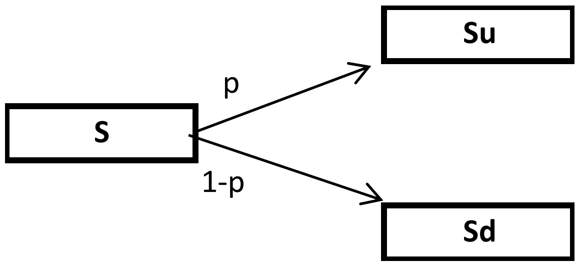
D'après la relation *Call-Put parity*, quand $S_0 = E / (1+r)$ alors $C_0 = P_0$

Cette approche est limitée dans la mesure où il est nécessaire de connaître la distribution de tous les prix du sous-jacent par date et par état de la nature

il est possible de réduire le nombre de paramètres à spécifier

EVALUATION des OPTIONS avec le modèle binomial C.R.R.

C.R.R. Cox- Ross- Rubinstein



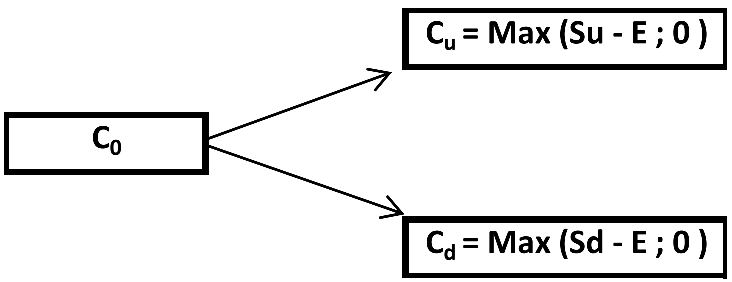
Avec S prix du sous-jacent en t=0
u et d les chocs multiplicatifs
Su et Sd, prix du sous-jacent en t=1
$d < 1 < r < u$ ($r \rightarrow 1$ + le taux)

$$E(S) = pSu + (1-p)Sd = S\left\{pu + (1-p)d\right\} \quad \text{et} \quad E(S) = rS$$

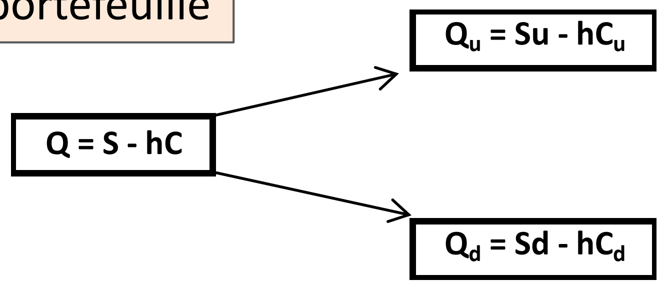
$$\Rightarrow p = \frac{r-d}{u-d} \qquad \text{car} \quad pu + (1-p)d = r$$

Le modèle donne implicitement la probabilité de l'état favorable

Pour avoir la valeur d'un CALL à une période, on applique le principe de non arbitrage



portefeuille



Valorisation d'options avec le modèle C.R.R. Cas d'un CALL à une période

$$\left.\begin{aligned} Q_u &= Su - hC_u \\ Q_d &= Sd - hC_d \end{aligned}\right\} \Rightarrow h = \frac{Su - Sd}{C_u - C_d}$$

Le ratio h permet d'immuniser
le portefeuille Q

$$Q = S - hC = \frac{Sd - hC_d}{r}$$

$$C = \left(S_0 - \frac{Sd}{r}\right)\frac{1}{h} + \frac{C_d}{r} = \left(S\frac{r}{r} - \frac{Sd}{r}\right)\frac{C_u - C_d}{S(u-d)} + \frac{C_d}{r}$$

$$C = \left[S\left(\frac{r-d}{u-d}\right)\left(\underset{s}{\underline{C_u - C_d}}\right) + C_d\right]/r$$

$$C = \left[pC_u + (1-p)C_d\right]/r$$

La valeur présente du CALL est égale
à l'espérance du prix en t=1 actualisée

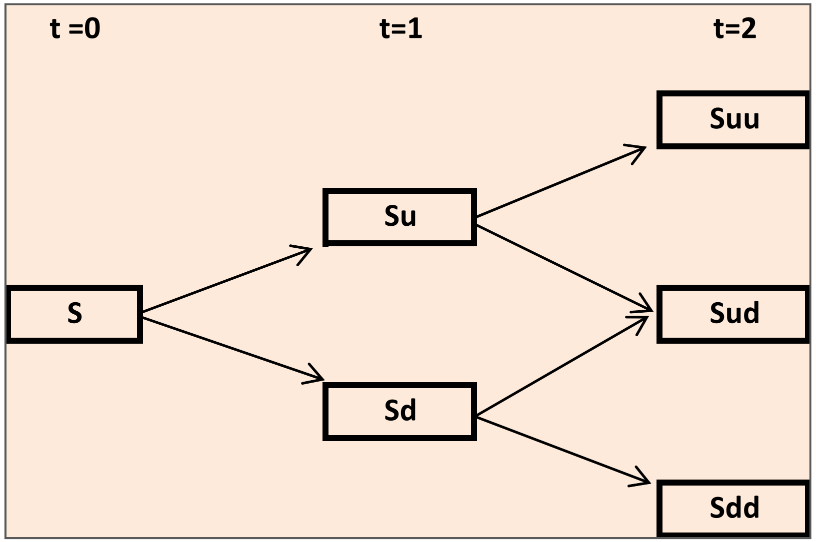
<u>*Exemple*</u> : S = 100, r =1,04 u = 1,08 d = 0,97 et E = 103

p = (1,04-0,97)/(1,08-0,97)=**63,64%**

C = [63,64%*Max(100*1,08-103;0) + (1-63,64%)*Max(100*0,97-103;0)]/1,04

C = 3,06€

Valorisation d'options avec le modèle C.R.R. Cas d'un CALL à 2 périodes



En prenant d = 1/u , Sud = S

$$C_u = \left[pC_{uu} + (1-p)C_{ud} \right] / r$$

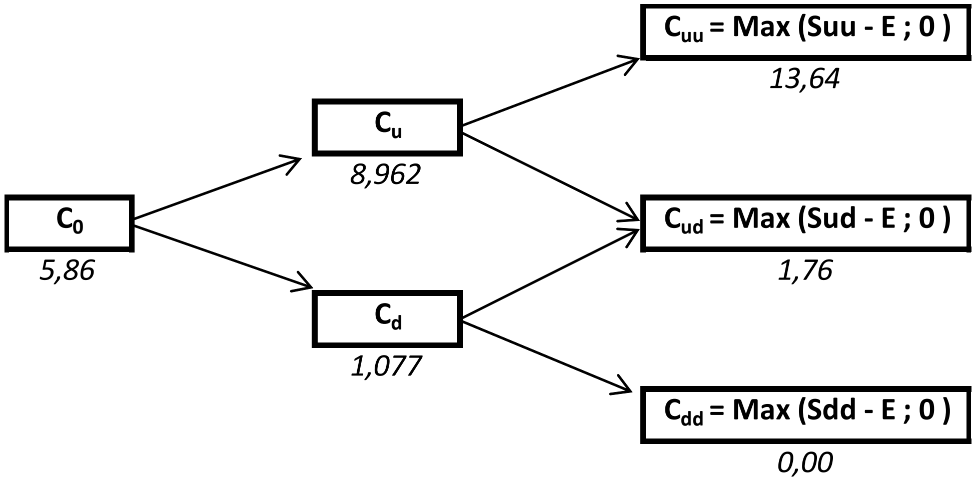
$$C_d = \left[pC_{ud} + (1-p)C_{dd} \right] / r$$

$$C = \left[pC_u + (1-p)C_d \right] / r$$

Le prix du CALL correspond à l'espérance du prix à 'échéance actualisée au taux sans risque

$$C = \left[p\left[pC_{uu} + (1-p)C_{ud} \right] / r + (1-p)\left[pC_{ud} + (1-p)C_{dd} \right] / r \right] / r$$

$$C = \left[p^2 C_{uu} + 2p(1-p)C_{ud} + (1-p)^2 C_{dd} \right] / r^2$$



__Exemple__ : S = 100, r =1,04 u = 1,08,
d = 0,97, E = 103 et τ=2
→ p = 63,64%

C = 5,86€

Valorisation d’options avec le modèle C.R.R. Cas à n périodes

$$C=\left[\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} MAX(Su^k d^{n-k}-E;0)\right]/r^n$$

Par récurrence, il est direct de calculer le prix du CALL européen (ou du PUT)

Soit **a** le point à partir duquel on a : $Su^a d^{n-a} \geq E$ ➔ $Max(Su^a d^{n-a} - E;0) = Su^a d^{n-a}$

$$C=\left[\sum_{k=a}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (Su^k d^{n-k}-E)\right]/r^n$$

$$C=S\left[\sum_{k=a}^{n} C_n^k \left(\frac{p}{1-p}\right)^k (1-p)^n \left(\frac{u}{d}\right)^k d^n r^{-n}\right]-Er^{-n}\left[\sum_{k=a}^{n} C_n^k \left(\frac{p}{1-p}\right)^k (1-p)^n \left(\frac{u}{d}\right)^k d^n\right]$$

…

$$C=S\left[\left(\frac{u-r}{u-d}d\right)^n r^{-n}\sum_{k=a}^{n} C_n^k \left(\frac{r-d}{u-r}\right)^k \left(\frac{u}{d}\right)^k\right]-Er^{-n}\left[\left(\frac{u-r}{u-d}d\right)^n \sum_{k=a}^{n} C_n^k \left(\frac{r-d}{u-r}\right)^k \left(\frac{u}{d}\right)^k\right]$$

Par convergence on retrouve le modèle de **Black-Scholes**

$$C=SN(d_1)-Ee^{-r\tau}N(d_2)$$

Les termes entre [ ] convergent vers des N(x)

Avec N(x) = loi normale cumulée de - ∞ à x

Valorisation d'options avec le modèle C.R.R. Construction du treillis

A partir des déterminants du prix d'une option : S E r σ et τ

Il est facile de trouver les paramètres du modèle de CRR

$$\Delta t = \frac{\tau}{n} \quad \text{avec } n \text{ le nombre de périodes}$$

$$u = \exp(\sigma\sqrt{\Delta t}) \qquad \mathrm{d} = \frac{1}{\mathrm{u}}$$

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

Des modèles plus précis sont, en général, utilisés

Exemple : S = 100, E = 103, r = 5%, σ = 30% et τ = 0,20 on choisit n = 20 périodes

Δt = 0,01 u = 1,030455 d = 0,970446 p = 50,08%

C = 4,536 et **P = 6,511** (*vérification avec la parité CALL-PUT*)

$$P = C - S + Ee^{-t\tau} = 4,536 - 100 + 103e^{-5\%.0,20} = 6,511$$

Avec un dividende discret, il suffit de le retrancher de la valeur du sous-jacent au moment du paiement

L'utilisation d'un modèle discret autorise le *pricing* de nombreuses options exotiques

Valorisation d'options américaines sans dividende avec le modèle C.R.R.

L'option américaine peut être exercée à tout moment

Construction du treillis pour un CALL :

- Pour la dernière date, on prend la condition terminale $MAX(Su^{n-k}d^{k} - E \; ; 0)$
- Pour les autres dates, cela donne :

$$Max\left[Su^{n\text{-}k}d^{k} - E \;\; ; \;\; e^{-r\Delta t}\left[pC_{u^{n-k+1}d^{k}} + (1-p)C_{u^{n-k}d^{k+1}} \right]\right]$$

on exerce sinon *on conserve*

Exemple avec n=4 et k=3 : $\rightarrow Max\left[Su^{1}d^{3} - E ; e^{-r\Delta t}\left[pC_{u^{2}d^{3}} + (1-p)C_{u^{1}d^{4}} \right]\right]$

L'exercice prématuré d'un $CALL_{US}$ sans paiement de dividende est inutile car :

- On paie le prix d'exercice immédiatement au lieu de T
- Il est préférable de revendre l'option (gain de la valeur temps)
- autre stratégie : conserver le Call et vendre le sous-jacent à découvert
- prix du $CALL_{EURO}$ = prix $CALL_{US}$ (en absence de dividende)

Le prix d'un PUT_{US} est supérieur ou égal au prix d'un PUT_{EURO}

Quand S → 0, l'exercice immédiat permet de dégager un gain certain (E)

La relation de parité Call-Put ne fonctionne pas avec des options américaines

EVALUATION des OPTIONS avec le modèle de Black-Scholes & Merton   B-S

Déterminants

S sous-jacent
E prix d'exercice
σ volatilité
r taux d'intérêt
τ maturité

Valeur d'un $\text{CALL}_{\text{EURO}}$ $$C_{BS} = SN(d_1) - Ee^{-r\tau}N(d_2)$$

avec $$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

et $$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \qquad N(-x) = 1 - N(x)$$

Valeur d'un PUT_{EURO} $$P_{BS} = Ee^{-r\tau}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

Exemple :

S = 100, E = 103, r = 5%,
σ = 30% et τ = 0,20

d1 = - 0,0787   d2 = - 0,2129

=Loi.Normale(d1 ; 0 ; 1 ; Vrai)

N(d1) = 0,469 N(d2) = 0,416

C_{BS} = 4,471€ P_{BS} = 6,446€

Relation *Call-Put Parity*

$$P = C - S + Ee^{-r\tau} = SN(d_1) - Ee^{-r\tau}N(d_2) - S + Ee^{-r\tau}$$

$$P = Ee^{-r\tau}\left[1 - N(d_2)\right] - S\left[1 - N(d_1)\right]$$

$$P_{BS} = Ee^{-r\tau}N(-d_2) - SN(-d_1)$$

Analyse de sensibilité avec les 'GRECS'

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta = \dfrac{\partial C}{\partial S} & \text{delta} \\ \Gamma = \dfrac{\partial^2 C}{\partial S^2} & \text{gamma} \end{array}\right\} \text{pour le sous-jacent}$$

$$\theta = \frac{\partial C}{\partial \tau} \quad \text{théta}$$ → pour le temps

$$V = \frac{\partial C}{\partial \sigma} \quad \text{véga}$$ → pour la volatilité

$$\rho = \frac{\partial C}{\partial r} \quad \text{rho}$$ → pour le taux d'intérêt

<u>Objectifs</u> :

Mesurer la variation de prix de l'option pour une variation d'un des déterminants

Mettre en œuvre des techniques de réduction d'un type de risque

Généraliser les outils à un portefeuille comportant des sous-jacents et des options

Ces mesures vont déterminer la variation de l'option (en €)

pour une variation du facteur : exemple si le delta est de 0,4 et

avec une variation du titre (S) de 2€, l'option variera de 0,80€ (= 0,4 * 2)

EDP du CALL de BS

Le produit en algèbre d'Itô très simplifié

X	dt	dZ
dt	0	0
dZ	0	dt

$$dS = \mu S dt + \sigma S dZ$$

$$C \equiv C(S,t,T) \quad \text{avec} \quad C(S,T,T) = Max\left(S_T - E;0\right)$$

$$dC = \frac{\partial C}{\partial S}dS + \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}dS^2 = C_S\left(\mu S dt + \sigma S dZ\right) + C_t dt + \frac{1}{2}C_{SS}\left(\mu S dt + \sigma S dZ\right)^2$$

$$dC = \left(C_S \mu S + C_t + \frac{\sigma^2}{2}C_{SS}S^2\right)dt + \left(C_S \sigma S\right)dZ$$

On constitue un portefeuille Q avec une quantité C_S de sous-jacent (S) et la vente d'un Call (C)

$$Q = C_S S - C \quad \text{et on sait que} \quad E(dQ) = rQdt$$

$$dQ = d(C_S S - C) = C_S dS - dC = C_S\left(\mu S dt + \sigma S dZ\right) - \left(C_S \mu S + C_t + \frac{\sigma^2}{2}C_{SS}S^2\right)dt + \left(C_S \sigma S\right)dZ$$

$$dQ = \left(C_S \mu S - C_S \mu S - C_t - \frac{\sigma^2}{2}C_{SS}S^2\right)dt + \left(C_S \sigma S - C_S \sigma S\right)dZ = -\left(C_t + \frac{\sigma^2}{2}C_{SS}S^2\right)dt$$

$$-\left(C_t + \frac{\sigma^2}{2}S^2 C_{SS}\right)dt = rQdt = r\left(C_S S - C\right)dt$$

$$\text{EDP} \qquad \frac{\sigma^2}{2}S^2 C_{SS} + rSC_S + C_t - rC = 0$$

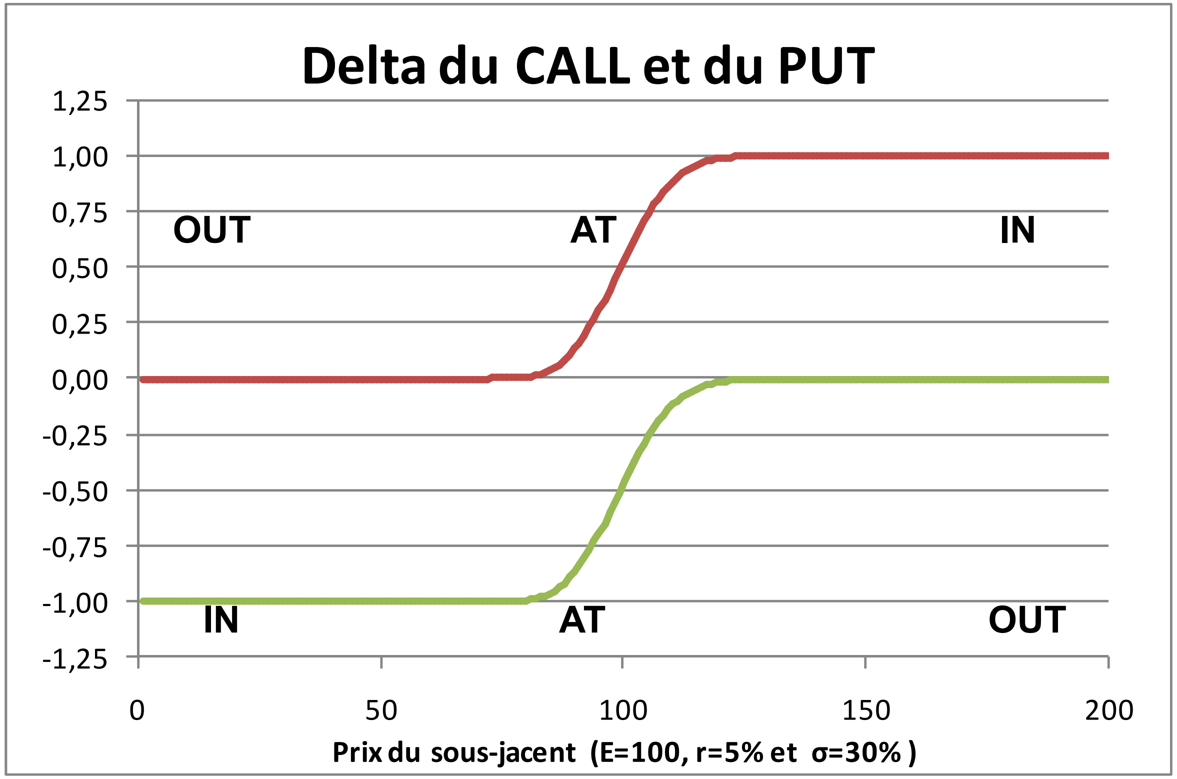
Remarque : **µ** n'intervient pas dans l'EDP

Le DELTA

Il mesure une variation de l'option pour une variation du sous-jacent notation Δ

$$\Delta_{CALL} = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1)$$

$$\Delta_{PUT} = \frac{\partial P}{\partial S} = -\left(1 - N(d_1)\right) = N(d_1) - 1$$



$\Delta \rightarrow 0$ peu d'impact du sous-jacent
OUT sur la prime de l'option

$\Delta \rightarrow \pm 1$ l'impact du sous-jacent est
IN répercuté en totalité

Quand S=E [AT] , $\Delta > ½$
$d_1 > 0,5$

$\Delta > 0 \Rightarrow$ stratégie haussière

$\Delta < 0 \Rightarrow$ stratégie baissière

$\Delta = 0 \Rightarrow$ stratégie insensible à la variation du sous-jacent

<u>Delta du sous-jacent</u> :

+1 pour un achat

- 1 pour une vente

Le DELTA

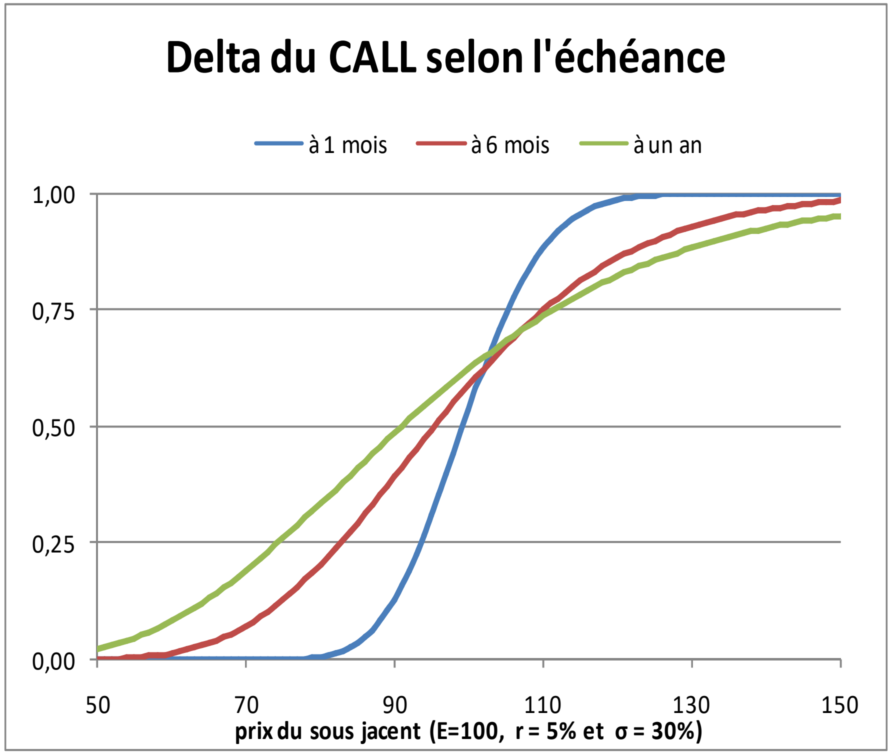
Remarques

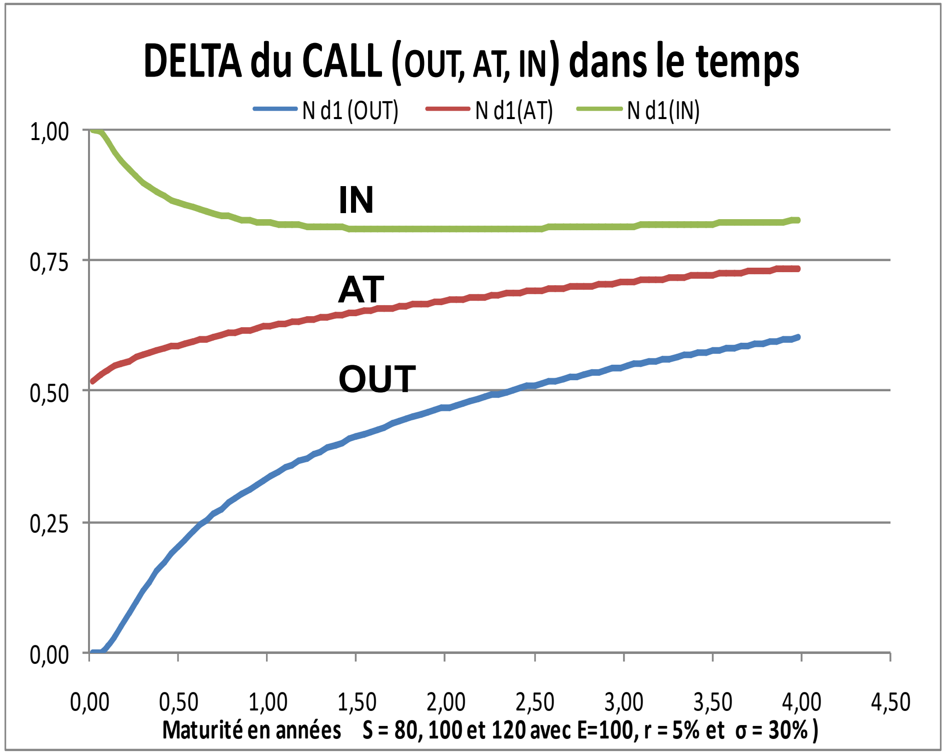
- ACHAT de CALL ➔ $\Delta > 0$
- VENTE de CALL ➔ $\Delta < 0$
- ACHAT de PUT ➔ $\Delta < 0$
- VENTE de PUT ➔ $\Delta > 0$

Le Delta d'un portefeuille est additif

$$\Delta_Q = \sum_{j=1}^{n} n_j \Delta_j$$

avec n_j le nombre d'options de type j





La sensibilité devient plus forte quand $\tau \to 0$

Portefeuille en DELTA neutre : en instantané

C'est très simple !

Soit un portefeuille initial Q comprenant :

x sous-jacents achetés ou vendus
y options détenues ou vendues

$$Q = xS + yW$$
$$\Delta Q = x.1 + y\Delta W$$

Pour avoir un portefeuille Delta Neutre, il faut acheter des titres si $\Delta Q < 0$ et réciproquement vendre du sous-jacent si $\Delta Q > 0$ (rappel $\Delta S = 1$)

Exemple : S = 100 E = 103 r = 5% σ = 30% τ = 0,20 C = 4,471€ et Δ_C = 0,469

Portefeuille initial = 20 titres achetés et 150 Call vendus → x = + 20 et y = - 150

Q = 20* 100€ - 150* 4,471€ = 2 000 – 670,62 = 1 329,38€
ΔQ = 20*1 – 150*0,469 = - 50,35 *traduit une anticipation de baisse du cours*

Portefeuille en Delta Neutre : il suffit d'acheter 50,35 titres → x=70,35 et y = -150
Q = 1 329,38€ + 50,35*100 = 6 358,91€
ΔQ = 70,35*1 – 150*0,469 = 0 *portefeuille insensible aux variations du titre*

Une gestion en delta neutre peut s'apparenter à un pari sur une variation de volatilité

Principe de la gestion en DELTA neutre (1/3)

en $t = 0$, constitution d'un portefeuille d'arbitrage en delta neutre suite à la vente d'un Call Warrant par la banque à une entreprise $Q = \Delta S - C$

$0 < t < T$ révision du portefeuille à chaque date avec achat ou vente de titres (périodicité de révision selon l'horizon de gestion)

en $t = T$, si $S_T > E$ (***IN THE MONEY***) le CALL est exercé et les titres sont livrés au prix E
si $S_T < E$ (***OUT OF THE MONEY***), comme le Delta est proche de zéro, la banque ne détient quasiment plus de titres.

<u>Exemple</u> : la Banque vend un Call Warrant sur un sous-jacent de 1 000 titres
échéance 3 mois, prime = 29 000€
$S = 540€$ $E = 550€$ $r = 5\%$ $\sigma = 25\%$ $\tau = 0,25$ (3 mois /12)

en $t = 0$ Prix du Call = 25,436€ avec d1 = 0,0157 et $\Delta = 0,506$

la banque doit acheter $\Delta = 0,506*1\,000 = 506$ titres à 540€ → 273 240€
qu'elle finance avec un emprunt à 5%/ an pendant un mois

Intérêts à payer à la fin du mois $273240\left[e^{5\%.\frac{1}{12}}-1\right]=1141€$

Principe de la gestion en DELTA neutre (2/3)

t = 1 Hyp. Le sous-jacent (S) passe à 520€, les autres paramètres ne varient pas
E = 550€, r = 5% σ = 25% τ = 0,17 (2 mois /12)
➔ Prix du Call = 11,29€ et Δ = 0,338

Nombre de titres nécessaires : 0,338 * 1 000 = 338
il faut donc revendre 506 – 338 = 168 titres

Incidence sur la trésorerie :

- 273 240	remboursement de l'emprunt
- 1 141	paiements des intérêts
+ 87 360	vente de 168 titres à 520€
=============	
- 187 021	à emprunter

Intérêts dus
781 = 187021*[exp(5%/12)-1]

t = 2 Hyp. Le sous-jacent (S) passe à 580€, E = 550€, r = 5% σ = 25% τ = 0,08
➔ Prix du Call = 37,23€ et Δ = 0,797

Titres nécessaires : 0,797 * 1 000 = 797 → 338 – 797 = 459 titres à acheter

Incidence sur la trésorerie :

- 187 021	remboursement de l'emprunt
- 781	paiements des intérêts
- 266 220	achat de 459 titres à 580€
=============	
- 454 022	à emprunter

Intérêts dus = 1 896
= 454022*[exp(5%/12)-1]

Principe de la gestion en DELTA neutre (3/3)

t = 3 Hyp. Le sous-jacent (S) passe à 600€, le Call warrant est à l'échéance
➔ le Call finit dans la monnaie, il est exercé par le client

Titres à livrer : 1 000 → 1 000 – 797 = 203 titres à acheter

Incidence sur la trésorerie :	- 454 022	remboursement de l'emprunt
	- 1 896	paiements des intérêts
	- 121 800	achat de 203 titres à 600€
	+ 550 000	livraison des 1 000 titres à 550€
	============	
	- 27 717	mais la banque à encaisser la prime de 29 000€ en t=0

Avec une révision plus fréquente, la couverture est de meilleure qualité

La stratégie en delta (ajuster le nombre de titres détenus) est préférable à :

- ne rien faire (risque de perte élevée si le sous-jacent augmente)
- adosser la position en achetant en t=0 les 1 000 titres (perte si baisse du cours)
- Stop-Loss (acheter les 1 000 titres si le cours devient > à E, sinon vendre)
  synthèse des 2 stratégies précédentes mais frais de transaction élevés

Le Delta est une mesure très sensible d'où l'utilité d'introduire la convexité

Calcul du DELTA et du GAMMA avec le modèle de B-S

Calcul du DELTA

$$C = SN(d_1) - Ee^{-r\tau}N(d_2) \quad \text{avec} \quad d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad \text{et} \quad N(d) = \int_{-\infty}^{d} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \quad \Rightarrow \quad d_2^2 = \left(d_1 - \sigma\sqrt{\tau}\right)^2 = d_1^2 + \sigma^2\tau - 2d_1\sigma\sqrt{\tau}$$

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) + S\left\{f(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S}\right\} - Ee^{-r\tau}\left\{f(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S}\right\} = N(d_1) + S\left\{\frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}}\right\} - Ee^{-r\tau}\left\{\frac{e^{-\frac{d_2^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}}\right\}$$

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) + \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{\tau}}\left\{1 - \frac{Ee^{-r\tau}}{S}e^{\left(-\frac{\sigma^2\tau}{2} + \frac{2d_1\sigma\sqrt{\tau}}{2}\right)}\right\} = N(d_1) + \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{\tau}}\left\{1 - \frac{Ee^{-r\tau}}{S}\frac{S}{Ee^{-r\tau}}e^{\left(-\frac{\sigma^2\tau}{2} + \frac{\sigma\sqrt{\tau}\frac{\sigma^2\tau}{2}}{\sigma\sqrt{\tau}}\right)}\right\}$$

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \Delta_{CALL} = N(d_1) \quad \text{et pour le Put :} \quad P = Ee^{-r\tau}N(-d_2) - SN(-d_1) \rightarrow \frac{\partial P}{\partial S} = N(d_1) - 1 \rightarrow \Delta_{PUT} = N(d_1) - 1$$

Calcul du GAMMA

$$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = f(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{e^{-\frac{d_1^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}} \rightarrow \Gamma_{CALL} = \frac{f(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}} \quad \text{et} \quad \Gamma_{PUT} = \frac{f(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}} = \Gamma_{CALL}$$

Interprétation de la valeur du Call

Prix du CALL = Achat de sous jacent financé par emprunt

= Qté $N(d_1)$ * Sous Jacent - $Ke^{-r\tau}.N(d_2)$

$N(d_1)$ est le delta du Call et
$N(d_2)$ la probabilité (risque neutre) d'exercice de l'option

Coefficients d_1 et d_2

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + (r - d + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{\ln\left(\frac{Se^{-d\tau}}{Ee^{-r\tau}}\right)}{\sigma\sqrt{\tau}} + \frac{\sigma}{2}\sqrt{\tau}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} = \frac{\ln\left(\frac{Se^{-d\tau}}{Ee^{-r\tau}}\right)}{\sigma\sqrt{\tau}} - \frac{\sigma}{2}\sqrt{\tau}$$

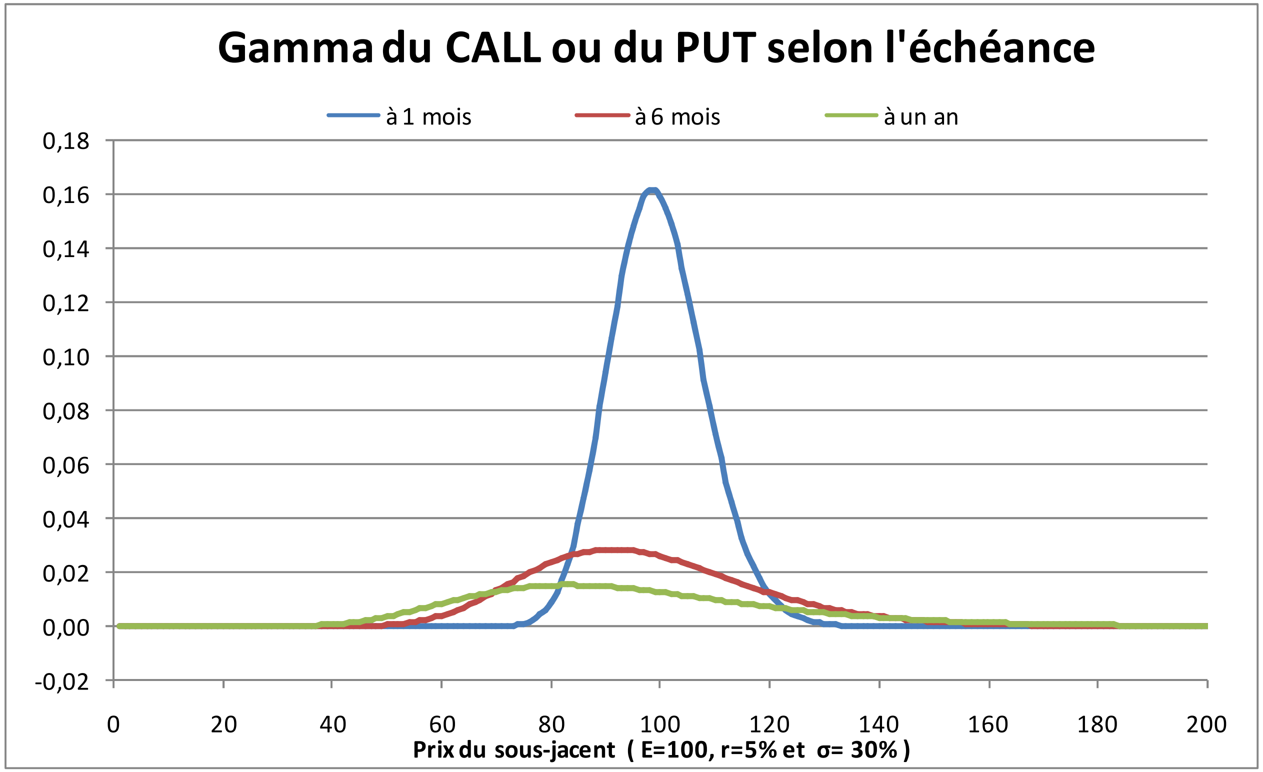
Les coefficients dépendent de la *moneyness* et de la volatilité ajustée à la durée

Le GAMMA : présentation

Il mesure la sensibilité du delta aux variations du sous-jacent : notation Γ

$$\Gamma_{CALL} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{f(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}} \quad \text{et} \quad \Gamma_{PUT} = \Gamma_{CALL}$$

Le Gamma est toujours positif



Pour Call & Put :

- ACHAT ➔ $\Gamma > 0$
- VENTE ➔ $\Gamma < 0$

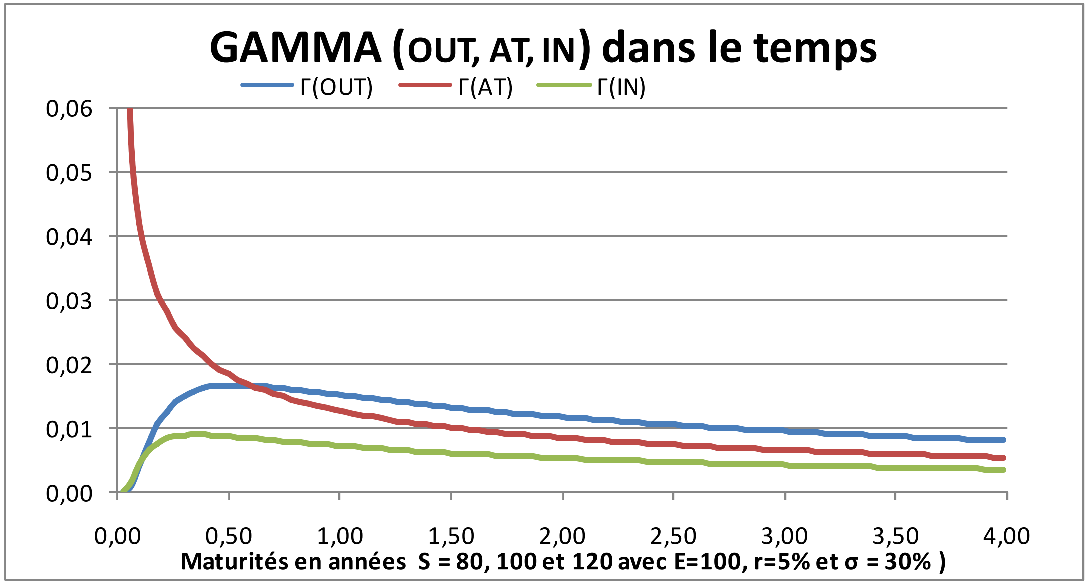
Pour un titre $\Gamma = 0$

Pour un portefeuille, le gamma est additif

$$\Gamma_Q = \sum_{j=1}^{n} n_j \Gamma_j$$

Quand $\tau \to 0$, le Γ est plus élevé (instabilité de la position), le sommet tend vers S/E

Le GAMMA : analyse

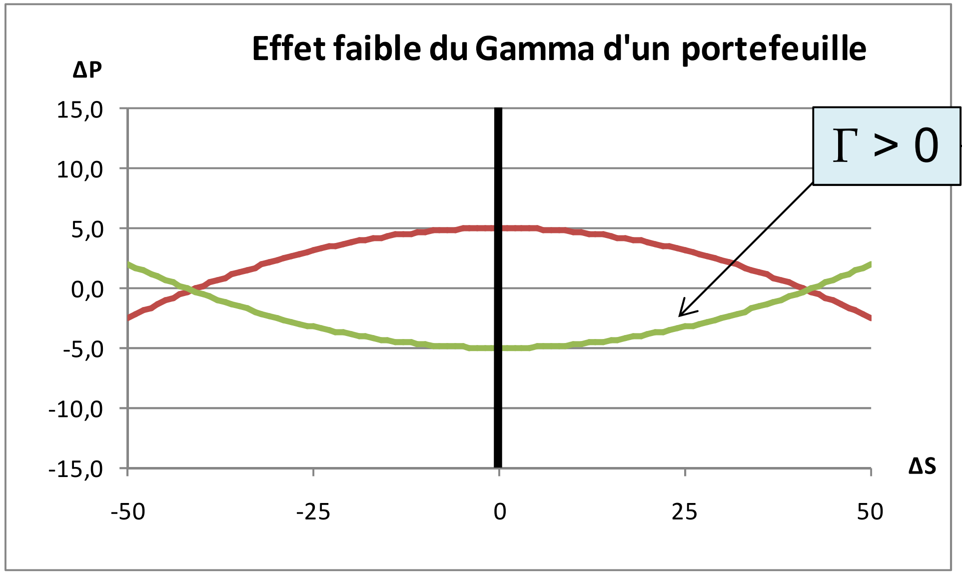


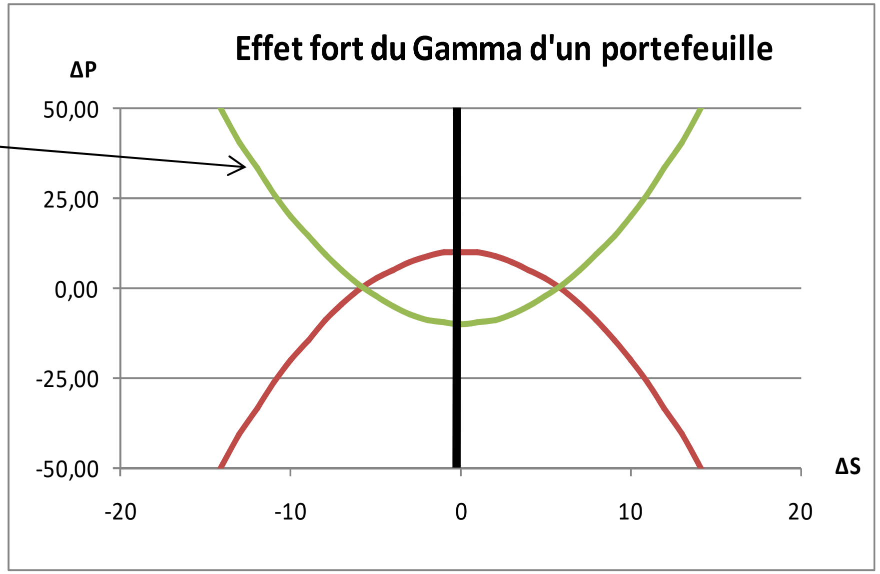
Le gamma à la monnaie est très sensible.

Le gamma '*In the Money*' affecte peu l'option

L'effet gamma s'atténue avec le temps

$\Gamma > 0$ → achat d'option
$\Gamma < 0$ → vente d'option





La construction du portefeuille en terme de gamma influence sa fréquence de révision

Portefeuille en DELTA neutre et GAMMA neutre : en instantané

C'est très simple !

Environnement : un sous-jacent (S) et 2 options (O_1 et O_2)

un Portefeuille (Q) comportant seulement y options O_1

					O_1	O_2
<u>Procédure</u> :					O_1	O_2
Situation initiale :	$Q = y.O_1$	avec $\Delta_Q = y.\ \Delta_1$	et	$\Gamma_Q = y\ \Gamma_1$	Δ_1	Δ_2
Objectif :	$Q' = x.S + y.\ O_1 + z.\ O_2$ avec $\Delta_{Q'} = 0$		et	$\Gamma_{Q'} = 0$	Γ_1	Γ_2

$\Gamma_{Q'} = 0 \;\Rightarrow\; \Gamma_Q + z.\ \Gamma_2 = 0 \;\Rightarrow\; z = -\ \Gamma_Q / \Gamma_2$

$\Delta_{Q'} = 0 \;\Rightarrow\; x.1 + \Delta_Q + z\ .\ \Delta_2 = 0 \;\Rightarrow\; x = -\ [\Delta_Q + z\ .\ \Delta_2] = -\ [\Delta_Q + (-\ \Gamma_Q / \Gamma_2).\Delta_2]$

$$\mathbf{Q' = -\ [\Delta_Q + (-\ \Gamma_Q / \Gamma_2).\Delta_2].S + y.O_1 - (\Gamma_Q / \Gamma_2).O_2 \text{ avec } \Delta_{Q'} = 0 \text{ et } \Gamma_{Q'} = 0}$$

<u>Exemple</u> : $Q = y.\ O_1$ avec , $\Delta_Q = 30$ et $\Gamma_Q = -\ 10$ option N°2 : $\Delta_2 = 0{,}6$ et $\Gamma_2 = 0{,}4$

$z = -\ [\ -10/\ 0{,}4\ ] = 25$ et $x = -\ [\ 30 + (\ 25\ .\ 0{,}6\ )\ ] = -\ 45$

Bilan : $Q' = -\ 45\ S + y\ O_1 + 25\ O_2$

$\Delta_{Q'} = -\ 45\ .\ 1 + 30 + 25\ .\ 0{,}6 = 0$

$\Gamma_{Q'} = -\ 45\ .\ 0\ -\ 10 + 25\ .\ 0{,}4 = 0$

On traite d'abord le Gamma puis on neutralise le Delta

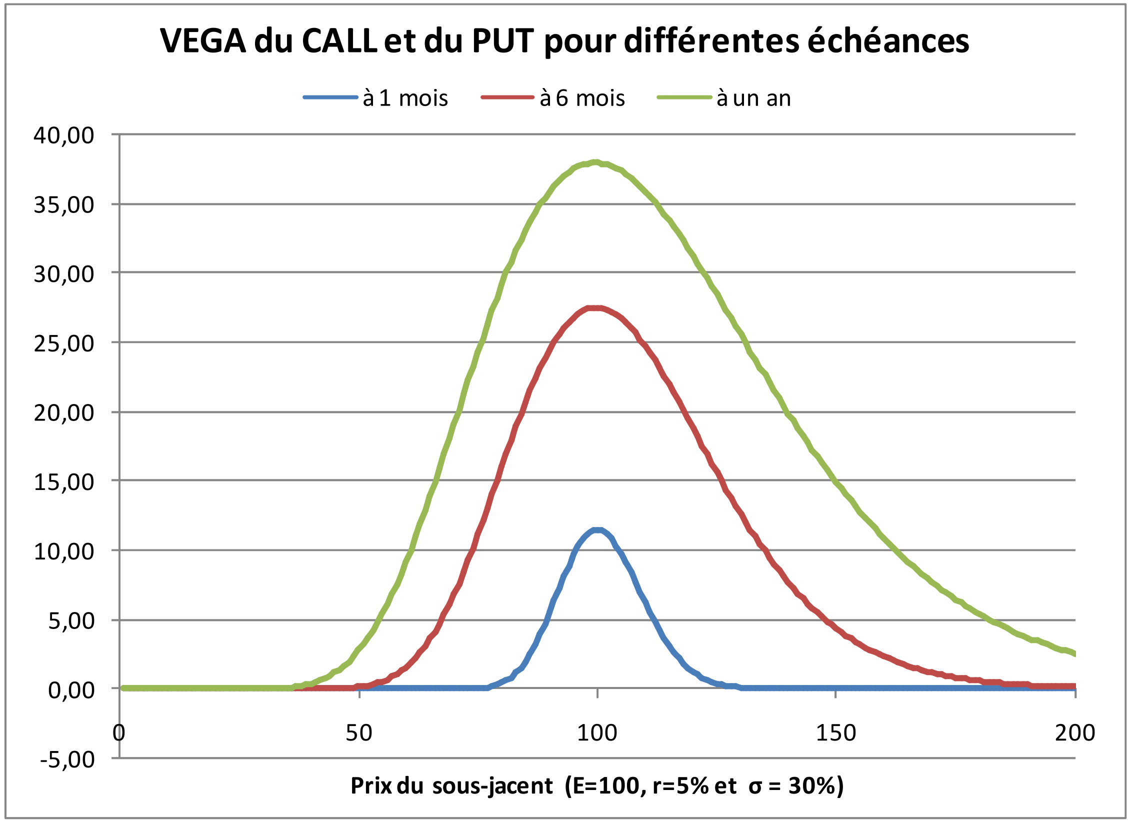
le portefeuille en delta-gamma neutre peut être coûteux à construire

Le VEGA : présentation

Il mesure la sensibilité de l'option aux changement de volatilité : notation V (nu)

$$V = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S\sqrt{\tau}\, f(d_1)$$

Le Vega est toujours positif
Vega(Call) = Vega(Put)
la vente d'une option donne un V <0



<u>Remarque</u> :

La volatilité observée ou implicite est une fonction du ratio S/E

Effet *Smile* de volatilité

<u>Exemple</u> :

Vega = 25 et $\Delta\sigma$ = +1% ➔

le prix de l'option augmente

de 25*1% = 0,25€

Il est possible de rendre un portefeuille d'options 'Vega Neutre'

Le VEGA : remarque

Volatilité implicite :

Il est usuel d'extraire la volatilité de l'actif sous jacent à partir des options

La formule de Black-Scholes et la connaissance des paramètres S, E, τ, r et C

permettent d'extraire, par recherche dichotomique la volatilité σ

Smile de volatilité :

Empiriquement, on observe une décroissance de la volatilité implicite en relation avec la *moneyness* pour les sous jacents de type :

- action, la volatilité diminue quand E augmente (S/E diminue)
- devise, la volatilité augmente quand | S/E -1 | augmente

La volatilité implicite dépend aussi de l'échéance (structure par terme de la volat)

Exemple du bruit introduit par la mesure asynchrone du sous jacent S

S = 4 013 E = 4 000 T = 0,047 r = 0,40% C = 73,096 ➔ σ = 19,26%

si S =4 011 → σ = 19,57% et si S =4 015 → σ = 18,94% ΔS = 0 05% ➔ $\Delta\,\sigma$ = 0,31%

Portefeuille en VEGA neutre, DELTA neutre et GAMMA neutre: en instantané

Soit un portefeuille comportant des titres et 2 options :

Portefeuille	Option 1	Option 2
$\Delta_Q = 0$	$\Delta_1 = 0,6$	$\Delta_2 = 0,5$
$\Gamma_Q = -5000$	$\Gamma_1 = 0,5$	$\Gamma_2 = 0,8$
$V_Q = -8000$	$V_1 = 2,0$	$V_2 = 1,2$

Ne pas oublier que le modèle de BS suppose la volatilité constante …

$$\Gamma_{Q'} = -5000 + 0,5O_1 + 0,8O_2 = 0$$

$$V_{Q'} = -8000 + 2,0O_1 + 1,2O_2 = 0$$

Solution du système : $O_1 = 400$ et $O_2 = 6000$

$$\Delta_{Q'} = -3240 + 400.0,6 + 6000.0,5 = 0$$

$$Q' = -3240.S + 400.O_1 + 6000.O_2$$

Il est difficile de maintenir un portefeuille en Δ, Γ et V neutres

Portefeuille traditionnel tel que la position est :

gamma positive (sensible aux grands mouvements de marché) et
véga négative, qui consiste à acheter des options courtes et à vendre des longues.

Le THETA : présentation

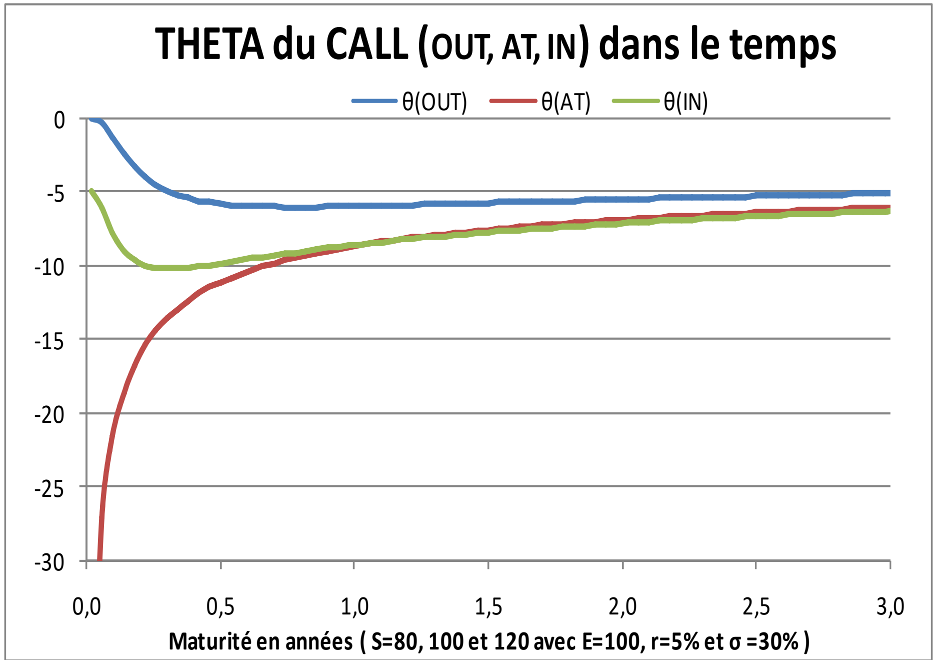
Il mesure la sensibilité de l'option à l'écoulement du temps : notation θ

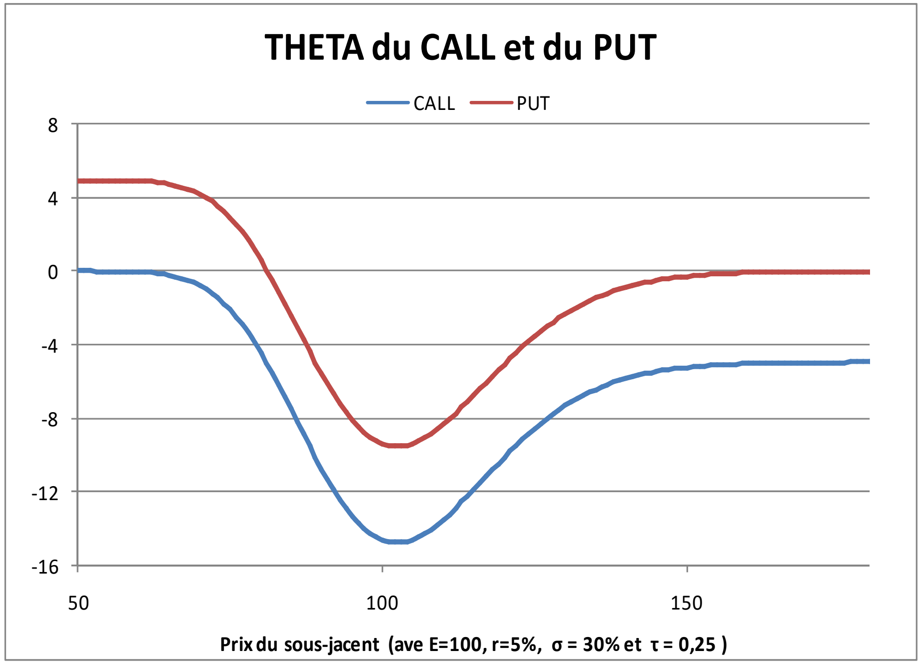
$$\theta_{CALL} = \frac{\partial C}{\partial \tau} = -\frac{S\sigma}{2\sqrt{\tau}} f(d_1) - Ee^{-r\tau} rN(d_2) \quad < 0$$

$$\theta_{PUT} = \frac{\partial P}{\partial \tau} = -\frac{S\sigma}{2\sqrt{\tau}} f(d_1) + Ee^{-r\tau} rN(-d_2) \quad < 0$$

Le Thêta augmente quand τ diminue car il y a réduction de la valeur temps

θ > 0 est une stratégie gagnante avec l'écoulement du temps





Le θ s'exprime souvent pour un jour de *trading*

Le RHO : présentation

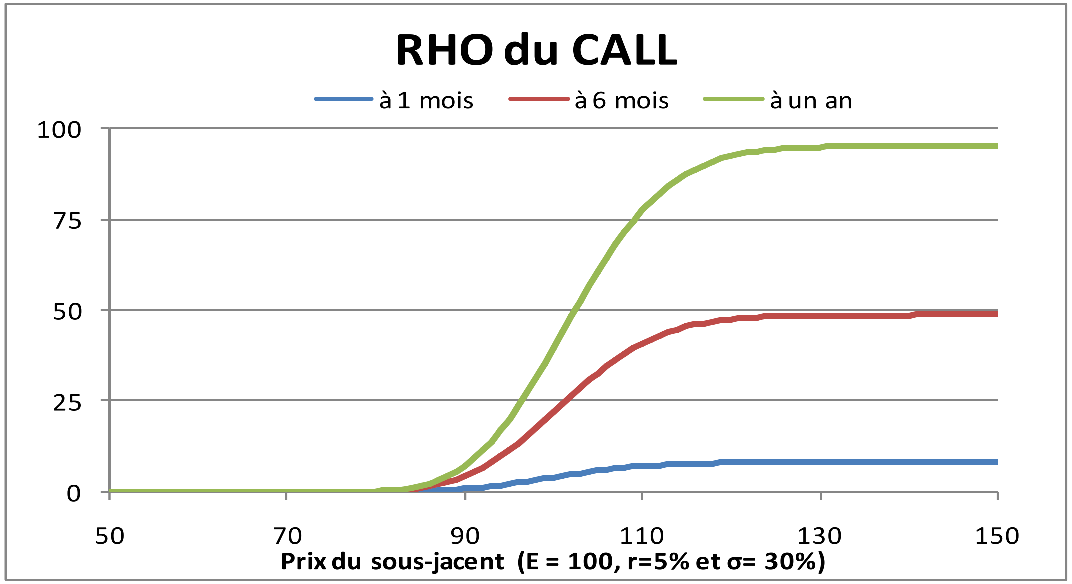
Il mesure la sensibilité de l'option aux variations du taux d'intérêt : notation ρ

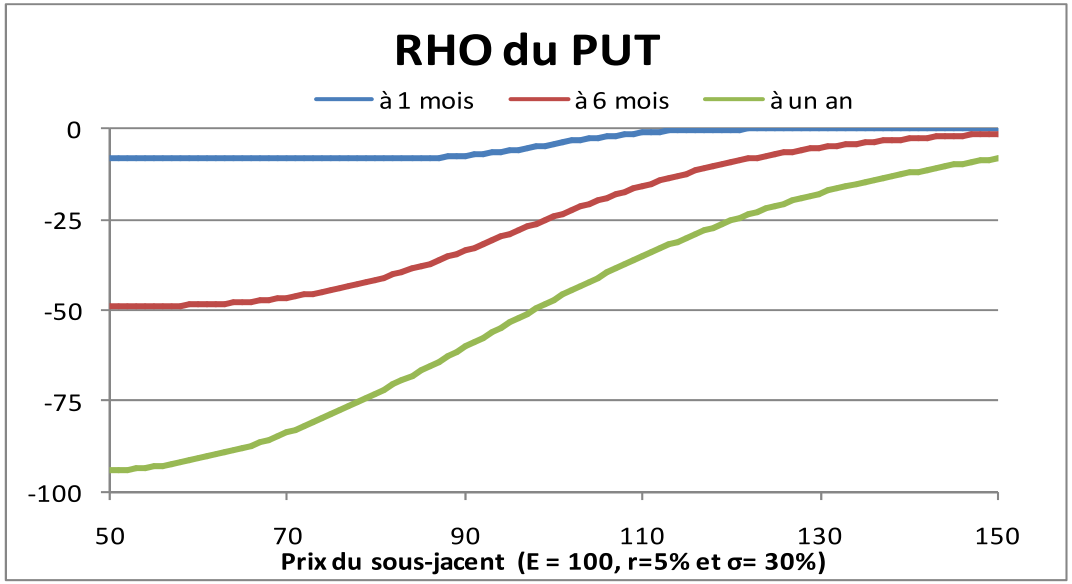
$$\rho_{CALL} = \frac{\partial C}{\partial r} = Ee^{-r\tau}\tau N(d_2) \ >0$$

$$\rho_{PUT} = \frac{\partial P}{\partial r} = -Ee^{-r\tau}\tau N(-d_2) < 0$$

Le Rhô augmente quand τ diminue car il y a réduction de la valeur temps

C'est un outil peu utilisé par les gérants de portefeuille d'options sur le court terme





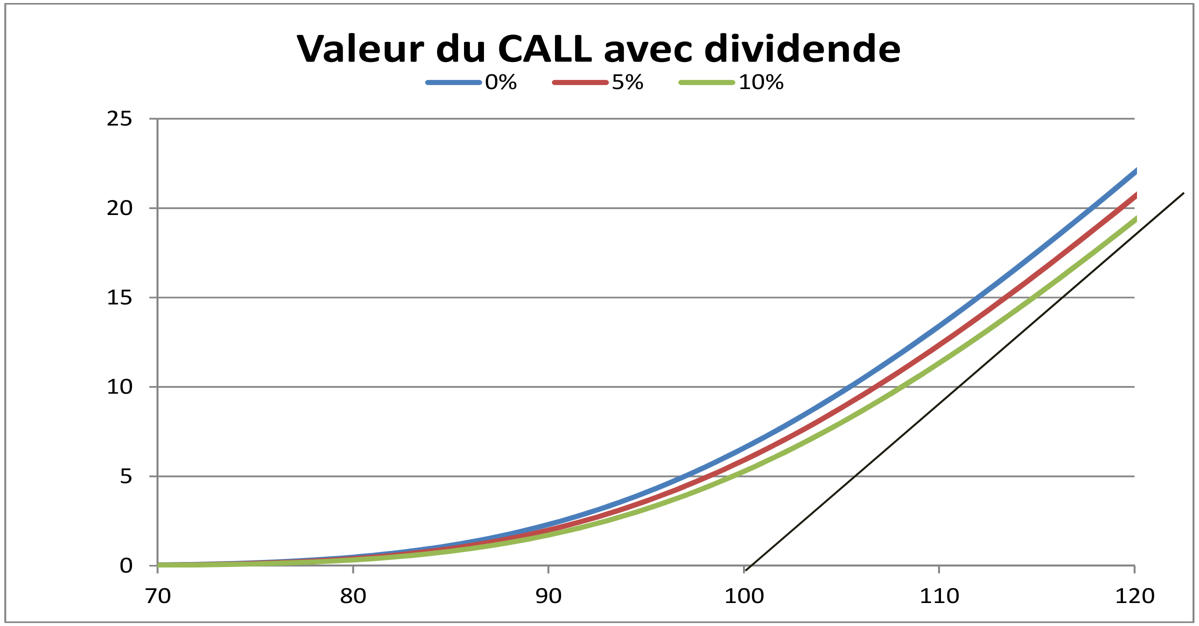
EVALUATION d'OPTION avec le modèle de BS avec dividende (Merton 73)

Dans un univers risque-neutre, le taux de dividende peut être perçu comme modifiant le taux d'intérêt sans risque utilisé précédemment.

$$dS = (r-d)Sdt + \sigma S dZ \qquad \text{avec} \quad \text{d le taux de dividende continu}$$

$$C = Se^{-d\tau}N(d_1') - Ee^{-r\tau}N(d_2') \quad \text{et} \quad P = Ee^{-r\tau}N(-d_2') - Se^{-d\tau}N(-d_1')$$

$$d_1' = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r - d + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad \text{et} \quad d_2' = d_1' - \sigma\sqrt{\tau}$$



La valeur du Call diminue en raison du versement du dividende

Avec le modèle CRR, la probabilité p devient :

$$p = \frac{e^{(r-d)\Delta t} - d}{u - d}$$

EVALUATION d'OPTION avec dividende : adaptation des 'Grecs'

$$P = C - Se^{-d\tau} + Ee^{-r\tau}$$ Relation de parité Call-Put

$$d_1' = \frac{\ln(S/E) + (r - d + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad \text{et} \quad d_2' = d_1' - \sigma\sqrt{\tau}$$

$$\Delta_{CALL} = e^{-d\tau} N(d_1') \qquad \Delta_{PUT} = e^{-d\tau}\left[N(d_1') - 1\right]$$

$$\Gamma_{CALL} = \frac{e^{-d\tau} f(d_1')}{S\sigma\sqrt{\tau}} = \Gamma_{PUT}$$

$$V_{CALL} = S\sqrt{\tau}e^{-d\tau} f(d_1') = V_{PUT}$$

$$\theta_{CALL} = -\frac{S\sigma e^{-d\tau} f(d_1')}{2\sqrt{\tau}} - rEe^{-r\tau}N(d_2') + d\, Se^{-d\tau}N(d_1')$$

$$\theta_{PUT} = -\frac{S\sigma e^{-d\tau} f(d_1')}{2\sqrt{\tau}} + rEe^{-r\tau}N(-d_2') - d\, Se^{-d\tau}N(-d_1')$$

$$\rho_{CALL} = E\tau e^{-r\tau}N(d_2') \qquad \rho_{PUT} = -E\tau e^{-r\tau}N(-d_2')$$

d représente le taux de dividende continu

En posant d=0, on retrouve les résultats antérieurs

EVALUATION d'OPTION sur FUTURES avec le modèle de Fisher BLACK 76

Le contrat Futures est en général plus liquide que le contrat spot d'où plus d'efficience

$$F = Se^{r\tau} \rightarrow S = Fe^{-r\tau}$$

$$C = e^{-r\tau}\left[FN(d_1) - EN(d_2)\right]$$

$$P = e^{-r\tau}\left[EN(-d_2) - FN(-d_1)\right]$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{E}\right) + \frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

<u>Preuve</u>

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{\ln\left(\frac{Fe^{-r\tau}}{Ee^{-r\tau}}\right) + \frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{\ln\left(\frac{F}{E}\right) + \frac{\sigma^2}{2}\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$C = SN(d_1) - Ee^{-r\tau}N(d_2) = Fe^{-r\tau}N(d_1) - Ee^{-r\tau}N(d_2)$$

$$C = e^{-r\tau}\left[FN(d_1) - EN(d_2)\right]$$

L'option sur Futures aura un prix supérieur à l'option sur Spot si F > S pour un même E

Très souvent, l'option sur Futures est dénouée en cash (ou revendue avant l'échéance)

Options et Futures sont souvent négociés sur le même marché → gestion simplifiée

EVALUATION d’OPTION sur TAUX D’INTERET avec le modèle de Black (76)

Protection contre une hausse des taux (cas de l’emprunteur) → CAP
Option d’achat sur taux (*caplets*) *taux plafond*

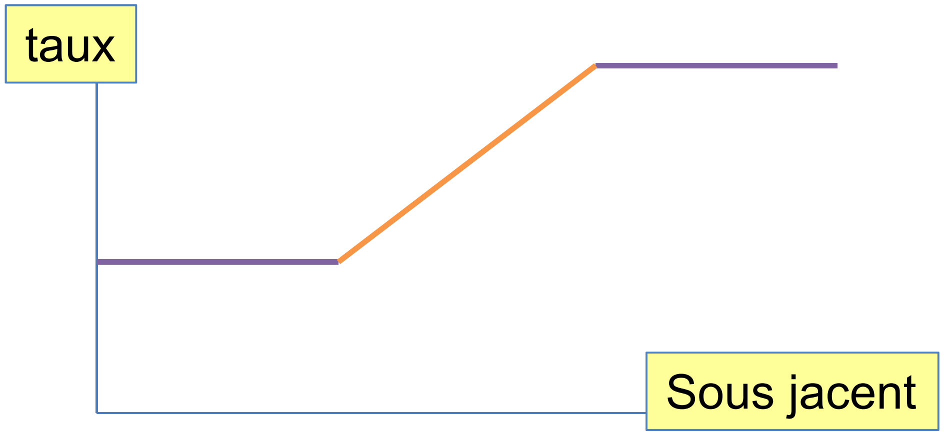
Protection contre une baisse des taux (cas du prêteur) → FLOOR
Option de vente sur taux (*floorlets*) *taux plancher*

Protection contre les variations de taux → COLLAR *tunnel*
Collar = achat de Cap + vente de Floor

$$C_0 = V_0(ZC_\tau)\left[F_{0,\tau}N(d_1) - EN(d_2)\right]$$

$$P_0 = V_0(ZC_\tau)\left[EN(-d_2) - F_{0,\tau}N(-d_1)\right]$$

F → prix à terme de l’obligation
E → prix d’exercice
V → prix spot d’un Zéro Coupon



Swap = Cap – Floor
avec même strike

EVALUATION d'OPTION sur CHANGE avec le modèle de Garman-Kohlhagen 83

Le change spot S (= EUR/USD €-$) sert de support au contrat d'option avec pour diffusion

$$dS = \left(r_{€} - r_{\$}\right) Sdt + \sigma SdZ \quad \text{avec } r_{€} \text{ et } r_{\$} \text{ des taux annuels sur l'horizon T}$$

$$C = Se^{-r_{\$}\tau} N(d_1) - Ee^{-r_{€}\tau} N(d_2)$$

$$P = Ee^{-r_{€}\tau} N(-d_2) - Se^{-r_{\$}\tau} N(-d_1)$$

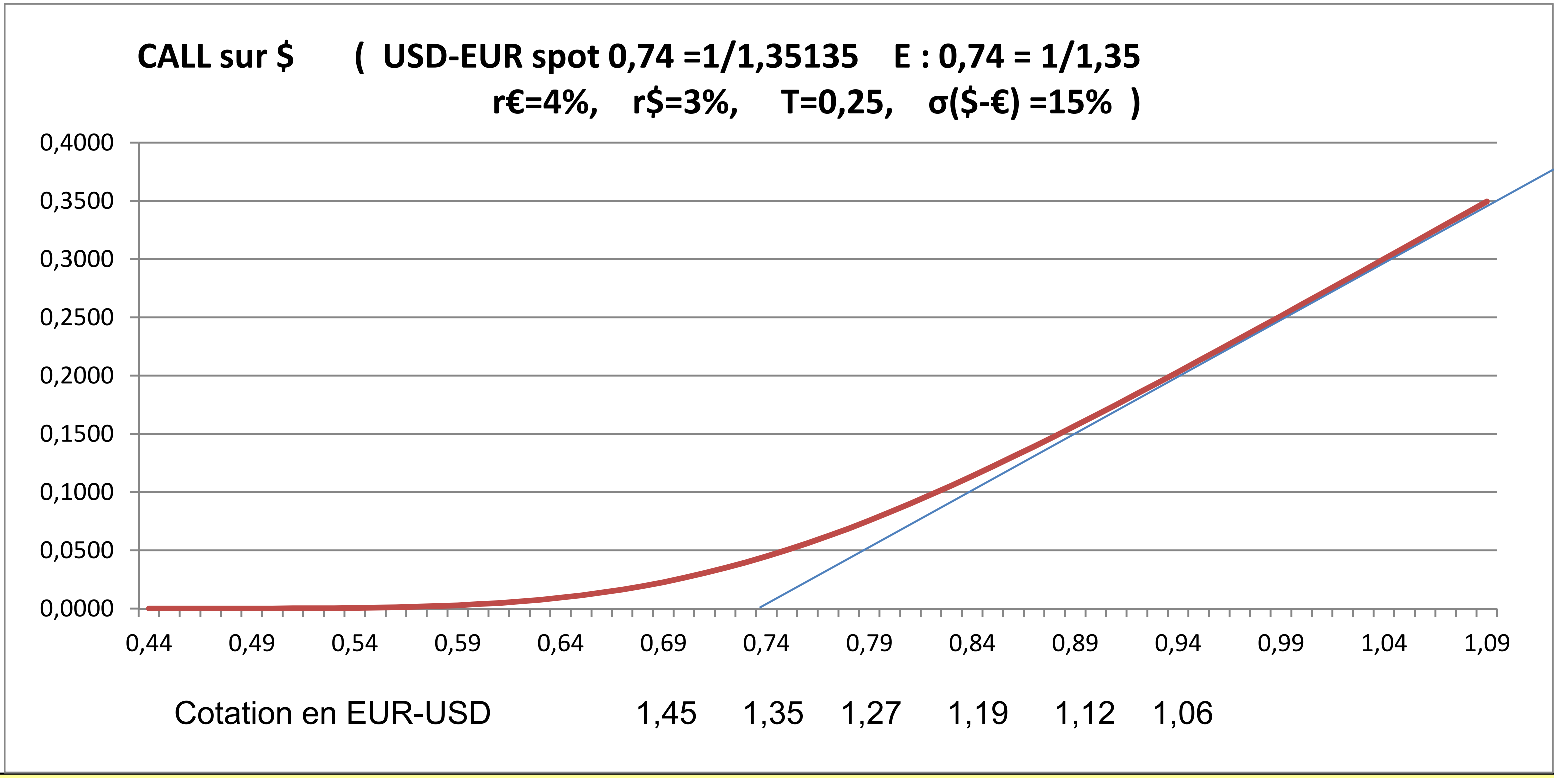
$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r_{€} - r_{\$} + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

Remarque : **CALL (€-$)= PUT ($-€)**

Un CALL permet l'achat de la devise $ et un PUT permet de vendre la devise €

Le taux $r_{\$}$ s'apparente à un taux de dividende (c'est ce que reçoit le détenteur de la devise)

<u>Remarque</u> :
En zone €, S et E expriment le change USD-EUR , σ la volatilité du change $-€
en le multipliant par le change, la prime est donnée en $
En zone $, on utilise S et E cotés en EUR-USD, σ la volatilité du change €-$.



<u>Exemple</u> : EUR/USD en spot = 1,35135 → USD-EUR = 0,7400

avec : E = 0,74 $r_€$ = 4% $r_\$$ = 3% τ = 0,25 et σ =30% (EUR-USD)

contrat portant sur 100 000$ (ou 74 000€)

Valeur du CALL (pour du $) = 0,04478€ [coût pour avoir le droit d'acheter un $]

soit 6,051% du nominal en $ (= 0,04478 / 0,74 en $)

Valeur du PUT (pour du $) : 5,803% du nominal en $.

Avec S = E et $\sigma_{(EUR-USD)} = \sigma_{(EUR-USD)}$, CALL (dev)* Spot = PUT(monnaie)/Spot

quand S ≠ E, la relation est vérifiée mais avec un *smile* de volatilité

Détail du calcul d'options sur change

Change EUR-USD spot = 1,35135 Nominal = 100 000$ (soit 74 000€)

Option : Strike$_{\$-€}$ = 0,7400 $r_€$ = 4% $r_\$$ = 3% τ = 0,25 $σ_{\$€}$ = 30%

Valeur d'un CALL et d'un PUT ?

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{E}\right) + \left(r_€ - r_\$ + \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{\ln\left(\frac{0,74}{0,74}\right) + \left(4\% - 3\% + \frac{0,30^2}{2}\right)0,25}{0,30\sqrt{0,25}} = 0,09166667$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} = 0,9166667 - 0,30\sqrt{0,25} = -0,058333$$

$$f(d_1) = 0,3973 \quad N(d_1) = 0,5365 \quad f(d_2) = 0,3983 \quad N(d_2) = 0,4767$$

$$Call = Se^{-r_\$\tau}N(d_1) - Ee^{-r_€\tau}N(d_2) = 0,74.e^{-3\%*0,25}.0,5365 - 0,74e^{-4\%*0,25}0,4767 = 0,0447787$$

Valeur du CALL (pour du \$) $= 0,04478€$ [coût pour avoir le droit d'acheter un \$]

soit 6,051% du nominal en \$ (= 0,04478 / 0,74 en \$)

4 478€ (ou 6 051$) à payer pour un Call de 100 000$ (ou de 74 000€)
ou encore à payer pour un Put (droit de vendre 74 000€)

Détail du calcul d'options sur change : les Greeks

$$\Delta_{Call} = e^{-r_{\$}\tau} N(d_1) = e^{-3\%*0,25}.0,5365 = 0,5325$$

$$\Gamma_{Call} = \frac{e^{-r_{\$}\tau} f(d_1)}{S\sigma\sqrt{\tau}} = \frac{e^{-3\%*0,25}.0,3973}{0,74.0,30\sqrt{0,25}} = 3,5523$$

$$\mathrm{V}_{Call} = \mathrm{S}e^{-r_{\$}\tau}\sqrt{\tau} f(d_1) = 0,74.e^{-3\%*0,25}.\sqrt{0,25}.0,3973 = 0,1459$$

$$\theta_{Call} = -\frac{\mathrm{S}e^{-r_{\$}\tau}}{2\sqrt{\tau}} f(d_1) - r_{€} E e^{-r_{€}\tau} N(d_2) + r_{\$} E e^{-r_{\$}\tau} N(d_1) = -0,0897$$

Valeur du Put (droit de vendre 100 000$) = 0,04295€ ou encore 5,8% en $

$$Put = Call - Se^{-r_{\$}\tau} + Ee^{-r_{€}\tau} = 0,04478 - 0,74.e^{-4\%*0,25} + 0,74.e^{-3\%*0,25} = 0,04295$$

A partir du Call en $, il est possible d'extraire la volatilité implicite du change EUR-USD. On obtient $\sigma_{€\text{-}\$}$ = 22,024%

Courbes de volatilité avec le modèle de B-S

D'après le modèle de Black & Scholes, la volatilité σ est constante et la distribution des prix est lognormale
Dans la pratique, on observe des variations de volatilité selon le prix d'exercice et la maturité. De plus, le changement de prix connaît des sauts (*jumps*)

Pour une échéance donnée :
Smile de volatilité : (pour les options de change)
La volatilité est plus forte pour les options IN ou OUT (relation symétrique)
Skew de volatilité : (pour les options sur actions)
La volatilité est une fonction décroissante du prix d'exercice

Pour différentes échéances :
On observe une structure par le terme des volatilités :
$\sigma\uparrow$ avec τ quand la volatilité historique à court terme est faible (anticipation que S $\uparrow$)
$\sigma\downarrow$ avec τ quand la volatilité historique à court terme est élevée (anticipation que S $\downarrow$)

Modèles avec volatilité stochastique :

$$dS = \mu S dt + V^{\alpha} dZ_1 \quad \text{avec} \quad dV = k(\theta - V)dt + \sigma V^{\alpha} dZ_2 \quad \text{et} \quad dZ_1 dZ_2 = \rho dt$$

par exemple, Heston (93) a retenu α = 0,5

Les options exotiques ou de seconde génération

Sur les marchés OTC les *plain vanilla options* sont supplantées par :

Selon la période d'exercice retenue:
- A tout moment (options américaines)
- à certaines dates (options bermudiennes)
- sur certaines périodes (avec des prix d'exercice différents)
- uniquement à l'échéance (option européenne)

Selon le prix d'exercice:
- un montant fixe connu dès l'origine
- une moyenne de cours du sous-jacent (options asiatiques)
- un panier d'actifs sous-jacent

Selon le *payoff* promis :
- le sous-jacent au prix d'exercice convenu
- un revenu *cash* (options digitales ou binaires)
- conditionnellement au franchissement d'un seuil (options barrières)

Selon tout autre critère :
- paiement différé, prix d'exercice différé, packages
- choix différé entre Call et Put (*chooser option, compound option*)
- …

Le cas des options à barrière

La barrière **active** (IN) ou **désactive** (OUT) l'option

Le franchissement de la barrière peut être vers le **haut** (UP) ou vers le **bas** (DOWN)

L'option peut être un **CALL** ou un **PUT**

L'exercice peut être du type **Européen** ou **Américain**

Le paiement peut être le titre ou du cash

Les options à barrière peuvent être combinées

Gagné pour UP and IN	Perdu UP and OUT
Perdu pour UP IN & DOWN IN	Gagné UP OUT & DOWN OUT
Gagné pour DOWN IN	Perdu pour DOWN OUT

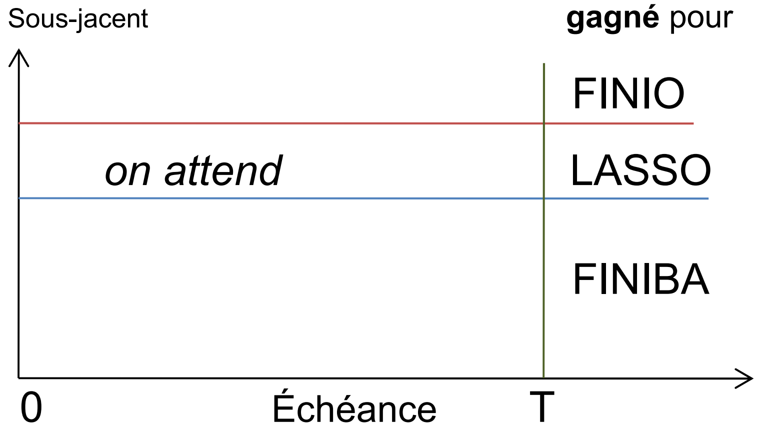
S

barrière activante *barrière désactivante*

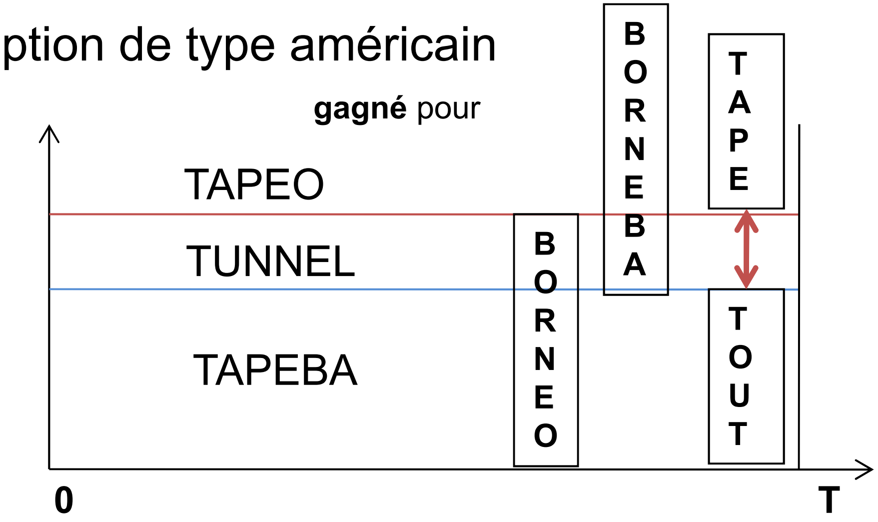
Produits proposés par les banques pour couvrir le risque de change (moins cher !)

Exemple des ex CLICK OPTIONS de la Société Générale

Option de type européen



Option de type américain



Mise en t=0 (<100€) et gain de 100€ payé à la date de déclenchement

Si jeu équitable → 1 Finio + 1 Lasso + 1 Finiba = 100€ !
À échéance égale, un Finio doit être moins cher qu'un Tapeo
Barrière activante (IN) → en UP (Finio, Tapeo) et en DOWN (Finiba, Tapeba) + Tapetout
Barrière désactivante (OUT) → en UP (Borneo), en DOWN (Borneba) + Lasso & Tunnel

Prix de 1 à 100€, gain 100€ échéances 1, 2, 4 et 6 semaines
Uniquement à l'achat (revente possible = prix – 4€) jusqu'en T- 1 jour
+ de 50 sous-jacents, nombreuses barrières possibles

Conclusion

Cadre général de la gestion du risque :

- Comprendre ce que l'on fait !
- Définir les limites des risques selon couverture, arbitrage et spéculation
- Faire respecter les limites fixées (même en cas de profit)
- Rester convaincu que l'on ne peut pas battre le marché (longtemps)
- Matcher le *mark to model* avec le *mark to market* !

Cadre opérationnel de la gestion du risque :

- Surveiller étroitement les *traders*, les *risk managers* et les comptables !
- Cloisonner les services de *Front, Middle et Back Offices* (*muraille de Chine*)
- Faire des simulations (scenarii, *stress testing, VaR*, autres modèles, …)
- Surveiller les changements de liquidité et les autres acteurs du marché

Des gourous ont marqué les dérivés :

Nick Leeson (Barings, 1995), Robert Citron (Orange, 1994), Robert Merton (LTCM, 1998), Jérôme Kerviel (Société Générale, 2008), …

Fonction Répartition Normale N(x)

```
Function SNorm(z)

    c1 = 2.506628
    c2 = 0.3193815
    c3 = -0.3565638
    c4 = 1.7814779
    c5 = -1.821256
    c6 = 1.3302744

    If z >= 0 Then
             w = 1
    Else: w = -1
    End If

            y = 1 / (1 + 0.2316419 * w * z)
    SNorm = 0.5 + w * (0.5 - (Exp(-z * z / 2) / c1) * _
            (y * (c2 + y * (c3 + y * (c4 + y * (c5 + y * c6))))))

End Function
```

Fonction Pricing Call & Put [Black-Scholes]

```
Function Prix_Cal(pri, exe, vol, tau, ech)

    Dim d1 As Single
    Dim d2 As Single

    d1 = (Log(pri / exe) + (tau + vol * vol / 2) * ech) / (vol * Sqr(ech))
    d2 = d1 - vol * Sqr(ech)
    Prix_Cal = pri * SNorm(d1) - exe * Exp(-tau * ech) * SNorm(d2)

End Function
```

Prix_Cal(Sous jacent ; Strike ; Volatilité ; Tx intérêt ; Échéance)

```
Function Prix_Put(pri, exe, vol, tau, ech)

    Dim d1 As Single
    Dim d2 As Single

    d1 = (Log(pri / exe) + (tau + vol * vol / 2) * ech) / (vol * Sqr(ech))
    d2 = d1 - vol * Sqr(ech)
    Prix_Put = exe * Exp(-tau * ech) * SNorm(-d2) - pri * SNorm(-d1)

End Function
```

Prix_Put(Sous jacent ; Strike ; Volatilité ; Tx intérêt ; Échéance)

Fonction Volatilité Implicite pour Call [Black-Scholes]

```
Function Imp_Vol_C(pri, exe, tau, ech, Cal)

    Dim d1 As Single
    Dim d2 As Single

sig_min = 0.000001
sig_max = 1.000001
i = 0
 While i < 25
i = i + 1
sig_moy = (sig_min + sig_max) / 2
    d1 = (Log(pri / exe) + (tau + sig_moy * sig_moy / 2) * ech) / (sig_moy * Sqr(ech))
    d2 = d1 - sig_moy * Sqr(ech)
    y = pri * SNorm(d1) - exe * Exp(-tau * ech) * SNorm(d2)
If y > Cal Then sig_max = sig_moy Else sig_min = sig_moy
Wend
Imp_Vol_C = sig_moy

End Function
```

Imp_Vol_C(Sous jacent ; Strike ; Tx intérêt ; Échéance ; Prime Call)

Fonction Volatilité Implicite pour Put [Black-Scholes]

```
Function Imp_Vol_P(pri, exe, tau, ech, ven)

    Dim d1 As Single
    Dim d2 As Single

sig_min = 0.000001
sig_max = 1.000001
i = 0
 While i < 25
i = i + 1
sig_moy = (sig_min + sig_max) / 2
    d1 = (Log(pri / exe) + (tau + sig_moy * sig_moy / 2) * ech) / (sig_moy * Sqr(ech))
    d2 = d1 - sig_moy * Sqr(ech)
    y = exe * Exp(-tau * ech) * SNorm(-d2) - pri * SNorm(-d1)
If y > ven Then sig_max = sig_moy Else sig_min = sig_moy
Wend
Imp_Vol_P = sig_moy

End Function
```

Imp_Vol_P(Sous jacent ; Strike ; Tx intérêt ; Échéance ; Prime Put)