# Examen de première session

*Date : 9 janvier 2018*
*Durée : 3h00*

*Les documents, calculatrices et moyens de télécommunication sont interdits.*
*La notation tiendra largement compte de la qualité de la rédaction.*
*Le sujet est recto-verso et comporte cinq exercices qui sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre choisi par l'étudiant·e.*
*Le barême est indicatif.*

**Exercice 1.** *(5 points)* On considère les deux polynômes suivants :

$$P = X^4 - 9 \quad \text{et} \quad Q = X^4 + X^3 - 2X^2 - 3X - 3.$$

(a) Factoriser $P$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
(b) Déterminer $\mathrm{pgcd}(P, Q)$.
(c) Factoriser $Q$ dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

**Exercice 2.** *(3 points)* On considère la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_9(\mathbb{C}).$$

(a) Déterminer son polynôme caractéristique et son spectre $\mathrm{Sp}(A)$.
(b) Déterminer une base et la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.
(c) Déterminer une base et la dimension de chacun de ses sous-espaces caractéristiques $\ker\left((A - \lambda I_9)^s\right)$ pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.
(d) Déterminer une forme de Jordan et une matrice $P \in \mathrm{GL}_9(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}AP$ soit de Jordan.
(e) Déterminer le polynôme minimal de $A$.
(f) La matrice $A$ est-elle diagonalisable ? On énoncera soigneusement le critère utilisé.

**Exercice 3.** *(6,5 points)* Pour chacune des deux matrices suivantes :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -6 & 18 \\ 0 & 2 & 0 & -9 \\ 0 & -3 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer son polynôme caractéristique et son spectre.
(b) Déterminer la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.
(c) En déduire si la matrice est diagonalisable.
(d) Déterminer la dimension de chacun de ses sous-espaces caractéristiques.
(e) En déduire une forme de Jordan et le polynôme minimal.
(f) Si la matrice est diagonalisable, calculer explicitement $B^6$ ou $C^6$.

**Exercice 4.** *(3,5 points)* Soit $\mathcal{S}_n$ le groupe symétrique de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$. On considère la partie

$$Z(\mathcal{S}_n) = \{\sigma \in \mathcal{S}_n | \forall \tau \in \mathcal{S}_n, \sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma\} \subset \mathcal{S}_n,$$

appelée *centre* du groupe $\mathcal{S}_n$.
(a) Soient $\alpha, \beta \in \mathcal{S}_5$ les deux permutations suivantes :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer $\alpha^{-1}$, $\beta^{-1}$, $\alpha \circ \beta$, $\beta \circ \alpha$, $\alpha \circ (12) \circ \alpha^{-1}$ et $\beta \circ (12) \circ \beta^{-1}$.
(b) Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\sigma$ pour que $\sigma \circ (12) = (12) \circ \sigma$.
(c) Soit $x, y \in \{1, \ldots, n\}$ avec $x \neq y$. Soit $\tau = (x, y) \in \mathcal{S}_n$ la transposition échangeant $x$ et $y$. Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\sigma$ pour que $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$.
(d) Soit $n \geqslant 3$. Montrer que $Z(\mathcal{S}_n) = \{\mathrm{id}\}$.
(e) Déterminer $Z(\mathcal{S}_2)$.

**Exercice 5.** *(2 points)* Soit $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que

$$AB = A^2 + I_n,$$

où $I_n$ est la matrice identité de taille $n$.
(a) Montrer que $A$ est inversible.
(b) Montrer que $A$ et $B$ commutent, c'est-à-dire que $AB = BA$.
(c) On suppose qu'il existe $P = \sum_{t=0}^{d} c_t X^t \in \mathbb{K}[X]$ tel que $AB = P(A)$ et $c_0 \neq 0$. Montrer que $A$ est inversible et que $A$ et $B$ commutent.