Examen de seconde session

Date : 19 juin 2018
Durée : 3h00

Les documents, calculatrices et moyens de télécommunication sont interdits.
La notation tiendra **largement** *compte de la qualité de la rédaction.*
Le sujet est recto-verso. Il comporte quatre exercices qui sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par l'étudiant·e.
Il est possible d'admettre la réponse à une question afin de traiter les suivantes.
Le barème est indicatif.

Exercice 1. *(2 points)* On considère le polynôme réel $P = X^3 + X^2 + 2X + 5$.

(a) Justifier que P possède trois racines complexes (pas forcément deux à deux distinctes).
(b) On note x_1, x_2, x_3 les racines de P. Calculer $\frac{x_1x_2x_3}{\arctan(x_1+x_2+x_3)}$.

Exercice 2. *(3 points)* Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-espace vectorial de dimension finie n. Soit f et g deux endomorphismes de E. On suppose que f admet n valeurs propres distinctes, et que $f \circ g = g \circ f$.

Pour une valeur propre λ de f, on note $E_\lambda(f) = \ker(f - \lambda \mathrm{id})$ le sous-espace propre associé.

(a) Soit λ une valeur propre de f, montrer que $g\left(E_\lambda(f)\right) \subset E_\lambda(f)$.
(b) En déduire que tout vecteur propre de f est un vecteur propre de g.
(c) En déduire que g est diagonalisable.

Exercice 3. *(5 points)* Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on considère la matrice

$$M(a) = \begin{pmatrix} a & 1+a & -1 \\ -a & -1 & 1-a \\ -a & -a & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

(a) Montrer que son polynôme caractéristique est $P_{M(a)}(X) = (1-X)^2(a-X)$.
(b) En déduire le spectre de $M(a)$ et la multiplicité des valeurs propres en fonction de a.
(c) Sans faire de calculs, justifier que $M(1)$ n'est pas diagonalisable.
(d) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour que $M(a)$ soit diagonalisable.
(e) Si $M(a)$ est diagonalisable, déterminer $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et $D \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale satisfaisant

$$P^{-1}M(a)P = D.$$

Exercice 4. *(10 points)* On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

(1) (a) Montrer que le polynôme caractéristique de A est $P_A(x) = (2-X)^3(1-X)$. En déduire les valeurs propres de A et leurs multiplicités.

(b) Effectuer la division euclidienne de $S(X) = X^6 - 3X^5 + 5X^4 - 9X^3 + 2X^2 + 13X - 6$ par $P_A(X)$.

(2) (a) Déterminer la dimension du sous-espace propre $E_2(A) = \ker(A - 2I_3)$.

(b) En déduire sans aucun autre calcul qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ telle que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \qquad (\star)$$

(c) En déduire le polynôme minimal $\Pi_A(X)$ de A.

(d) En déduire la matrice $S(A)$ où $S(X)$ est le polynôme donné ci-dessus.

(3) Déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{R})$ explicite satisfaisant $(\star)$.

(4) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère les deux matrices suivantes de $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$

$$D_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer N^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que $D_\lambda N = ND_\lambda$.

(c) Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (D_\lambda + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_\lambda^{n-k} N^k.$$

(d) En déduire une expression explicite de

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n.$$

(5) Soit $n \in \mathbb{N}$, donner une expression explicite de A^n.