Faculté d'économie de l'université de Montpellier (UM)
Travaux dirigés - Master 1 Economie - Théorie des Jeux
Responsable du cours: M. Beaud (UM-CEE-M)

****

Dossier 1: Jeux Stratégiques (statiques et à information complète)

1. Soit un jeu sous forme stratégique à trois joueurs, chacun disposant de deux stratégies possibles. Le joueur 1 joue en ligne, il choisit H ou B. Le joueur 2 joue en colonne, il choisit G ou D. Le joueur 3 joue en matrice, il choisit N ou S:

N	G	D
H	$3; 0; 4$	$0; 1; 1$
B	$2; -1; 2$	$-1; 0; 3$

S	G	D
H	$1; 1; 2$	$2; 3; 0$
B	$-1; 1; 0$	$0; 2; 2$

   (a) Montrer que $\{H, D, N\}$ est un équilibre en stratégies strictement dominantes ($ESSD$).

   (b) Existe-t-il d'autres $ESSD$? Commenter.

   (c) L'hypothèse de connaissance commune de la rationalité est-elle nécessaire pour affirmer que cet équilibre sera joué? Pourquoi?

2. Deux pays sont affectés par un fort ralentissement de l'activité économique mondiale, et décident de l'opportunité d'un plan de relance. Chaque pays peut soit décider d'un plan (action P) soit ne rien faire (action $\overline{P}$). On considère qu'il est nécessaire que les deux pays mettent en oeuvre un plan pour que la relance soit efficace. Dans ce cas chacun obtient un paiement de 1. Lorsqu'aucun plan n'est mis en oeuvre, chacun obtient un paiement de 0. Enfin, si un pays est le seul à mettre en oeuvre un plan, il obtient -1 et l'autre 2.

   (a) On considère que le jeu est non coopératif. Qu'est-ce que cela signifie? Cette hypothèse interdit-elle une entente tacite entre les pays?

   (b) On considère que l'information est complète. Qu'est-ce que cela signifie?

   (c) On considère que le jeu est statique. Pourquoi cette hypothèse implique que les joueurs ont nécessairement une information imparfaite?

   (d) Donner la forme stratégique de ce jeu. Construire la matrice des paiements.

   (e) Déterminer l'équilibre du jeu. De quel type d'équilibre s'agit-il? Quelle(s) hypothèse(s) doivent être mobilisées pour affirmer que c'est l'unique prédiction possible de l'issue du jeu?

   (f) Cette issue est-elle un optimum de Pareto? Si ce n'est pas le cas, par quelle autre issue est-elle Pareto-dominée? Commenter.

   (g) On considère explicitement que les pays ont l'opportunité de communiquer avant de prendre leur décision. Cette hypothèse modifie-t-elle l'équilibre du jeu?

3. Soit un jeu stratégique à deux joueurs:

	G	C	D
H	$4; 3$	$5; 1$	$6; 2$
M	$2; 1$	$8; 4$	$3; 6$
B	$3; 0$	$9; 6$	$2; 8$

(a) Résoudre en procédant par élimination itérative des stratégies strictement dominées.

(b) Quelles hypothèses minimales doivent être satisfaites pour que l'on puisse affirmer que l'équilibre obtenu par élimination itérative des stratégies strictement dominées (*EEISSD)* sera joué?

(c) Existe-t-il d'autres *EEISSD*? Commenter.

4. Soit un jeu sous forme stratégique à deux joueurs:

	G	C	D
H	$1;3$	$8;1$	$3;8$
M	$0;8$	$8;2$	$5;6$
B	$3;3$	$9;8$	$2;4$

(a) Résoudre en procédant par élimination itérative des stratégies strictement dominées. *(Aide. Certaines stratégies sont strictement dominées par des stratégies mixtes uniquement).*

5. On considère un bien indivisible mis en vente selon une procédure d'enchère à la Vickrey. Dans cette procédure, tous les enchérisseurs soumettent leur proposition sous pli cacheté. Le bien revient au plus offrant, mais celui-ci doit payer le prix donné par la deuxième meilleure enchère. En cas d'égalité, on tire le vainqueur au sort parmi ceux ayant proposé la meilleure enchère et le gagnant paye son enchère. On note $e^j = e\left(v^j\right)$ l'enchère d'un agent j, où v^j est la valeur qu'il attribue au bien (prix de réservation).

(a) Considérer le cas d'un joueur j. On note e^* l'enchère la plus haute parmi les autres joueurs que j. Montrer que $e^j = v^j$, i.e. enchérir à hauteur exacte de son prix de réserve, est une stratégie faiblement dominante. *Aide. Trois cas sont possibles:* $v^j > e^*$, $v^j = e^*$ *et* $v^j < e^*$. *Dans chaque cas, comparer le paiement de la stratégie* $e^j = v^j$ *avec celui des stratégies* $e^j > v^j$ *et* $e^j < v^j$.

6. Vous participez au jeu suivant avec au moins un autre joueur. Chacun doit choisir de manière privée un nombre entier compris entre 0 et 100 (bornes incluses). Le(s) joueur(s) qui propose(nt) le nombre le plus proche de 70% de la moyenne des montants proposés remporte(nt) un lot.

(a) Que pensez-vous de la stratégie "100" ? Commenter.

(b) Résoudre par élimination itérative des stratégies faiblement dominées.

(c) Que pensez-vous du caractère prédictif de l'issue ainsi identifiée? Quelle hypothèse sous-jacente à cette prédiction est sensible?

(d) Pensez-vous que l'issue serait la même si le jeu était joué par des joueurs inexpérimentés (première participation au jeu) ou expérimentés (participation régulière au jeu)?

7. Soit un jeu sous forme stratégique à deux joueurs:

	G	D
H	$3;0$	$0;1$
M	$0;0$	$3;1$
B	$1;1$	$1;0$

(a) Comment peut-on démontrer que M et D sont les seules stratégies rationalisables des joueurs?

(b) Résoudre par élimination itérative des stratégies strictement dominées. L'ensemble des stratégies qui résistent à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées correspond-t-il à l'ensemble des stratégies rationalisables? Est-ce toujours le cas?

Considérez maintenant l'exemple suivant:

	G	D
H	$2;0$	$0;1$
M	$0;0$	$2;1$
B	$1;1$	$1;0$

(c) Quelles sont les stratégies qui résistent à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées? Quelles sont les stratégies rationalisables des joueurs?

(d) Soit $\alpha_1 = (\alpha_1(H), \alpha_1(M), \alpha_1(B)) = (p_1, q_1, 1-p_1-q_1)$ une stratégie mixte du joueur 1 et $\alpha_2 = (\alpha_2(G), \alpha_2(D)) = (p_2, 1-p_2)$ une stratégie mixte du joueur 2. Montrer que tous les équilibres de Nash en stratégies mixtes (non dégénérées) s'écrivent $\alpha_* = \{\alpha_{1*}; \alpha_{2*}\} = \{(p_1, \frac{1}{2} - p_1, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$, où $p_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. *Aide. Déterminer sous quelle condition le joueur 2 est indifférent entre G et D, puis sous quelles conditions le joueur 1 est indifférent entre: (i) H et M, (ii) H et B, (iii) M et B.*

8. Soit un jeu stratégique à deux joueurs:

	A	B
A	$0;1$	$2;0$
B	$1;0$	$0;2$

Le jeu ci-dessus est une variante du jeu de la bataille des sexes dont la matrice des paiements est:

	A	B
A	$2;1$	$0;0$
B	$0;0$	$1;2$

(a) Rappeler les caractéristiques du jeu de la bataille des sexes. Comment construit-on les paiements des joueurs dans ce jeu (quel est le classement des issues des joueurs?)

(b) Comment peut-on interpréter la modification des paiements conduisant à la variante?

(c) Pour chaque jeu, établir les fonctions de meilleures réponses des joueurs et les représenter graphiquement. Déterminer tous les équilibres de Nash.

9. Soit un jeu sous forme stratégique à deux joueurs:

	G	C	D
H	$3;-3$	$2;-2$	$7;-7$
M	$-4;4$	$1;-1$	$9;-9$
B	$1;-1$	$0;0$	$-3;3$

(a) Quelle est la caractéristique particulière de ce jeu?

(b) On raisonne en stratégies pures uniquement. Déterminer le paiement MaxiMin s_1 du joueur 1. Déterminer le paiement MiniMax v_2 du joueur 2. Commenter.

(c) On raisonne en stratégies pures uniquement. Déterminer le paiement MaxiMin s_2 du joueur 2, noté . Déterminer le paiement MiniMax v_1 du joueur 1. Commenter.

(d) Quel est le paiement de sécurité de chaque joueur? Quelle est la "valeur" V de ce jeu?

10. Soit un jeu sous forme stratégique à trois joueurs, chacun disposant chacun de deux stratégies possibles. Le joueur 1 joue en ligne, il choisit H ou B. Le joueur 2 joue en colonne, il choisit G ou D. Le joueur 3 joue en matrice, il choisit N ou S:

N	G	D
H	$2; 3; 1$	$0; 1; 2$
B	$4; 2; 1$	$-1; 1; 1$

S	G	D
H	$1; 2; 3$	$-1; 1; 1$
B	$0; 0; 0$	$1; 1; 4$

(a) On raisonne en stratégies pures uniquement. Déterminer la stratégie prudente de chaque joueur. Commenter.

(b) Soit $\alpha_1 = (\alpha_1(H), \alpha_1(B)) = (p_1, 1-p_1)$ une stratégie mixte du joueur 1. Représenter $u_1(\alpha_1, G, N)$, $u_1(\alpha_1, D, N)$, $u_1(\alpha_1, G, S)$ et $u_1(\alpha_1, D, S)$, en fonction de α_1. Montrer que la stratégie prudente du joueur 1 est $\alpha_1 = (\alpha_1(H), \alpha_1(B)) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

(c) Déterminer les équilibres de Nash en stratégies pures. Montrer que la combinaison de stratégies $\alpha_* = \{\alpha_{1*}; \alpha_{2*}; \alpha_{3*}\} = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (0, 1)\}$ forme également un équilibre de Nash. *Aide. (i) vérifier que les joueurs 1 et 2 qui adoptent une stratégie mixte sont indifférents entre les deux stratégies pures constituant le support de leur stratégie mixte et (ii) vérifier que* $\alpha_{3*} = MR_3(\alpha_{1*}, \alpha_{2*})$ *pour le joueur 3 qui lui adopte une stratégie pure.*

(d) La combinaison des stratégies prudentes des joueurs forme-t-elle un équilibre de Nash? Dans quels types de jeu est-ce toujours le cas?

11. Soit un jeu sous forme stratégique à deux joueurs:

	G	C	D
H	$1; -1$	$0; 0$	$6; -6$
B	$3; -3$	$4; -4$	$2; -2$

(a) Déterminer les paiements MaxiMin et MiniMax des joueurs en stratégies pures. Que constatez-vous? Que peut-on en déduire concernant les stratégies prudentes des joueurs.

(b) Considérer les stratégies mixtes. Soit $\alpha_1 = (\alpha_1(H), \alpha_1(B)) = (p_1, 1-p_1)$ une stratégie mixte du joueur 1. Raisonner en terme de MaxiMin. Représenter $u_1(\alpha_1, G)$, $u_1(\alpha_1, C)$ et $u_1(\alpha_1, D)$, en fonction de α_1. Montrer (en vous aidant du graphique) que le paiement de sécurité du joueur 1 est $\frac{8}{3}$.

(c) On note $\alpha_2 = (\alpha_2(G), \alpha_2(C), \alpha_2(D)) = (p_2, q_2, 1-p_2-q_2)$ une stratégie mixte du joueur 2. Raisonner en terme de MiniMax. Représenter $u_2(G, \alpha_1)$, $u_2(C, \alpha_1)$ et $u_2(D, \alpha_1)$, en fonction de α_1. Montrer (en vous aidant du graphique) que le paiement de sécurité du joueur 2 est $-\frac{8}{3}$.

(d) Déterminer tous les équilibres de Nash du jeu. Pourquoi $\alpha = \{\alpha_1; \alpha_2\} = \{(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ n'est pas un équilibre de Nash?

(e) Montrer qu'à l'unique équilibre de Nash du jeu, $\alpha_* = \{\alpha_{1*}; \alpha_{2*}\} = \{(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}), (\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3})\}$, chaque joueur obtient son paiement de sécurité.

12. On considère une plage (d'une longueur normalisée à $1Km$) sur laquelle sont uniformément répartis de nombreux estivants. On peut la représenter par un segment de droite horizontal. Deux marchands ambulants de sucreries se font concurrence sur cette plage. On considère qu'ils doivent décider simultanément d'un emplacement $a_j \in [0;1]$ pour leur stand. Sans perte de généralité, on suppose que le marchand 2 choisit une action $a_2 \in [\frac{1}{2};1]$. De là, il est clair qu'il n'est jamais rationnel pour le joueur 1 de choisir $a_1 \in]a_2;1]$. On a donc $0 \leq a_1 \leq a_2$ et $a_2 \geq \frac{1}{2}$. Les paiements des joueurs sont donnés par:

$$u_1(a_1,a_2) = \int_0^{a_1} \frac{1}{(g+s)^2} ds + \int_0^{\frac{a_2-a_1}{2}} \frac{1}{(g+s)^2} ds = \frac{2}{g} - \frac{1}{g+a_1} - \frac{1}{g+\frac{a_2-a_1}{2}}$$

$$u_2(a_2,a_1) = \int_0^{1-a_2} \frac{1}{(g+s)^2} ds + \int_0^{\frac{a_2-a_1}{2}} \frac{1}{(g+s)^2} ds = \frac{2}{g} - \frac{1}{1+g-a_2} - \frac{1}{g+\frac{a_2-a_1}{2}}$$

où $g > 0$ est un paramètre d'attraction spécifique aux sucreries.

(a) Montrer que les meilleures réponses des joueurs sont:

$$\begin{aligned} a_1^* &= MR_1(a_2) = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \left[\left[2-\sqrt{2} \right] g + a_2 \right] \\ a_2^* &= MR_2(a_1) = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \left[\sqrt{2} + g \left[\sqrt{2}-2 \right] + a_1 \right] \end{aligned}$$

($g \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ garantit l'obtention d'un Max).

(b) Ecrire les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une issue $\{a_1^*; a_2^*\}$ soit un équilibre de Nash. Résoudre et montrer qu'à l'équilibre de Nash:

$$a_1^* = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \left[\left[\sqrt{2}-1 \right] g + \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

$$a_2^* = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \left[\left[1-\sqrt{2} \right] g + \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right]$$

(c) Quel est l'équilibre de Nash lorsque $g = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Observe-t-on ce type de phénomène en pratique?

13. Considérons n villageois identiques pouvant faire paître leurs vaches dans un champ communal (gratuitement accessible à chacun). Le nombre de vaches que chaque villageois choisit de posséder est noté a^j. Ainsi, le nombre total de vaches dans le champ est $A = \sum_{j=1}^{n} a_j$. On suppose que les vaches sont parfaitement divisibles (...). Le coût d'achat et d'entretien d'une vache est c. Le bénéfice par vache est noté $B(A)$. Nous supposerons que c'est une fonction décroissante du nombre total de vaches dans le champ. On suppose qu'il y a un nombre maximum de vaches possible, noté $\overline{A}$, au delà duquel le rendement est nul. Ainsi, $B(A) = \overline{A} - A$; $\forall A \in \left[0, \overline{A}\right]$ et $B(A) = 0$; $\forall A > \overline{A}$. Les villageois choisissent simultanément le nombre de vaches qu'ils désirent posséder.

(a) Ecrire la fonction de paiements $u_j(a_j, A)$ d'un villageois j possédant un nombre de vaches a_j lorsqu'il existe A vaches dans le champ.

(b) Montrer que la meilleure réponse de chaque villageois est $a_{j*} = \overline{A} - A - c$.

(c) Montrer que le nombre total de vache à l'équilibre de Nash est $A_* = \frac{n}{1+n}\left[\overline{A} - c\right]$. En déduire a_{j*} et u_{j*}.

(d) Considérer un objectif social utilitariste, c.à.d. considérer que le bien-être social est mesuré par la somme (non pondérée) des niveaux d'utilité individuels. Montrer que le nombre total de vaches socialement optimal est $A_{**} = \frac{1}{2}\left[\overline{A} - c\right]$. En déduire a_{j**} et u_{j**}.

(e) On considère trois cas: $n = 1$, $n = 2$ et $n = 3$. Comparer A_* et A_{**}. Comparer u_{j*} et u_{j**}. Que constatez-vous? Comment évolue la différence entre ces deux paiements lorsque le nombre de villageois augmente? Commenter.

14. Considérons n individus partageant un appartement (colocation). Ils disposent d'une même quantité de temps disponible, évaluée à T heures, qui peut être consacrée soit aux activités ménagères, soit à regarder la télévision. Les colocataires décident simultanément du temps qu'ils vont consacrer aux activités ménagères et à regarder la télévision.

    Chaque individu apprécie de vivre dans un appartement propre et apprécie également de regarder la télévision. De plus, regarder la télévision est d'autant plus agréable que l'appartement est propre. Les préférences sont identiques. La fonction d'utilité du colocataire $j = 1, ..., n$, lorsqu'il consacre a^j heures aux activités ménagères (et donc $[T - a_j]$ heures à regarder la télévision), s'écrit : $u^j(a_j, A) = A + [T - a_j] + [T - a_j]A$, où $A = \sum_{j=1}^{n} a_j$ est le nombre total d'heures consacrées aux activités ménagères (déterminant la propreté de l'appartement).

    (a) Montrer que la fonction de meilleure réponse de chaque colocataire est $a_{j*} = T - A$. Caractériser et déterminer l'équilibre de Nash.

    (b) Montrer que le nombre total d'heures consacrées aux activités ménagères à l'équilibre de Nash vaut $A_* = \frac{n}{1+n}T$.

    (c) Montrer que la contribution socialement optimale (dans le cas d'un objectif social utilitariste) d'un agent est $A_{**} = \frac{n[1+T]-1}{2}$.

    (d) Comparer A_*et A_{**} pour différentes valeurs de n. Commenter.