Théorie des Jeux

Master 1 Economie

Mickael Beaud
Maître de Conférences des Universités
Faculté d'Economie de l'Université de Montpellier
CEE-M (UMR: UM-CNRS-INRA-MontpSupAgro)

Courriel: mickael.beaud@umontpellier.fr

Chapitre 1.
Jeux statiques à information complète

1. **Modélisation d 'un jeu sous forme stratégique**
2. **Stratégies pures et stratégies mixtes**
3. **Stratégies dominées et équilibre en stratégies dominantes**
4. **Elimination itérative des stratégies dominées**
5. **Stratégies rationalisables**
6. **Critère de prudence, paiement MaxiMin et jeux à somme nulle**
7. **Equilibre de Nash**

1. Modélisation d'un jeu sous forme stratégique

DEFINITION

- Un jeu sous forme stratégique (ou normale) est un modèle constitué de 3 éléments:

(i) L'ensemble fini des joueurs $\mathbf{N}=\{1,2,\ldots,j,\ldots,J\}$, où J est le nombre total de joueurs.

(ii) Pour chaque joueur j, l'ensemble (non vide) des actions possibles $\mathbf{A_j}$. On notera: $a_j \in \mathbf{A_j}$ une action du joueur j, $\mathbf{a}=\{a_1,a_2,\ldots,a_j,\ldots,a_J\}$ une issue du jeu, $\mathbf{A}=\Pi_{j\in N}\,\mathbf{A_j}$ l'ensemble des issues possibles (le produit cartésien des ensembles des stratégies possibles des joueurs) et $\mathbf{a_{-j}}=\{a_1,a_2,\ldots,a_{j-1}, a_{j+1},\ldots,a_J\}$ le vecteur des actions de tous les joueurs autres que le joueur j.

(iii) Pour chaque joueur j, une fonction de paiement, ou fonction d'utilité Von Neumann-Morgenstern, $u_j(\mathbf{a})$ caractérisant ses préférences sur toutes les issues possibles du jeu.

- Soit un jeu sous forme stratégique à deux joueurs et deux stratégies par joueur:

(i) L'ensemble des joueurs est **N**={1,2}.

(ii) L'ensemble des actions possibles est $\mathbf{A_1}$={H,B} pour le joueur 1, et $\mathbf{A_2}$={G,D} pour le joueur 2. Ainsi, il existe quatre issues possibles: **A**={(H,G),(H,D),(B,G),(B,D)}.

(iii) Les fonctions de paiement des joueurs: $u_1(a_1, a_2)$ et $u_2(a_2, a_1)$, où $a_1 \in \mathbf{A_1}$ et $a_2 \in \mathbf{A_2}$.

- Il est commode de résumer les jeux sous forme stratégique à deux joueurs par une matrice, appelée **matrice des paiements**:

		Joueur 2	
		G	D
Joueur 1	H	$u_1(H,G)$; $u_2(G,H)$	$u_1(H,D)$; $u_2(D,H)$
	B	$u_1(B,G)$; $u_2(G,B)$	$u_1(B,D)$; $u_2(D,B)$

- Soit un jeu sous forme stratégique à trois joueurs et deux stratégies par joueur ($2^3=8$ issues possibles):
  - $\mathbf{N}=\{1,2,3\}$; $\mathbf{A_1}=\{H,B\}$, $\mathbf{A_2}=\{G,D\}$, $\mathbf{A_3}=\{N,S\}$ et $\mathbf{A}=\{(H,G,N), (H,D,N), (B,G,N), (B,D,N), (H,G,S), (H,D,S), (B,G,S), (B,D,S)\}$.

Joueur 3 : N

Joueur 1 \ Joueur 2	G	D
H	$u_1(H,G,N)$; $u_2(G,H,N)$; $u_3(N,H,G)$	$u_1(H,D,N)$; $u_2(D,H,N)$; $u_3(N,H,D)$
B	$u_1(B,G,N)$; $u_2(G,B,N)$; $u_3(N,B,G)$	$u_1(B,D,N)$; $u_2(D,B,N)$; $u_3(N,B,D)$

Joueur 3 : S

Joueur 1 \ Joueur 2	G	D
H	$u_1(H,G,S)$; $u_2(G,H,S)$;$u_3(S,H,G)$	$u_1(H,D,S)$; $u_2(D,H,S)$; $u_3(S,H,D)$
B	$u_1(B,G,S)$; $u_2(G,B,S)$; $u_3(S,B,G)$	$u_1(B,D,S)$; $u_2(D,B,S)$; $u_3(S,B,D)$

  - Le joueur 1 joue en lignes (H ou B), le joueur 2 joue en colonnes (G ou D) et le joueur 3 joue en matrices (N ou S).

Exemple. Le dilemme des prisonniers

- Le dilemme des prisonniers est probablement l'un des jeux les plus célèbres de la théorie des jeux.
- Il met en scène deux individus détenus séparément après avoir été pris en flagrant délit d'infraction. De plus, la police les soupçonne d'avoir commis un crime (nettement plus grave que l'infraction) mais ne peut pas le prouver.
- La police propose à chaque prisonnier de dénoncer son acolyte (afin de pouvoir l'inculper du crime) en échange d'une récompense. Plus précisément, la police promet que:
  - Si un prisonnier est le seul à avoir dénoncé l'autre, il sera immédiatement libéré et l'autre sera condamné à *5* ans de prison.
  - Si les deux prisonniers gardent le silence chacun sera condamné à *1* an de prison.
  - En cas de dénonciation mutuelle, chacun sera condamné à *4* ans de prison.

- Le dilemme des prisonniers est un **jeu statique** (car il se déroule en une étape) à **information complète** (chaque prisonnier connaît les stratégies possibles de l'autre et les peines encourues dans les quatre scénarios possibles), mais **imparfaite** (car chaque prisonnier n'a pas connaissance de la décision de l'autre au moment où il prend la sienne).

- Forme stratégique du dilemme des prisonniers:

(i) Il existe deux joueurs: J=2 et $\mathbf{N}=\{1,2\}$.

(ii) Chaque joueur dispose de deux actions possibles: Se taire (action T) ou dénoncer l'autre (action D):

$$\mathbf{A_1}=\mathbf{A_2}=\{T,D\} \text{ et } \mathbf{A}=\{(T,T),(T,D),(D,T),(D,D)\}$$

(iii) **Le paiement d'un joueur est donné par le nombre d'année(s) de liberté durant les 5 prochaines**. Ainsi, le jeu étant symétrique (les joueurs se trouvent exactement dans la même situation), on a les paiements suivants:

$$u_j(T,T)=4,\ u_j(D,D)=1,\ u_j(T,D)=0 \text{ et } u_j(D,T)=5,\ \text{avec } j \in \{1,2\}$$

- Matrice des paiements du dilemme des prisonniers:

		Prisonnier 2 T	Prisonnier 2 D
Prisonnier 1	T	$u_1(T,T)$; $u_2(T,T)$	$u_1(T,D)$; $u_2(D,T)$
Prisonnier 1	D	$u_1(D,T)$; $u_2(T,D)$	$u_1(D,D)$; $u_2(D,D)$

Soit:

		Prisonnier 2 T	Prisonnier 2 D
Prisonnier 1	T	4 ; 4	0 ; 5
Prisonnier 1	D	5 ; 0	1 ; 1

- **REMARQUE**
  - Deux hypothèses importantes sont faites lorsque l'on étudie un jeu en statique:
    - **Chaque joueur dispose d'une information imparfaite** car, au moment de prendre sa décision, il ne connait pas les décisions prises par les autres joueurs.
    - **Le jeu n'est joué qu'une fois avec les mêmes joueurs**. La répétition d'un jeu entre mêmes joueurs n'implique pas nécessairement la répétition de l'équilibre du jeu statique.

2. Stratégies pures et stratégies mixtes

- **DEFINITION**

  - Pour un joueur j, une **stratégie mixte** $\boldsymbol{\alpha}_j$ est un **vecteur de probabilité** défini sur l'ensemble des stratégies possibles $\mathbf{A_j}$. Un élément $\alpha_j(a_j)$ de $\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{j}$ donne la probabilité de jouer l'action $a_j \in \mathbf{A_j}$, et la somme des éléments de $\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{j}$ doit être égale à l'unité: $\sum_{a_j} \alpha_j(a_j)=1$.

  - Une stratégie pure est une stratégie mixte dite dégénérée, ex. $\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{j}=(0,\ldots 0,1,0,\ldots,0)$. Par la suite, nous inclurons les stratégies mixtes dans l'ensemble des stratégies possibles $\mathbf{A_j}$ (qui devient convexe).

  - Dans ce contexte, l'issue d'un jeu $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_\mathbf{J})$ est aléatoire et les paiements des joueurs sont des paiements espérés. Pour un joueur j, le paiement espéré obtenu en jouant une stratégie mixte $\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{j}$ face à des stratégies mixtes $\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{-j}$ des autres joueurs s'écrit:

$$U_j(\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{j}) = \sum_{a_j} \alpha_j(a_j) \times u_j(a_j, \boldsymbol{\alpha}_\mathbf{-j})$$

  - U_j est une fonction d'utilité vNM, i.e. les préférences des joueurs sont supposées vérifier l'axiomatique de la **théorie de l'espérance d'utilité**.

Exemple. Pile ou face?

- On considère deux joueurs, chacun choisit entre pile (action P) ou face (action F): $\mathbf{A_1}=\mathbf{A_2}=\{P,F\}$ et $\mathbf{A}=\{(P,P),(P,F),(F,P),(F,F)\}$.
  - Si les choix sont identiques, le joueur 2 donne 1€ au joueur 1:
    - $u_1(P,P) = u_1(F,F) = -u_2(P,P) = -u_2(F,F) = 1$
  - Si les choix diffèrent, le joueur 1 donne 1€ au joueur 2:
    - $u_1(P,F) = u_1(F,P) = -u_2(P,F) = -u_2(F,P) = -1$
  - On peut remarquer que le gain d'un joueur vaut exactement la perte de l'autre.

- **DEFINITION**
  - Un jeu à deux joueurs est à somme nulle lorsque la somme des paiements des joueurs est nulle quelle que soit l'issue du jeu:

    $U_1(\alpha_1, \alpha_2) = -U_2(\alpha_2, \alpha_1)$, pour tout $\alpha_1 \in \mathbf{A_1}$ et $\alpha_2 \in \mathbf{A_2}$
  - Comme les intérêts des joueurs y sont diamétralement opposés, on qualifie également les **jeux à somme nulle** de **jeux strictement compétitifs**.

- Matrice des paiements:

		Joueur 2	
		p_2 **P**	$(1-p_2)$ **F**
Joueur 1	p_1 **P**	$u_1(P,P)$; $u_2(P,P)$	$u_1(P,F)$; $u_2(F,P)$
	$(1-p_1)$ **F**	$u_1(F,P)$; $u_2(P,F)$	$u_1(F,F)$; $u_2(F,F)$

Soit:

		Joueur 2	
		p_2 **P**	$(1-p_2)$ **F**
Joueur 1	p_1 **P**	1 ; -1	-1 ; 1
	$(1-p_1)$ **F**	-1 ; 1	1 ; -1

- Stratégies mixtes dans le jeu pile ou face:

$\alpha_j = (\alpha_j(P), \alpha_j(F)) = (\alpha_j(P), 1- \alpha_j(P)) = (1-\alpha_j(F), \alpha_j(F))$

où: $\alpha_j(P)+\alpha_j(F)=1$ et $j=1,2$. Pour simplifier, on pose: $\alpha_j = (p_j, 1- p_j)$.

- Les paiements associés à une issue α sont:

$$U_j(\alpha_j, \alpha_{-j}) = p_j.u_j(P, \alpha_{-j}) + (1-p_j).u_j(F, \alpha_{-j})$$

$$= p_j[p_{-j}.u_j(P,P)+(1-p_{-j})u_j(P,F)]+(1-p_j)[p_{-j}.u_j(F,P)+(1-p_{-j}).u_j(F,F)]$$

Soit:

$$U_1(\alpha_1, \alpha_2) = p_1[p_2.1+(1-p_2)(-1)]+(1-p_1)[p_2(-1)+(1-p_2)1]$$

$$= p_1(2.p_2-1)+(1-p_1)[1-2.p_2]$$

$$= 4.\ p_1.p_2-2.\ p_1-2.p_2+1$$

$$U_2(\alpha_2, \alpha_1) = p_2[p_1(-1)+(1-p_1)1]+(1-p_2)[p_1.1+(1-p_1).(-1)]$$

$$= p_2(1-2.p_1)+(1-p_2)[2.p_1-1)$$

$$= -4.\ p_2.p_1 + 2.p_1 + 2.p_2 - 1 = -U_1(\alpha_1, \alpha_2)$$

- Dans les jeux statiques qui, par définition, ne sont joués qu'une fois avec les mêmes joueurs, on peut s'interroger sur la mise en œuvre concrète d'une stratégie mixte.
  - Si effectivement le jeu n'est joué qu'une fois, une stratégie mixte peut être mise en œuvre en construisant une urne contenant des tickets. On fixe la proportion de tickets spécifiant chaque action a_j égale à $\alpha_j(a_j)$. Il s'agit alors de tirer un ticket dans l'urne et jouer l'action inscrite.
    - Dans le jeu pile ou face, un joueur j peut mettre en œuvre la stratégie mixte $\alpha_j = (½ , ½)$ en lançant une pièce de monnaie équilibrée.
- De plus, si un joueur joue à plusieurs reprises un même jeu statique, mais fait face, à chaque coup, à des joueurs différents ou inconnus, on peut se contenter d'étudier le jeu statique et étendre les résultats au jeu répété (car il n'y a pas d'interaction stratégique entre les coups).
    - Dans ce contexte, **une stratégie mixte d'un joueur peut s'interpréter comme la fréquence à laquelle il joue chacune des stratégies pures dont il dispose**.

- Par ailleurs, **on peut interpréter une stratégie mixte d'un joueur comme la croyance des autres joueurs sur la stratégie pure qu'il adopte**.
  - Par exemple, dans le jeu de pile ou face, si le joueur 1 pense qu'il y a une chance sur quatre de se trouver face à un adversaire jouant toujours la stratégie pure P (et trois chances sur quatre de se trouver face à un adversaire jouant toujours la stratégie pure F), cela revient pour lui à considérer qu'il joue contre un joueur adoptant la stratégie mixte $\alpha_2 = (\, 1/4\,,\ 3/4\,)$.
- **Il reste cependant problématique de considérer une stratégie mixte d'un joueur comme un objet de choix**.
  - En effet, si un joueur j anticipe que les autres joueurs vont adopter la stratégie α_{-j}, il peut calculer son paiement $U_j(a_j, \alpha_{-j})$ pour chacune des stratégies pures $a_j \in A_j$ dont il dispose.
    - De là, pourquoi le joueur j ne choisirait-il pas simplement la stratégie pure qui procure le paiement le plus fort?
    - Pourquoi « mixer » cette stratégie pure avec d'autres procurant un paiement plus faible?

- En effet, quelles que soient les stratégies des autres joueurs, une stratégie mixte d'un joueur ne peut donner un paiement strictement meilleur qu'une stratégie pure.

    - Par exemple, dans le jeu pile ou face, si le joueur 1 pense que le joueur 2 joue $\alpha_2 = (\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, il sait qu'il obtiendra un paiement espéré $U_1(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{2} - p_1$.
    - Le paiement maximum de ½ est obtenu en jouant la stratégie pure F (tandis que la stratégie pure P donne - ½).
    - Toute stratégie mixte attribuant une probabilité strictement positive à l'action P donnerait un paiement strictement plus faible que ½.

✓ **<u>THEOREME</u>**

✓ Quelles que soient ses croyances sur les stratégies des autres joueurs, un joueur rationnel ne peut choisir une stratégie mixte que lorsqu'il est indifférent entre cette stratégie mixte et toutes les stratégies pures auxquelles la stratégie mixte attribue une probabilité strictement positive.

- Dans le jeu pile ou face, si le joueur 1 pense que le joueur 2 joue la stratégie mixte $\alpha_2 = (½ , ½)$, il sait qu'il obtiendra un paiement espéré $U_1(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ quel que soit α_1.
  - Dans ce cas particulier, le joueur 1 est indifférent entre toutes les stratégies mixtes (dégénérées ou non) dont il dispose.

- Cependant, comment justifier l'emploi d'une stratégie mixte pouvant être complexe à mettre en œuvre, plutôt qu'une simple stratégie pure, puisque le paiement est le même?
  - Nous verrons plus loin que l'utilisation de la stratégie mixte *(½ , ½)* peut être justifiée dans le jeu pile ou face, car elle permet à chaque joueur de s'assurer le **paiement MaxiMin** (égal à 0).
  - Nous verrons également que la combinaison de stratégies mixtes $\alpha_1 = \alpha_2 = (½ , ½)$, est l'**unique équilibre de Nash** du jeu pile ou face.

1.3. Stratégies dominées et équilibre en stratégies dominantes

- Pour un joueur, une stratégie pure est *dominée* lorsqu'elle rapporte en toutes circonstances (c.à.d. quelles que soient les décisions prises par les autres joueurs) un gain inférieur à celui que peut lui rapporter au moins une autre stratégie (qui la domine).
  - Nous distinguerons deux niveaux de dominance, la **dominance stricte** (ou forte) et la **dominance faible**.

- <u>**DEFINITION**</u>
  - Pour un joueur j, la stratégie a_j est strictement (resp. faiblement) dominée lorsqu'elle est dominée par au moins une stratégie mixte $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{j}} \neq a_j$ telle que :

$$u_j(a_j, \mathbf{a}_{-j}) < (\text{resp. } \leq)\ U_j(\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{j}}, \mathbf{a}_{-j}) \quad \text{pour tout } \mathbf{a}_{-j} \in \mathbf{A}_{-j}$$

On dit également que $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{j}}$ domine strictement (resp. faiblement) a_j.

❖ **DEFINITION** (suite)

- ❖ Lorsqu'une stratégie domine strictement (resp. faiblement) toutes les autres stratégies, on parle de stratégie strictement (resp. faiblement) dominante.

- ❖ Lorsque tous les joueurs adoptent une stratégie strictement (resp. faiblement) dominante, la combinaison de ces stratégies forme un Equilibre en Stratégies Strictement (resp. Faiblement) Dominantes, que l'on notera ESSD (resp. ESFD).

➢ **REMARQUE**

- ➢ Si une stratégie est strictement dominée, alors elle est faiblement dominée (réciproque fausse).

- ➢ Si une stratégie est strictement dominante, alors elle est faiblement dominante (réciproque fausse).

- ➢ Un joueur peut avoir au plus une stratégie strictement dominante. Ainsi, lorsqu'un jeu admet un ESSD, il est unique.

- ➢ Tout ESSD est un ESFD (réciproque fausse).

- Dans le jeu du dilemme des prisonniers, pour chaque joueur, la stratégie T est strictement dominée par D :

		Prisonnier 2	
		T	D
Prisonnier 1	T	4 ; 4	0 ; 5
	D	5 ; 0	1 ; 1

  - En effet, T procure un paiement toujours strictement plus faible que D ($4<5$ et $0<1$).
- D est une stratégie strictement dominante pour chaque prisonnier.
- L'ESSD est donc {D;D} .

- Le jeu du dilemme des prisonniers admet donc un **ESSD** dans lequel les prisonniers se dénoncent mutuellement (et c'est l'unique équilibre envisageable).

  - Alors que cet équilibre repose sur l'hypothèse de rationalité des joueurs, on constate qu'il ne correspond pas à une issue efficace au sens de Pareto. C'est d'ailleurs la seule des quatre issues possibles qui ne soit pas un optimum de Pareto.

❖ **DEFINITION**

❖ Une issue **a** est **Pareto-dominée** par l'issue $\mathbf{a}_* \neq \mathbf{a}$ si :

$$u_j(\mathbf{a}_*) \geq u_j(\mathbf{a}) \text{ pour tout } j \in \mathbf{N}.$$

❖ Une issue est un **optimum de Pareto** si elle n'est Pareto-dominée par aucune autre issue.

❖ Une issue est **Pareto-dominante** si toutes les autres issues sont Pareto-dominées par elle.

- Puisque l'issue {D;D} est Pareto-dominée par l'issue {T;T}, chaque joueur devrait être d'accord pour coopérer en jouant T (puisque tous les joueurs seraient gagnants).

  - Alors qu'il peut sembler irrationnel d'aboutir à l'issue {D;D}, c'est précisément l'hypothèse de rationalité des joueurs qui implique qu'ils jouent D.

- Le jeu du dilemme des prisonniers illustre ainsi le fait que **des comportements individuels rationnels peuvent aller à l'encontre de l'intérêt collectif**.

- On parle de dilemme car d'un côté, chaque joueur trouverait sont intérêt dans une coopération coordonnée et simultanée, mais d'un autre côté, dévier unilatéralement de cette dernière est profitable, ce qui induit des comportements de type **passager clandestin**.

Exemple. Production privée des biens collectifs purs

- Un bien collectif pur possède les propriétés de **non-exclusion** et de **non-rivalité** d'usage.
  - Le problème pratique que posent de tels biens est un problème d'incitation à produire pour les agents économiques.
    - En conséquence, **les biens collectifs ne sont généralement pas produits en quantité suffisante par les agents privés** (sous optimale au sens de Pareto) même si un marché existe.

- On considère deux individus pouvant contribuer (action C) ou non (action N) à l'achat d'un bien public pur.
  - Pour chaque joueur, contribuer coûte $c>0$ et rapporte $g>0$ à tous les joueurs.

- Version coût-bénéfice du dilemme des prisonnier:

		Joueur 2 C	Joueur 2 N
Joueur 1	C	2g-c ; 2g-c	g-c ; g
	N	g ; g-c	0 ; 0

- o 2.g-c<g et g-c<0 ⇔ g<c ⇔ {N,N} est un ESSD.
- o 2.g-c>0 ⇔ g>½.c⇔{N,N} est Pareto dominée par {C,C}.
- o Il y a donc dilemme des prisonniers lorsque : ½.c<g<c (ex. c=3 et g=2).

Exemple (bis). Contribution volontaire à un bien collectif

- Un groupe de cent individus participent à l'expérience. Chacun dispose de 10 unités de paiement qu'il peut dépenser en achetant un bien privé ou un bien collectif.
  - Les deux biens coûtent une unité de paiement.
  - Une unité de bien privé donne un paiement de 5euros uniquement à celui qui l'achète.
  - Une unité de bien collectif donne un paiement de 1euro à celui qui l'achète et à tous les autres joueurs.
- Les joueurs jouent simultanément et tous les éléments ci-dessus sont connaissance commune.

- **Acheter 10 unités de bien privé et 0 unités de bien collectif est une stratégie strictement dominante pour chaque joueur.**
  - Soit c_j le montant investi par un joueur j dans le bien collectif.
  - Soit $C = c_1 + c_2 + \ldots + c_{100}$ le montant total investi par les joueurs dans le bien collectif et $C_{-j} = C - c_j$ le montant total investi par les autres joueurs que j.
  - Le paiement du joueur j est: $C+5(10 - c_j) = C_{-j}+50 - 4.c_j$.
  - Quelle que soit la contribution des autres, il est clair que $c_j=0$ donne un paiement strictement plus fort que toutes les autres stratégies dont dispose le joueur j (c.à.d. $c_j=1,2,\ldots,10$).
- **A l'ESSD personne ne contribue et chacun obtient 50 Euros.**

- **A l'optimum social égalitaire (où la somme des paiements est maximisée), chaque joueur investit uniquement dans le bien collectif et chaque joueur obtient 1000 Euros.**

  - La somme des paiements s'écrit :

$$C+5(10-c_1)+C+5(10-c_2)+\dots C+5(10-c_{100})$$
$$= 100C + 5000 - 5C = 95C+5000.$$

- Il est clair que $C=1000$ (soit $c_j=10$) maximise la somme des paiements.

- **Les comportements individuels rationnels conduisent à une allocation des ressources nettement sous-optimale.**

Exemple (bis). Surexploitation d'une ressource commune

- Le jeu du dilemme des prisonniers peut aussi rendre compte du problème de la surexploitation d'une ressource commune (tragédie des ressources communes de Hardin, 1968).
- Considérons deux pêcheurs sur une petite rivière à truites. Chacun a intérêt à pêcher le plus de truites possible, mais ce comportement réduit le stock de truite dans la rivière (les truites ne pouvant plus se reproduire à un taux suffisant).
- Forme stratégique du jeu:

(i) Il existe deux joueurs identiques: Pêcheur 1 et Pêcheur 2.

(ii) Chaque joueur dispose de deux stratégies possibles: soit il se restreint dans ses captures (stratégie R), soit il exploite la ressource au maximum (action E). Quatre issues sont possibles: (R;R), (R;E), (E;R) et (E;E).

(iii) Le paiement d'un joueur est donné par quantité de truites qu'il prélève: (2;2), (0;3), (3;0) et (1;1).

Matrice des paiements

		Pêcheur 2	
		R	E
Pêcheur 1	R	2 ; 2	0 ; 3
	E	3 ; 0	1 ; 1

- La situation est la même que celle décrite par le dilemme des prisonniers. L'issue du jeu est inefficace et la ressource commune est surexploitée.

- En fait, il y a dilemme des prisonniers chaque fois que l'on est en présence d'une matrice des paiements de la forme suivante :

		Joueur 2 A	Joueur 2 B
Joueur 1	A	x ; x	z ; w
	B	w ; z	y ; y

Avec w>x>y>z, chaque joueur dispose d'une stratégie strictement dominante (B car w>x et y>z) et l'ESSD en {B;B} est strictement Pareto-dominé par {A;A} (car x>y).

- **Beaucoup de problèmes économiques présentent une forme stratégique similaire à celle du dilemme des prisonniers**:
  - **Course à l'armement nucléaire**:
    - Chacun a intérêt à disposer d'une capacité nucléaire plus forte que les autres afin de paraître plus fort. Au final, chacun dispose d'une capacité nucléaire extrêmement élevée (donc coûteuse) mais inutile (car seule la capacité relative compte). L'égalité des forces ne peut constituer un équilibre dans ce jeu, encore moins à un niveau de capacité nucléaire bas.
  - **Réduction des émissions de gaz à effets de serre**:
    - Les pays ont collectivement intérêt à réduire les émissions, mais chacun préfère profiter des bienfaits des réductions des autres sans augmenter ses coûts en réduisant les siennes.
  - **Coordination des plans de relance économique**:
    - Les pays auraient intérêt à mettre en œuvre un plan coordonné mais chacun souhaite profiter des effets bénéfiques des plans des autres sans creuser son propre déficit.

Exemple. ESSD dans un jeu à trois joueurs

Joueur 3 : N

Joueur 1 \ Joueur 2	G	D
H	3 ; 3 ; 3	2 ; 5 ; -1
B	1 ; 1 ; 0	1 ; 5 ; 0

Joueur 3 : S

Joueur 1 \ Joueur 2	G	D
H	1 ; 1 ; 7	0 ; 9 ; 0
B	0 ; 0 ; 1	-1 ; 3 ; 1

- L'ESSD est {H,D,S}.

- Un joueur rationnel ne jouera jamais une stratégie strictement dominée.
  - Comme, dans ce cas particulier, le joueur n'a pas à tenir compte des stratégies des autres, les hypothèses **de connaissance commune de la rationalité** et d'intelligence des joueurs sont inutiles pour prédire qu'il ne jouera pas une stratégie strictement dominée.
  - Si un jeu admet un ESSD et si les joueurs sont rationnels, on peut considérer que l'ESSD est l'unique prédiction envisageable de l'issue du jeu (c'est également un état stable et c'est le seul du jeu).
- Par contre, l'hypothèse de rationalité n'interdit pas que les joueurs jouent une stratégie qui est seulement faiblement dominée.
  - En effet, une stratégie faiblement dominée peut être une stratégie aussi rationnelle que la stratégie qui la domine faiblement face à certaines combinaisons de stratégies des autres joueurs (car une stratégie faiblement dominée est équivalente à la stratégie qui la domine faiblement face à au moins une combinaison possible des stratégies des autres joueurs, sinon elle serait strictement dominée).
  - Précisons ce point.

DEFINITION

- Pour un joueur j, la stratégie a_j^* est une **meilleure réponse** à une combinaison de stratégies mixtes des autres joueurs α_{-j} ssi:

$$U_j(a_j^*, \alpha_{-j}) \geq U_j(a_j, \alpha_{-j}) \text{ pour tout } a_j \in \mathbf{A_j} \text{ et } a_j \neq a_j^* .$$

Lorsque l'inégalité est stricte, a_j^* est l'unique meilleure réponse à α_{-j}.

REMARQUE

- Une stratégie strictement dominée n'est jamais une meilleure réponse.
- Une stratégie strictement dominante est l'unique meilleure réponse à chaque combinaison possible de stratégies des autres joueurs.
- Une stratégie faiblement dominée (et non strictement dominée) peut être une meilleure réponse face à certaines combinaisons de stratégie des autres joueurs.
- Une stratégie faiblement dominante est une meilleure réponse à chaque combinaison possible de stratégies des autres joueurs.

Exemple. Limite de la dominance faible

		Joueur 2		
		G	C	D
Joueur 1	H	10 ; 10	3 ; 0	0 ; 10
	M	0 ; 0	2 ; -1	-1 ; 1
	B	10 ; 0	8 ; -1	0 ; 0

- Ce jeu n'admet pas d'ESSD. {B;D} est l'unique ESFD du jeu. Mais notez également que M et C sont strictement dominées.

❖ **DEFINITION**

- Après élimination itérative des stratégies **strictement** dominées d'un jeu dans sa forme initiale, on obtient un jeu plus simple, appelé **jeu réduit**. Le jeu réduit est parfaitement équivalent au jeu initial sous l'hypothèse de connaissance commune de la rationalité des joueurs.

- Si la rationalité est connaissance commune, chaque joueur considère, en fait, le jeu réduit suivant:

Joueur 2

Joueur 1	**G**	**D**
H	10 ; 10	0 ; 10
B	10 ; 0	0 ; 0

- Dans le jeu réduit toutes les stratégies sont équivalentes en terme de paiements.
  - Pour le joueur 1 (resp. 2), H et B (resp. G et D) donnent le même paiement face à chacune des stratégies possibles du joueur 2 (resp. 1).
  - Ainsi, toutes les issues du jeu réduit sont des états stables du jeu (chacune correspond à une combinaison de meilleures réponses) et peuvent tout à fait être jouées par des joueurs rationnels.

- Par contre, les paiements associés aux issues sont très différents du point de vue de l'efficacité.
  - L'ESFD du jeu non réduit{B;D} est Pareto-dominée par les quatre issues du jeu réduit.
  - {H;G} est Pareto-dominante (toutes les autres issues sont Pareto-dominées par elle).
- Contrairement au jeu du dilemme des prisonniers, l'apparition d'une issue Pareto-dominée n'est pas l'unique prédiction possible du jeu.
  - En fait, l'issue {H;G}, car Pareto-dominante, est l'issue la plus probable du jeu. On peut en effet penser que s'ils sont intelligents, les joueurs vont jouer {H;G}.
  - Plutôt que d'essayer de s'en convaincre en expliquant pourquoi cette issue sera jouée, on peut se demander pourquoi des individus qui comprennent tout ce que l'on vient dire sur ce jeu ne joueraient pas H et G ?
  - Une bonne raison de ne pas jouer B et D est qu'elles condamnent l'apparition de l'issue Pareto-dominante.

- Même si les joueurs ne sont pas intelligents, la répétition de ce jeu ou la consultation d'un expert devrait leur permettre d'apprendre, et ils devraient finir par se coordonner sur {H,G}.
- On peut également penser que, s'ils communiquent avant le jeu, les joueurs peuvent s'entendre pour jouer {H,G}.
- Au moment de jouer, la rationalité ne les incitera pas à dévier de l'entente tacite car ils n'ont rien à y gagner.
  - Ce jeu est donc très différent de celui du dilemme des prisonniers où l'entente tacite n'est pas un état stable.

- Compte tenu de ces arguments, l'ESFD du jeu initial, i.e. {B;D}, ne peut être considéré comme une bonne prédiction de l'issue du jeu.
  - D'une manière générale, l'ESFD est un concept de solution à manier avec précaution.

1.4. Elimination itérative des stratégies dominées

- Généralement, l'élimination des stratégies strictement dominées ne permet pas de dégager une issue unique du jeu. Autrement dit, **il n'existe pas nécessairement d'ESSD**.

- Toutefois, lorsque l'on cherche la solution d'un jeu, on commence toujours par éliminer les stratégies strictement dominées puisqu'elles ne sont jamais choisies par un joueur rationnel.

  - Après avoir éliminé une stratégie strictement dominée d'un joueur, il se peut que le jeu réduit comporte des stratégies strictement dominées pour d'autres joueurs (alors qu'elles ne l'étaient pas forcément dans le jeu initial). Sous l'hypothèse de connaissance commune de la rationalité, on peut résoudre certains jeux en éliminant les stratégies strictement dominées de manière successive.

  - **DEFINITION**

    - Lorsque l'on parvient à dégager une issue unique du jeu en éliminant par itérations successives les stratégies strictement dominées, cette issue constitue un Equilibre par **Elimination Itérative des Stratégies Strictement Dominées** (EEISSD par la suite). Tout ESSD est un EEISSD, mais la réciproque est fausse).

- Comme l'ESSD, l'EEISSD est un concept de solution robuste dans le sens ou, s'il existe, il est **l'unique prédiction de l'issue du jeu** ainsi que **l'unique état stable du jeu**.

- Contrairement à l'ESSD, **le concept d'EEISSD n'a de sens que si l'on suppose la connaissance commune de la rationalité**.
  - En effet, lorsque l'on résout un jeu par élimination itérative des stratégies strictement dominées, on suppose implicitement que les joueurs en font de même.
  - Alors, pour qu'un joueur puisse éliminer une stratégie strictement dominée du jeu réduit, il doit considérer que les autres joueurs sont rationnels et éliminent également les stratégies strictement dominées.
  - L'exemple suivant illustre une mise en œuvre fructueuse (conduisant à un équilibre) du processus d'élimination itérative des stratégies strictement dominées.

Exemple. EEISSD et connaissance commune de la rationalité

Joueur 2

Joueur 1		G	C	D
	H	3 ; 1	8 ; 0	2 ; 6
	M	4 ; 3	2 ; 2	3 ; 0
	B	3 ; 2	3 ; 1	4 ; 1

- Le joueur 1 ne possède pas de stratégie strictement ou faiblement dominante. Ce jeu n'admet donc pas d'ESSD ou d'ESFD.
- Toutefois la stratégie C du joueur 2 est strictement dominée par sa stratégie G (car 1>0, 3>2 et 2>1). Si le joueur 2 est rationnel, il ne jouera jamais C *(Elimination 1)*.

- Si le joueur 1 sait que le joueur 2 est rationnel, il considère le jeu réduit suivant:

Joueur 2

Joueur 1		G	D
	H	~~3 ; 1~~	~~2 ; 6~~
	M	4 ; 3	3 ; 0
	B	3 ; 2	4 ; 1

- Le joueur 1 possède maintenant une stratégie strictement dominée qui ne l'était pas dans le jeu initial. H est strictement dominée par M (car 4>3 et 3>2). Si le joueur 1 est rationnel, il ne jouera jamais H (*Elimination 2*).

- Si le joueur 2 sait que le joueur 1 est rationnel et sait que le joueur 1 sait que le joueur 2 est rationnel, il considère le jeu réduit suivant :

		Joueur 2	
		G	D
Joueur 1	M	4 ; 3	3 ; 0
	B	3 ; 2	4 ; 1

- Le joueur 2 possède maintenant une stratégie strictement dominée. D est strictement dominée par G (car 3>0 et 2>1). Si le joueur 2 est rationnel, il ne jouera jamais D *(Elimination 3)*.

- Si le joueur 1 sait que le joueur 2 est rationnel, sait que le joueur 2 sait que le joueur 1 est rationnel et sait que le joueur 1 sait que le joueur 2 est rationnel, il considère le jeu réduit suivant:

		Joueur 2
		G
Joueur 1	M	4 ; 3
	~~B~~	~~3 ; 2~~

- Le joueur 1 possède maintenant une stratégie strictement dominée. B est strictement dominée par M (car 4>3). Si le joueur 1 est rationnel, il ne jouera jamais B *(Elimination 4)*.

- L'issue ainsi obtenue est {M;G}. C'est un EEISSD.

Exemple. Domination par une stratégie mixte

- Lorsque l'élimination des stratégies strictement dominées ne permet pas de dégager une issue, on introduit des **stratégies mixtes**. On élimine alors les stratégies strictement dominées par au moins une stratégie mixte.

Joueur 2 (colonnes) / **Joueur 1** (lignes)

	G	C	D
H	1 ; 0	6 ; 4	5 ; 10
M	2 ; 1	2 ; 8	3 ; 0
B	6 ; 5	2 ; 2	7 ; 0

- On peut remarquer que chaque stratégie du joueur 2 est une meilleure réponse à au moins une stratégie du joueur 1. Pour le joueur 1, M est la seule stratégie du joueur 1 qui ne soit une meilleure réponse à aucune stratégie pure du joueur 2. C'est donc la seule stratégie que l'on peut tenter d'éliminer.

- M est strictement dominée par la stratégie mixte $\alpha_1=(\alpha_1(H), \alpha_1(M), \alpha_1(B))=(½, 0, ½)$ car: $2 < ½.1 + 0.2 + ½.6 = 3{,}5$ et $2 < ½.6 + 0.2 + ½.2 = 4$ et $3 < ½.5 + 0.3 + ½.7 = 6$) *(Elimination 1)*.
  - M est en fait strictement dominée par toutes les stratégies mixtes $\alpha_1=(p_1, 0, 1-p_1)$ telles que: $2<1.p_1+6.(1-p_1)$ et $2<6.p_1+2.(1-p_1)$ et $3<5.p_1+7(1-p_1)$. Soit: $p_1<4/5$ et $0<p_1$ et $p_1<2 \Leftrightarrow 0<p_1<4/5$.

- C est strictement dominée, notamment par la stratégie mixte $\alpha_2=(\alpha_2(G), \alpha_2(C), \alpha_2(D))=(½, 0, ½)$ ($4<½.0+0.4+½.10=5$ et $2<½.5+0.2+½.0=2{,}5$) *(Elimination 2)*.
  - C est strictement dominée par toutes les stratégies mixtes $\alpha_2=(p_2, 0, 1-p_2)$ telles que: $4<0.p_2+10.(1-p_2)$ et $2<5.p_2+0.(1-p_2)$. Soit: $p_2<3/5$ et $2/5<p_2 \Leftrightarrow 2/5<p_2<3/5$.
- H est strictement dominée par B ($1<6$ et $5<7$), puis D est strictement dominée par G ($0<5$) *(Eliminations 3 et 4)*.

- Comme nous l'avons vu précédemment, il est parfois difficile de justifier l'utilisation d'une stratégie mixte par un joueur lorsqu'on l'interprète comme un **objet de choix**.
  - On peut alors s'interroger sur la pertinence de l'EEISSD comme concept de solution lorsque l'on élimine des stratégies strictement dominées uniquement par une ou des stratégies mixtes.
- Le théorème suivant établit qu'il n'est en fait pas nécessaire de considérer les stratégies mixtes pour pouvoir procéder à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées.

✓ **THEOREME**

  ✓ Lorsque les ensembles des stratégies des joueurs sont finis, une stratégie pure d'un joueur n'est une meilleure réponse à aucune croyance du joueur sur les stratégies (mixtes) des autres joueurs si et seulement si elle est strictement dominée.

➢ REMARQUE

- ➢ D'après le théorème précédent, si une stratégie est strictement dominée pour un joueur, elle n'est une meilleure réponse à aucune combinaison de stratégies pures des autres joueurs. Toutefois, **la réciproque est fausse**, comme l'illustre l'exemple suivant.

Joueur 2

Joueur 1		G	D
	H	2 ; 1	0 ; 6
	M	0 ; 3	2 ; 0
	B	1 ; 2	1 ; 1

- Pour le joueur 1, B n'est une meilleure réponse à aucune stratégie pure du joueur 2. Pourtant, B n'est pas strictement dominée.

Exemple. L'inclusion des stratégies faiblement dominées dans le processus d'élimination

			Joueur 2	
		G	C	D
Joueur 1	H	0 ; 5	2 ; 5	8 ; 5
	M	9 ; 0	2 ; 4	3 ; 6
	B	10 ; 3	2 ; 8	3 ; 3

- Aucun joueur ne dispose d'une stratégie strictement dominée. Toutefois, M est faiblement dominée par B, et G est faiblement dominée par C et D.
- Nous allons voir que selon l'ordre dans lequel les stratégies faiblement dominées sont éliminées conduit à identifier des issues différentes.

- <u>Scénario 1:</u> Élimination de M, puis D (faiblement dominée par C), puis H (faiblement dominée par B), et enfin G (strictement dominée par C). L'issue est{B,C}.

Joueur 2

Joueur 1		G	C	D
	H	0 ; 5	2 ; 5	8 ; 5
	M	9 ; 0	2 ; 4	3 ; 6
	B	10 ; 3	2 ; 8	3 ; 3

- <u>Scénario 2:</u> Élimination de G, puis B (faiblement dominée par H), puis C (faiblement dominée par D), et enfin M (strictement dominée par H). L'issue est{H,D}.

Joueur 2

Joueur 1		G	C	D
	H	0 ; 5	2 ; 5	8 ; 5
	M	9 ; 0	2 ; 4	3 ; 6
	B	10 ; 3	2 ; 8	3 ; 3

- Scénario 3: Élimination de M, puis G et D (faiblement dominées par C). Les issues sont{H,C} et {B,C}.

		Joueur 2		
		G	C	D
Joueur 1	H	0 ; 5	2 ; 5	8 ; 5
	M	9 ; 0	2 ; 4	3 ; 6
	B	10 ; 3	2 ; 8	3 ; 3

- L'élimination itérative des stratégies faiblement dominées n'est généralement pas une méthode satisfaisante pour résoudre un jeu.
  - Elle reste toutefois pertinente dans certains contextes.

1.5. Stratégies rationalisables

- Déterminer les **stratégies rationalisables** des joueurs constitue une approche complémentaire à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées.
  - Il s'agit de **déduire de l'hypothèses de connaissance commune de la rationalité** des joueurs, les issues qui peuvent être jouées (plutôt que celles qui ne peuvent pas l'être), c.à.d. celles qui ne contredisent pas cette hypothèse.

- **<u>DEFINITION</u>**
  - Une stratégie a_j du joueur j est rationalisable si elle est une meilleure réponse à au moins une croyance du joueur j sur les stratégies des autres joueurs, et cette croyance doit spécifier des stratégies rationalisables aux autres joueurs.

- **<u>THEOREME</u>**
  - Si une stratégie pure d'un joueur est strictement dominée, elle n'est pas rationalisable.

Exemple. Stratégies rationalisables

Joueur 2

Joueur 1

	G	C1	C2	D
H	2 ; 0	$\underline{0}$; $\underline{1}$	2 ; 0	-5 ; -2
M1	$\underline{4}$; -2	-1 ; 3	-3 ; $\underline{5}$	-4 ; -2
M2	-3 ; $\underline{5}$	-1 ; 3	$\underline{4}$; -2	$\underline{-3}$; -2
B	2 ; -2	-1 ; -2	-1 ; -2	-5 ; $\underline{8}$

- Les meilleures réponses des joueurs sont identifiées en soulignant les paiements dans la matrice. Par exemple, M1 est une meilleure réponse du joueur 1 à G car: $4 \geq 2$ (en jouant H) et $4 \geq -3$ (en jouant M2) et $4 \geq 2$ (en jouant B). De même C2 est une meilleure réponse du joueur 2 à M1 car: $5 \geq -2$ (en jouant G) et $5 \geq 3$ (en jouant C1) et $5 \geq -2$ (en jouant D).

- Pour le joueur 1, il est rationnel de jouer H si **le joueur 1 pense que le joueur 2 va jouer C1 (croyance d'ordre 1)**. Cette croyance rend rationnel le choix de la stratégie H.
  - Le joueur 1 sait qu'il est rationnel pour le joueur 2 de jouer C1 si le joueur 2 pense que le joueur 1 va jouer H. **Le joueur 1 pense que le joueur 2 pense que le joueur 1 joue H (croyance d'ordre 2)**.
    - <u>H et C1 sont rationalisables.</u>

- Pour le joueur 1, il est rationnel de jouer M1 si **le joueur 1 pense que le joueur 2 va jouer G (croyance d'ordre 1)**. Cette croyance rend rationnel le choix de la stratégie M1.
  - Le joueur 1 sait qu'il est rationnel pour le joueur 2 de jouer G si le joueur 2 pense que le joueur 1 va jouer M2. **Le joueur 1 pense que le joueur 2 pense que le joueur 1 va jouer M2 (croyance d'ordre 2)**.

- Pour le joueur 1, il est rationnel de jouer M2 s'il pense que le joueur 2 va jouer C2. Le joueur 2 sait cela. Le joueur 1 sait que le joueur 2 le sait. **Le joueur 1 pense que le joueur 2 pense que le joueur 1 pense que le joueur 2 va jouer C2 (croyance d'ordre 3)**.

  - Finalement, pour le joueur 2, il est rationnel de jouer C2 s'il pense que le joueur 1 va jouer M1. **Le joueur 1 pense que le joueur 2 pense que le joueur 1 pense que le joueur 2 pense que le joueur 1 va jouer M1 (croyance d'ordre 4)**.

    - <u>M1, M2, G et C2 sont rationalisables.</u>

- Pour le joueur 1, il n'est jamais rationnel de jouer B quelle que soit sa croyance sur le choix du joueur 2. En effet, B est strictement dominée, notamment par la stratégie mixte: $\alpha_1=(\alpha_1(H), \alpha_1(M1), \alpha_1(M2), \alpha_1(B))=(½, ½, 0, 0)$ car: $2<½.2+½.4+0.(-3)+0.2=3$ <u>et</u> $-1<½.0+½.(-1)+0.(-1)+0.(-1)=-½$ <u>et</u> $-1<½.2+½.(-3)+0.4+0.(-1)=-½$ <u>et</u> $-5<½.(-5)+½.(-4)+0.(-3)+0.(-5)=-9/2$.

  - <u>B n'est pas rationalisable.</u>

- Pour le joueur 2, il est rationnel de jouer D <u>uniquement</u> s'il pense que le joueur 1 va jouer B. Mais B n'est pas rationalisable pour le joueur 1.

  - <u>D n'est donc pas rationalisable.</u>

- On peut remarquer que ce sont précisément les stratégies qui survivent à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées (après avoir éliminé B, D est strictement dominée par C1).

- Ce n'est pas un hasard. Le théorème suivant établit que c'est toujours le cas dans les jeux à deux joueurs.

- **THEOREME**. *Pearce (1984)*
  - Dans les jeux à deux joueurs, l'ensemble des stratégies rationalisables des joueurs se confond avec l'ensemble des stratégies qui résistent à l'élimination itératives des stratégies strictement dominées.

- Dans les jeux à plus de deux joueurs, les stratégies qui ne survivent pas à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées ne sont pas rationalisables (comme dans les jeux à deux joueurs), mais la réciproque est fausse.
  - Ainsi, **l'ensemble des stratégies rationalisables est inclus dans l'ensemble des stratégies qui survivent à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées**.

- Si l'on affaiblit la notion de stratégie rationalisable, en supposant que les stratégies des joueurs peuvent être **corrélées** (et non plus indépendantes), le théorème s'applique aux jeux à plus de deux joueurs.

- L'exemple suivant illustre ce point.

Exemple. Stratégies rationalisables et élimination itérative des stratégies strictement dominées dans un jeu à plus de deux joueurs

Joueur 3 : N1

Joueur 1 \ Joueur 2	G	D
H	2;2;$\underline{2}$	0;0;0
B	0;0;0	0;0;0

Joueur 3 : N2

Joueur 1 \ Joueur 2	G	D
H	1;1;1	0;0;0
B	0;0;0	1;1;1

Joueur 3 : S1

Joueur 1 \ Joueur 2	G	D
H	0;0;0	2;2;$\underline{2}$
B	2;2;$\underline{2}$	0;0;0

Joueur 3 : S2

Joueur 1 \ Joueur 2	G	D
H	0;0;0	0;0;0
B	0;0;0	2;2;$\underline{2}$

- Aucun joueur ne possède de stratégie strictement dominée. Les paiements associés aux meilleures réponses du joueur 3 ont été soulignés.

- Pour le joueur 3, la stratégie N2 n'est une meilleure réponse à aucune combinaison de stratégies mixtes **indépendantes** des autres joueurs $\alpha_{-3} = (\alpha_1, \alpha_2)$. N2 n'est pas rationalisable.

  - Preuve.

Les stratégies mixtes des joueurs 1 et 2 s'écrivent:

$\alpha_1 = (\alpha_1(H), \alpha_1(B)) = (p_1, 1-p_1)$ et $\alpha_2 = (\alpha_2(G), \alpha_2(D)) = (p_2, 1-p_2)$.

Face à elles, les paiements du joueur 3 sont:

$U_3(N1, \alpha_1, \alpha_2) = 2.p_1.\, p_2$

$U_3(N2, \alpha_1, \alpha_2) = 1.p_1.\, p_2 + 1.(1-p_1)(1-p_2)$

$U_3(S1, \alpha_1, \alpha_2) = 2.p_1.(1-p_2) + 2.(1-p_1).p_2$

$U_3(S2, \alpha_1, \alpha_2) = 2.(1-p_1)(1-p_2)$

N2 est une meilleure réponse à α_{-3}, si et seulement si:

(i) $U_3(N2, \alpha_{-3}) \geq U_3(N1, \alpha_{-3})$

(ii) $U_3(N2, \alpha_{-3}) \geq U_3(S1, \alpha_{-3})$

(iii) $U_3(N2, \alpha_{-3}) \geq U_3(S2, \alpha_{-3})$

Soit :

(i) $1 \geq p_1 + p_2$

(ii) $1 \geq 3.p_1 + 3.p_2 - 6.p_1.\ p_2$

(iii) $p_1 + p_2 \geq 1$

Les conditions (i) et (iii) impliquent $1 = p_1 + p_2$. Avec (ii), il vient: (iv) $0 \geq 1 - 3.p_1 + 3.(p_1)^2 = f(p_1)$

La fonction f est en forme de U, décroissante sur $[0;½]$ puis croissante sur $[½;1]$ et admet donc un minimum en ½ : $f(½) = ¼$.

La condition (iv) n'est vérifiée pour aucune valeur de $p_1 \in [0;1]$. CQFD.

- <u>N2 n'est pas rationalisable mais montrons qu'elle survit à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées</u>.

Preuve.

Il est clair que les joueurs 1 et 2 n'ont aucune stratégie strictement dominée. De plus, N1, S1 et S2 ne peuvent être strictement dominées.

N2 est strictement dominée s'il existe au moins une stratégie mixte:

$\alpha_3=(\alpha_3(N1), \alpha_3(N2)=0, \alpha_3(S1), \alpha_3(S2))=(p_3,0, q_3, 1-p_3 -q_3)$

dont le paiement est strictement plus fort que celui de N2 face à chaque combinaison possible de stratégies des autres joueurs:

(i) $U_3(N2,H,G)<U_3(\alpha_3,H,G)$

(ii) $U_3(N2,H,D)<U_3(\alpha_3,H,D)$

(iii) $U_3(N2,B,G)<U_3(\alpha_3,B,G)$

(iiii) $U_3(N2,B,D)<U_3(\alpha_3,B,D)$.

Soit:

(i) $1<U_3(\alpha_3,H,G)=p_3.U_3(N1,H,G)+q_3.U_3(S1,H,G)+(1-p_3-q_3).U_3(S2,H,G)=2.p_3$

(ii) $0<U_3(\alpha_3,H,D)=p_3.U_3(N1,H,D)+q_3.U_3(S1,H,D)+(1-p_3-q_3).U_3(S2,H,D)= 2.q_3$

(iii) $0<U_3(\alpha_3,B,G)=p_3.U_3(N1,B,G)+q_3.U_3(S1,B,G)+(1-p_3-q_3).U_3(S2,B,G)= 2.q_3$

(iv) $1<U_3(\alpha_3,B,D)=p_3.U_3(N1,B,D)+q_3.U_3(S1,B,D)+(1-p_3-q_3).U_3(S2,B,D)=2.(1-p_3-q_3)$

Enfin, (i) implique $p_3 >½$, tandis que (ii) et (iii) sont identiques et impliquent $q_3>0$.

Ainsi, on doit avoir $p_3+q_3 >½$, mais (iv) implique $p_3+q_3< ½$. Impossible. CQFD.

- Supposons maintenant que le joueur 3 considère que les stratégies des autres joueurs ne sont plus indépendantes mais **corrélées**. Ainsi, il attribue des probabilités (dont la somme est égale à un) aux différentes combinaisons possibles de stratégies des autres joueurs. Tout ce passe alors comme si le joueur 3 faisait face à un unique joueur jouant la stratégie mixte:

  $\beta_{-3} = (\beta_{-3}(HG), \beta_{-3}(HD), \beta_{-3}(BG), \beta_{-3}(BD))=(x, y, z, 1\text{-}x\text{-}y\text{-}z)$.

  - Le jeu est ainsi ramené à un jeu à deux joueurs. Le théorème s'applique et <u>N2 est rationalisable pour le joueur 3</u>.

Preuve.

Face à β_{-3}, les paiements du joueur 3 sont:

$U_3(N1, \beta_{-3})=2.x$

$U_3(N2, \beta_{-3})=1.x+1.(1-x-y-z)=1-y-z$

$U_3(S1, \beta_{-3})=2.y+2.z$

$U_3(S2, \beta_{-3})=2.(1-x-y-z)$

N2 est une meilleure réponse à β_{-3}, si et seulement si :

(i) $U_3(N2, \beta_{-3}) \geq U_3(N1, \beta_{-3})$

(ii) $U_3(N2, \beta_{-3}) \geq U_3(S1, \beta_{-3})$

(iii) $U_3(N2, \beta_{-3}) \geq U_3(S2, \beta_{-3})$

Soit :

(i) $1 \geq 2.x+y+z$

(ii) $⅓ \geq y+z$

(iii) $2x+y+z \geq 1$

(i) et (iii) impliquent $2.x+y+z-1=0$. Avec (ii), il vient $x \geq ⅓$.

Par exemple, β_{-3*}=(½, 0, 0, ½) vérifie toutes les contraintes.

N2 est donc une meilleure réponse du joueur 3 à β_{-3*} .

Croyance d'ordre 1. « Le joueur 3 pense que les autres joueurs vont jouer β_{-3*} ».

HG et BD sont des meilleures réponses à N2 (elles donnent chacune un paiement de 1).

Toute stratégie mixte corrélée (x, 0, 0, 1-x) des joueurs 1 et 2 est ainsi une meilleure réponse à N2.

Donc, β_{-3*} est une meilleure réponse à N2.

Croyance d'ordre 2. « Le joueur 3 pense que les autres joueurs pensent que le joueur 3 va jouer N2 ». N2 et β_{-3*} sont rationalisables. CQFD.

- <u>N2 est rationalisable lorsque les stratégies des joueurs 1 et 2 sont corrélées.</u>

1.6. Critère de prudence, paiement MaxiMin et jeux à somme nulle

- Pour un joueur, le critère de prudence implique d'évaluer chaque stratégie dans le pire des cas possibles. Après avoir déterminé le paiement minimum qu'il peut obtenir pour chacune des stratégies dont il dispose, le joueur choisit **la stratégie donnant le plus grand paiement minimum**. Cette stratégie est qualifiée de **stratégie prudente**.

❖ **<u>DEFINITION</u>**

- ❖ Le paiement MaxiMin (ou paiement de sécurité) s_j d'un joueur j est le plus grand montant espéré qu'il peut se garantir quelles que soient les stratégies des autres joueurs:

$$s_j = \mathrm{Max}_{\boldsymbol{\alpha}_j \in \mathbf{A}_j} \{\mathrm{Min}_{\mathbf{a}_{-j} \in \mathbf{A}_{-j}} \{U(\boldsymbol{\alpha}_j, \mathbf{a}_{-j})\}\}$$

- ❖ Une stratégie prudente $\boldsymbol{\alpha}_{j*}$ du jouer j est une solution du programme de maximisation ci-dessus.

Exemple. Stratégies prudentes et paiement Maximin

Joueur 2

Joueur 1		G	D
	H	8 ; 10	-100 ; 9
	B	7 ; 6	6 ; 5

On pose: $\alpha_1=(\alpha_1(H), \alpha_1(B))=(p_1, 1-p_1)$ et $\alpha_2=(\alpha_2(G), \alpha_2(D))=(p_2, 1-p_2)$.

- <u>Pour le joueur 1:</u>

$U_1(\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{1}},a_{2*})=\mathrm{Min}_{a_2\,\epsilon\{G,D\}}\{U_1(\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{1}},a_2)=p_1.u_1(H,a_2)+(1-p_1).u_1(B,a_2)\}$

$=\mathrm{Min}_{\{G,D\}}\{U_1(\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{1}},G)=7+p_1\,;\,U_1(\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{1}},D)=6-106.p_1\}$

$\Rightarrow U_1(\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{1}},a_{2*})=U_1(\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{1}},D)=6-106.p_1$ (car pour tout $p_1\,\epsilon[0,1]$, $6-106.p_1<7+p_1$).

- Le joueur 1 sait qu'il obtiendra au pire $6-106.p_1$ (lorsque le joueur 2 joue D). Ce paiement est maximum lorsque $p_1=0$.

$\Rightarrow \mathrm{Max}_{\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{1}}\,\epsilon \mathbf{A_1}}\,U_1(\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{1}},D)=6$

- Sa **stratégie prudente** est donc $\boldsymbol{\alpha}_{\mathbf{1*}}=(0,1)$, c.à.d. la stratégie pure B.

- Son **paiement MaxiMin** est $s_1=U_1(B,D)=6$.

- <u>Pour le joueur 2:</u>

$U_2(\alpha_2, a_{1*}) = \text{Min}_{a_1 \in \{H,B\}} \{U_2(\alpha_2, a_1) = p_2.u_2(G, a_1) + (1-p_2).u_2(D, a_1)\}$

$= \text{Min}_{a_1 \in \{H,B\}} \{U_2(\alpha_2, H) = 9+p_2 \,;\, U_2(\alpha_2, B) = 5+p_2\}$

$\Rightarrow U_2(p_2, a_{1*}) = U_2(p_2, B) = 5+p_2$ (car pour tout $p_2 \in [0,1]$, $5+p_2 < 9+p_2$).

- Le joueur 2 sait qu'il obtiendra au pire $5+p_2$ (lorsque le joueur 1 joue B). Ce paiement est maximum lorsque $p_2 = 1$.

$\Rightarrow \text{Max}_{\alpha_2 \in A_2} U_2(\alpha_2, B) = 6$

- Sa **stratégie prudente** est donc $\alpha_{2*} = (1,0)$, c.à.d. la stratégie pure G.
- Son **paiement MaxiMin** est $s_2 = U_2(G,B) = 6$.

- On peut également calculer le **paiement MiniMax**.

❖ **DEFINITION**

- ❖ Le paiement MiniMax (ou paiement de punition) v_j d'un joueur j est le plus petit paiement auquel le joueur j peut être contraint s'il se défend de manière optimal (en jouant une meilleure réponse aux stratégies des autres joueurs) :

$$v_j = \mathrm{Min}_{\alpha_{-j} \in A_{-j}} \{\mathrm{Max}_{a_j \in A_j} \{U_j(a_j, \alpha_{-j})\}\}$$

- Pour le joueur 1:

$\mathrm{Max}_{a_1 \in \{H,B\}} \{U_1 (a_1, \boldsymbol{\alpha}_2) = p_2.u_1(a_1, G) + (1-p_2).u_1(a_1, D)\}$

$\mathrm{Max}_{a_1 \in \{H,B\}} \{U_1(H, \boldsymbol{\alpha}_2) = 108.p_2 - 100 \; ; \; U_1(B, \boldsymbol{\alpha}_2) = p_2 + 6\}$

On a:

$U_1(H, \boldsymbol{\alpha}_2) > U_1(B, \boldsymbol{\alpha}_2)$ si $p_2 > 106/107$

$U_1(H, \boldsymbol{\alpha}_2) < U_1(B, \boldsymbol{\alpha}_2)$ si $p_2 < 106/107$

$U_1(H, \boldsymbol{\alpha}_2) = U_1(B, \boldsymbol{\alpha}_2) = 748/107 = 6{,}991\ldots$ si $p_2 = 106/107$

Donc

$\mathrm{Max}_{a_1 \in \{H,B\}} \{U_1(a_1, \boldsymbol{\alpha}_2)\} = U_1(H, \boldsymbol{\alpha}_2) = 108.p_2 - 100$ si $p_2 > 106/107$

$\mathrm{Max}_{a_1 \in \{H,B\}} \{U_1(a_1, \boldsymbol{\alpha}_2)\} = U_1(B, \boldsymbol{\alpha}_2) = p_2 + 6$ si $p_2 < 106/107$

- Le paiement du joueur 1 est minimum lorsque le joueur 2 joue $p_2 = 0$ (le joueur 2 joue la stratégie pure D).
- Le **paiement MiniMax** du joueur 1 est $v_1 = U_1(B, D) = 6$.

- <u>Pour le joueur 2:</u>

$$\mathrm{Max}_{a_2 \in \{G,D\}} \{U_2(a_2, \boldsymbol{\alpha}_1) = p_1.u_2(a_2, H) + (1-p_1).u_2(a_2, B)\}$$

$$= \mathrm{Max}_{\{G,D\}} \{U_2(G, \boldsymbol{\alpha}_1) = 4.p_1 + 6 \ ; \ U_2(D, \boldsymbol{\alpha}_1) = 4.p_1 + 5\}$$

$$= U_2(G, \boldsymbol{\alpha}_1) = 4.p_1 + 6$$

- Le paiement du joueur 2 est minimum lorsque le joueur 1 joue $p_1 = 0$ (le joueur 1 joue la stratégie pure B).

- Le **paiement MiniMax** du joueur 2 est $v_2 = U_2(G, B) = 6$.

- Après avoir les stratégies prudentes des joueurs, on peut se demander pourquoi considérer les stratégies mixtes puisque, dans l'exemple ci-dessus, on obtient des stratégies prudentes qui sont des stratégies pures.

  - On aurait, en effet, pu déterminer les stratégies prudentes des joueurs plus simplement. Dans le pire des cas, le joueur 1 obtient -100 en jouant H, et 6 en jouant B. Sa stratégie prudente est B. Le joueur 2 obtient au pire 6 en jouant G, et 5 en jouant D. Sa **stratégie prudente** est G.

    - On retrouve les paiements **MaxiMin** $s_1 = s_2 = 6$.

- De même pour les paiements **MiniMax**. Le joueur 1, obtient au mieux 8 face à G et 6 face à D. Le joueur 2, obtient au mieux 10 face à H et 6 face à B. Le plus petit de ces paiements est 6 pour les deux joueurs.

    - On retrouve les paiements **MiniMax** $v_1 = v_2 = 6$.

- Lorsque l'on cherche les stratégies prudentes d'un joueur, on peut vérifier rapidement s'il l'on doit ou non considérer des stratégies mixtes.

  - Il s'agit alors de déterminer si, lorsque tous les autres joueurs adoptent des stratégies pures, le paiement **MaxiMin** du joueur est égal à son paiement **MiniMax**. Si tel est le cas, i.e. si $s_j = v_j$, on peut ignorer les stratégies mixtes car la stratégie prudente du joueur est nécessairement une stratégie pure (comme dans l'Exemple précédent).

    - D'un point de vue mathématique, il s'agit de déterminer si la fonction de paiement d'un joueur admet un **point selle**. Dans la matrice des paiements d'un jeu à deux joueurs où seuls les paiements du joueur 1 apparaissent, il existe un point selle si un élément de cette matrice est à la fois le plus petit élément d'une ligne et le plus grand élément d'une colonne.

  - Lorsque, en stratégies pures, $s_j \neq v_j$, alors s_j n'est pas le paiement de sécurité du joueur j et v_j n'est pas son paiement de punition. On doit alors considérer les stratégies mixtes.

L'exemple suivant illustre ce point.

Exemple. Stratégies mixtes prudentes

		Joueur 2		
		G	C	D
Joueur 1	H	3 ; 1	3 ; 2	6 ; 3
	M	2 ; 6	4 ; 0	4 ; 2
	B	4 ; 0	7 ; 3	5 ; 4

- En stratégies pures, les paiements MaxiMin et MiniMax du joueur 1 sont égaux: $v_1=s_1=4$. La stratégie prudente du joueur 1 est donc simplement B.
- En stratégies pures, le paiement MiniMax du joueur 2 est $v_2=3$, son paiement MaxiMin est $s_2=2$. La stratégie prudente du joueur 2 n'est donc pas D.
  - On doit alors considérer la possibilité pour le joueur 2 d'adopter une stratégie mixte.

- On peut remarquer que C est strictement dominée par D. On peut l'éliminer. Notez que nous n'avons pas éliminé C dans la recherche de la stratégie prudente du joueur 1.

- Soit $\boldsymbol{\alpha}_2=(\alpha_2(G),\ \alpha_2(D))=(1-p_2,\ p_2)$ une stratégie mixte du joueur 2. On peut calculer le paiement espéré associé à cette stratégie mixte face à chacune des stratégies du joueur 1:

  $U_2(\boldsymbol{\alpha}_2, H) = 1+2.p_2$, $U_2(\boldsymbol{\alpha}_2, M)=6-4.p_2$ et $U_2(\boldsymbol{\alpha}_2, B)=4.p_2$.

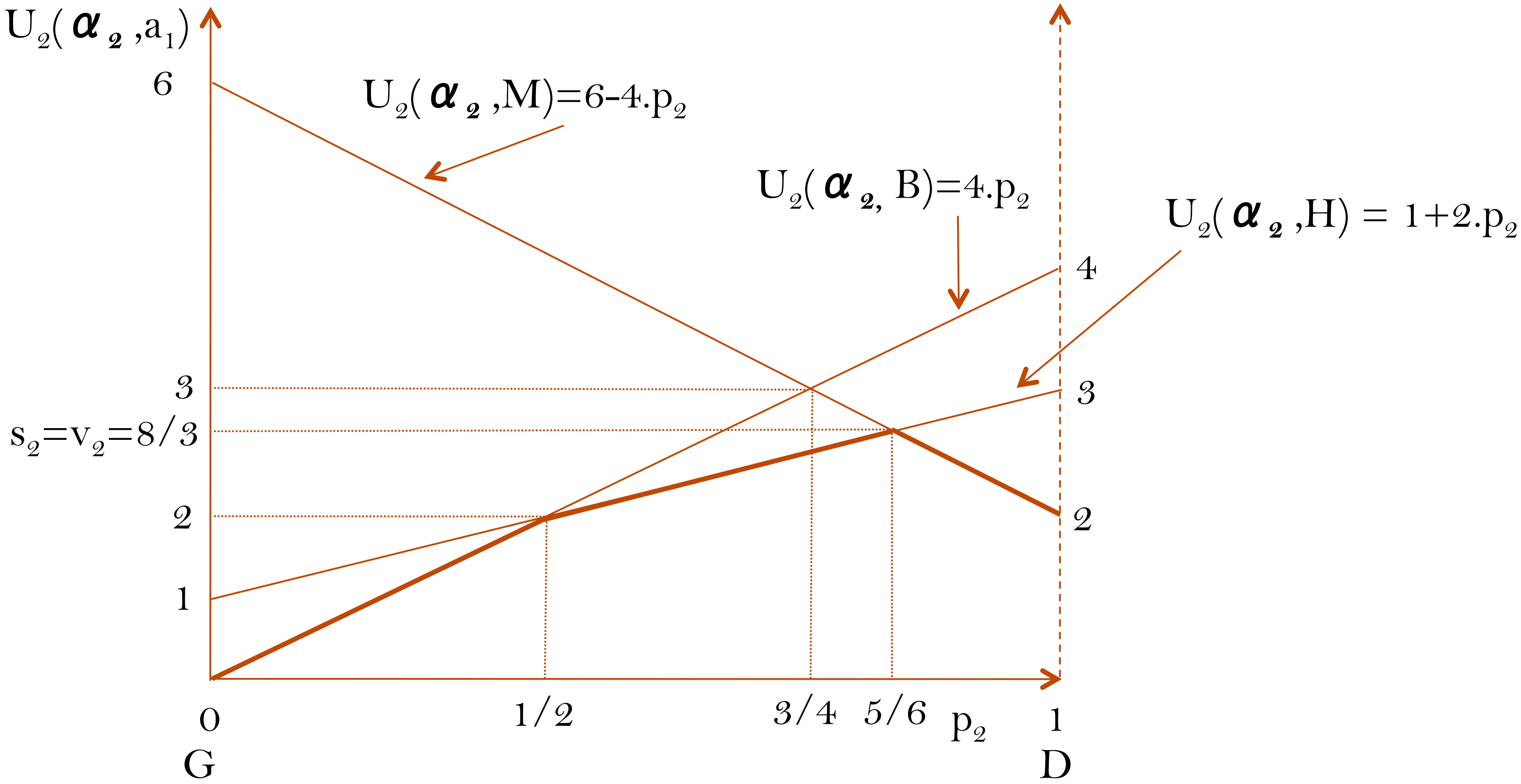
  On peut les représenter graphiquement, dans le repère:

  $(p_2\,;\ U_2(\boldsymbol{\alpha}_2, a_1))$.

- Pour chaque stratégie mixte dont il dispose, c.à.d. chaque valeur de p_2, le joueur 2 envisage la pire réponse possible du joueur 1. On marque **en gras** les segments de droite « **les plus bas** » où le paiement espéré est le plus faible (i.e. l'enveloppe inférieure des droites).

- Enfin, il choisit sa stratégie prudente de manière à maximiser ce paiement minimum. Graphiquement, lorsque $p_2=5/6$. Son paiement de sécurité est $s_2=v_2=8/3=2{,}666\ldots$ Sa stratégie prudente est $\boldsymbol{\alpha}_2=(1/6,\ 5/6)$.

- <u>Illustration graphique:</u>



- On peut alors se demander s'il est rationnel de jouer une stratégie prudente?
  - Dans un Exemple étudié ci-dessus (diapositive 67), la stratégie prudente du joueur 1 est B. Il s'agit intuitivement d'éviter -100. Le joueur 1 ne peut obtenir -100 que si le joueur 2 joue la stratégie D . Or D est strictement dominée pour le joueur 2.
    - Pourquoi le joueur 1 ferait-il l'hypothèse que le joueur 2 va rigoureusement chercher à minimiser le paiement du joueur 1?
      - Cette hypothèse est ici particulièrement paranoïde car le joueur 1 suppose que le joueur 2 est prêt à jouer une stratégie strictement dominée (D) pour minimiser le paiement du joueur 1.
      - En fait, **lorsqu'un joueur détermine sa stratégie prudente il ne considère aucunement les paiements des autres joueurs**. C'est ce qui limite significativement la pertinence des stratégies prudentes.

- En outre, si les joueurs ont la possibilité de communiquer avant de jouer le jeu, ils vont sans ambigüité s'entendre pour atteindre l'issue {H,G}, car c'est un EEISSD (l'entente sur cette issue est donc stable).

- Ainsi, l'utilisation des stratégies prudentes ne constitue pas une règle générale pour la prise de décisions en univers risqué.
  - Lorsqu'un joueur détermine sa stratégie prudente, il ne considère pas que ses adversaires jouent au hasard. Bien au contraire, il considère que ces derniers cherchent à minimiser son paiement.
    - Adopter une stratégie prudente ne signifie donc pas considérer que l'adversaire joue au hasard, mais plutôt qu'il joue systématiquement contre vous, y compris à ses dépens.

- Dans certains jeux, **les jeux à deux joueurs et à somme nulle, les stratégies prudentes des joueurs sont toujours rationnelles**.
  - En effet, si chaque joueur est rationnel, il va maximiser son paiement. Dans un jeu à somme nulle, cela est équivalent à minimiser le paiement de l'autre.
  - De plus le paiement **MaxiMin** d'un joueur est nécessairement égal, au signe près, au paiement **MiniMax** de l'autre joueur: $v_1 = -s_2$ et $v_2 = -s_1$.

❖ **DEFINITION**

- ❖ Lorsque, $s_1 = v_1 = -s_2 = -v_2 = V$ on dit que V est la valeur du jeu.

✓ **THEOREME. Von Neumann (1928)**

- ✓ Tout jeu fini, statique, à information complète, à deux joueurs et à somme nulle possède une valeur.

Exemple. Pile ou face?

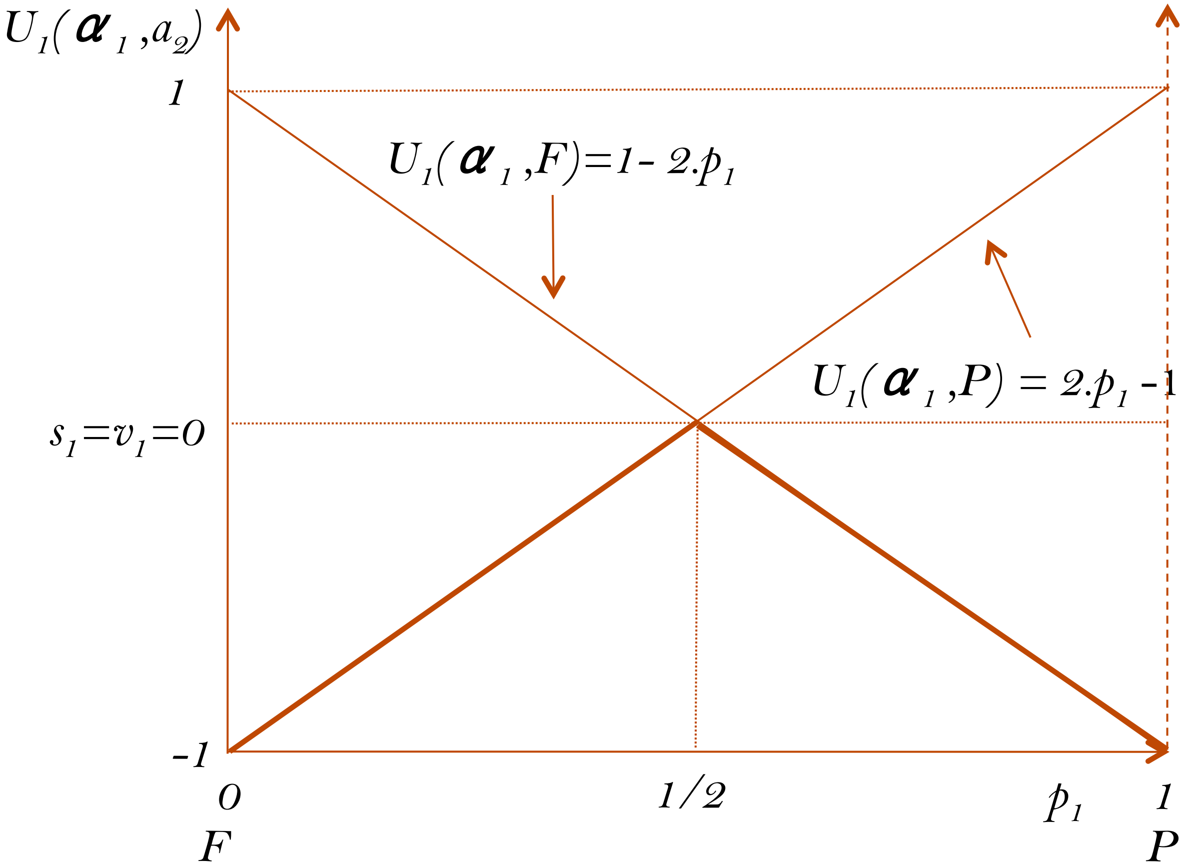
		joueur 2: P	joueur 2: F
Joueur 1	P	1	-1
	F	-1	1

- Lorsque l'on étudie un jeu à deux joueurs et à somme nulle, on fait généralement apparaître uniquement les paiements du joueur 1.

- Cette matrice n'admet pas de point selle. En stratégies pures, v_1=-1 et s_1=1. Considérons les stratégies mixtes. Soit $\alpha_1=(\alpha_1(P), \alpha_1(F))=(p_1, 1-p_1)$ une stratégie mixte du joueur 1. On peut calculer le paiement espéré associé à cette stratégie mixte face à chacune des stratégies du joueur 2: $U_1(\alpha_1, P) = 2.p_1 - 1$ et $U_1(\alpha_1, F) = 1 - 2.p_1$.

- Pour chaque joueur, la stratégie mixte $\alpha_j = (½, ½)$ est une stratégie prudente. La valeur de ce jeu est V=0.

- <u>Illustration graphique:</u>



1.7. Equilibre de Nash

- L'**équilibre de Nash** (1951), EN par la suite, est un concept fondamental de la théorie des jeux.

❖ **DEFINITION**

- ❖ Dans un jeu sous forme stratégique, une combinaison de stratégies α_* est un Equilibre de Nash si et seulement si la stratégie de chaque joueur est une meilleure réponse à la combinaison de stratégies des autres joueurs:

$$U_j(\alpha_*) \geq U_j(a_j\,,\ \alpha_{-j*}) \text{ pour tout } a_j \in \mathbf{A_j} \text{ et pour tout } j \in \mathbf{N}.$$

- L'idée de l'EN était déjà implicitement présente dans le modèle de duopole de Cournot [1838].
  - Dans ce modèle, chaque entreprise choisit son niveau de production comme une meilleure réponse à la production de l'autre. La résolution de ce problème revient à déterminer un EN du jeu. On parle parfois d'**équilibre de Cournot-Nash**.

- **REMARQUE**

- Une issue qui est un EN possède des propriétés importantes:
  - A l'EN, aucun joueur ne regrette son choix lorsqu'il découvre celui des autres joueurs.
  - Si un joueur prédit que les autres joueurs vont jouer un EN, il ne peut faire mieux que de le jouer également.
- Lorsqu'une issue qui n'est pas un EN émerge, cela signifie qu'au moins un des joueurs s'est trompé dans le sens où ses croyances concernant le choix des autres se révèlent fausses. Ainsi, il regrette son choix lorsqu'il découvre le choix des autres.
- L'EN fait donc intervenir les croyances des joueurs concernant le choix des autres (les issues probables du jeu). Les joueurs forment des croyances et agissent rationnellement compte tenu de celles-ci. L'EN est alors un ensemble de croyances et de stratégies dans lequel les croyances des joueurs sont compatibles avec leurs stratégies.

- **<u>THEOREME</u>**
  - Si un jeu admet un EEISSD, c'est nécessairement un EN et c'est le seul équilibre de Nash du jeu (de même pour un ESSD), car l'ensemble des EN est contenu dans l'ensemble des stratégies qui résistent à l'élimination itérative des stratégies strictement dominées. (L'ensemble des EN est également contenu dans l'ensemble des issues rationalisables).

- L'EN et l'EEISSD sont pourtant des concepts très différents.
  - Un EEISSD est déduit de l'hypothèse de connaissance commune de la rationalité. On détermine comment le jeu doit être joué par des joueurs rationnels.
  - Par contre, un EN est simplement un état stable du jeu. On détermine comment le jeu peut être joué par des joueurs rationnels. On doit l'interpréter comme une condition minimale que tout concept de solution doit vérifier pour que l'on puisse l'interpréter comme une **prédiction de l'issue d'un jeu** ou comme une **prescription aux joueurs**.

- En effet, imaginons une théorie qui prédirait ou prescrirait un équilibre qui ne soit pas un EN.
    - Au moins un joueur constate que la théorie lui prescrit une action qui n'est pas optimale compte tenu de celles prescrites aux autres. Donc il ne la jouera pas. Donc la théorie ne décrit pas son comportement. Les autres joueurs le savent. Ils ne suivent pas non plus la théorie. La théorie se détruit d'elle-même.
- Toutefois, ce n'est que lorsque qu'un jeu admet un unique EN que l'on peut l'interpréter comme la prédiction de l'issue du jeu.
    - Sinon, d'autres arguments doivent être avancés pour sélectionner un EN en particulier.
- Cependant, **l'unicité de l'EN est l'exception plutôt que la règle**, et les jeux admettent typiquement plusieurs EN.
    - La question de la sélection entre les différents EN d'un jeu est une question fondamentale et parfois difficile de la TJ.
    - Les exemples suivants illustrent ce point.

Exemple. Un jeu de coordination

- Deux individus doivent décider du lieu où passer leur soirée. Ils ont le choix entre le lieu A et le lieu B. Les deux joueurs préfèrent le lieu A au lieu B.

		Joueur 2	
		A	B
Joueur 1	A	2 ; 2	0 ; 0
	B	0 ; 0	1 ; 1

- Ce jeu décrit une situation dans laquelle les joueurs ont intérêt à se coordonner (faire le même choix) et préfèrent tous deux se coordonner sur A plutôt que B.

- Il admet deux EN en stratégies pures: {A,A} et {B,B}.

- De plus, il admet un EN en stratégies mixtes. Voyons comment le trouver.

- On commence par déterminer les meilleures réponses des joueurs à chaque stratégie possible de l'autre joueur.
  - Soit $\alpha_j=(\alpha_j(A), \alpha_j(B))=(p_j, 1-p_j)$ une stratégie mixte du joueur j. Les paiement espérés du joueur j, face à une stratégie quelconque $\alpha_{-j}=(p_{-j}, 1-p_{-j})$ du joueur -j, sont:
    - $U_j(A, \alpha_{-j})=2.\, p_{-j}$ et $U_j(B, \alpha_{-j})=1-p_{-j}$.
  - De là, il vient pour chaque joueur j=1,2:

$$MR_j(\alpha_{-j}) = (1, 0) \text{ si } p_{-j} > ⅓$$
$$= (p_j, 1-p_j) \text{ si } p_{-j} = ⅓$$
$$= (0, 1) \text{ si } p_{-j} < ⅓ .$$

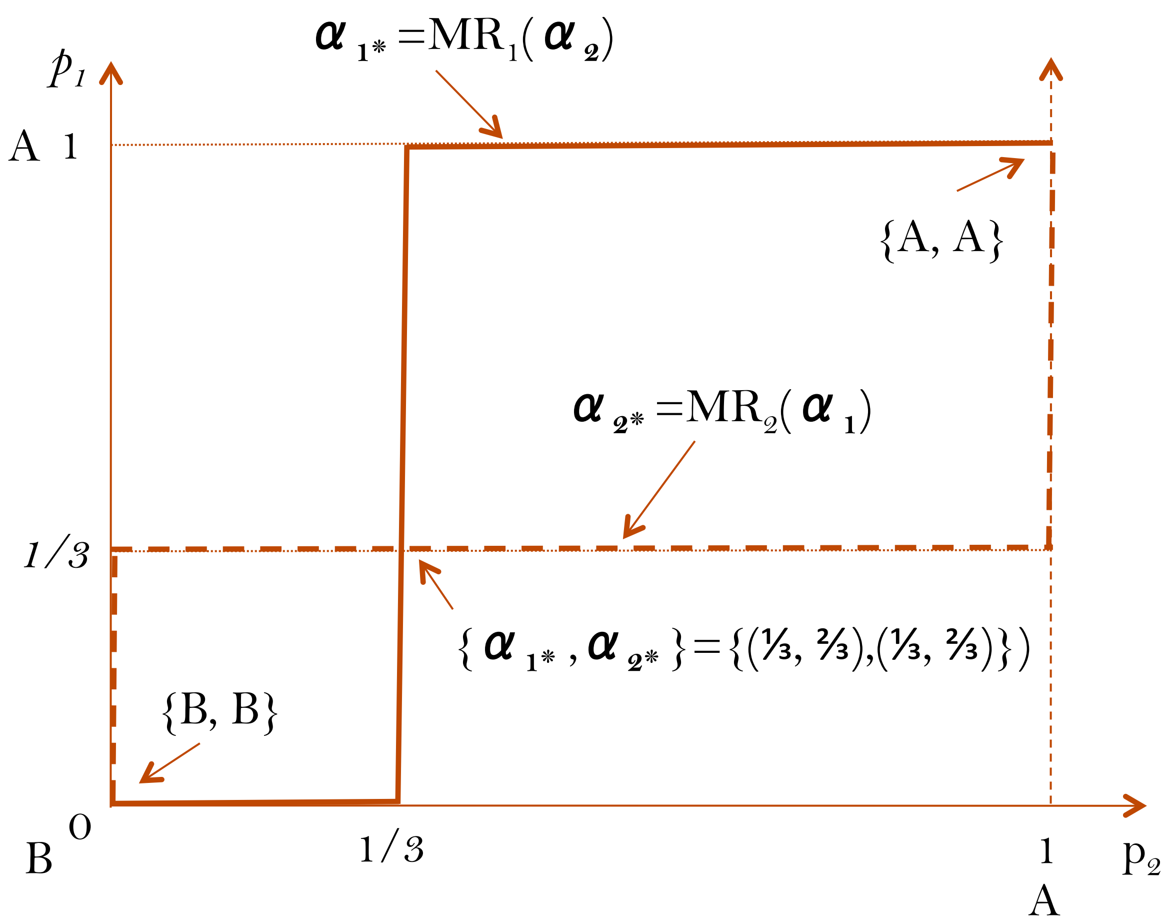
  - A l'EN, on a: $\alpha_{1*} = MR_1(\alpha_{2*})$ et $\alpha_{2*} = MR_2(\alpha_{1*})$.
    - En combinant ce deux relations, il vient:

$$\alpha_{1*} = MR_1(MR_2(\alpha_{1*}))=f(\alpha_{1*}).$$

    - Formellement, **déterminer un EN revient à déterminer un point fixe** de f.

- Pour trouver tous les EN (en stratégies pures et en stratégies mixtes) du jeu, on peut raisonner comme suit:
  - Si $p_{-j} > ⅓$, la meilleure réponse du joueur j est A, soit $p_j=1$. Or face à A, la meilleure réponse du joueur -j est A, soit $p_{-j}=1$. Parmi toutes les stratégies mixtes telles que $p_{-j} > ⅓$, seule la stratégie mixte dégénérée $p_{-j}=1$ est une meilleure réponse à A : $A=MR_j(MR_{-j}(A))$ et {A,A} est un EN.
  - Si $p_{-j} < ⅓$, la meilleure réponse du joueur j est B, soit $p_j=0$. Or face à B, la meilleure réponse du joueur -j est B, soit $p_{-j}=0$. Parmi toutes les stratégies mixtes telles que $p_{-j} < ⅓$, seule la stratégie mixte dégénérée $p_{-j}=1$ est une meilleure réponse à B : $B=MR_j(MR_{-j}(B)$ et {B,B} est un EN.
  - Si $p_{-j} = ⅓$, soit $\alpha_{-j} =(⅓, ⅔)$, toute stratégie mixte $\alpha_j= (p_j ,1- p_j)$ est une meilleure réponse du joueur j. Or $p_{-j} = ⅓$ est une meilleure réponse du joueur -j uniquement face à $\alpha_{j*}= (⅓, ⅔)$: $(⅓, ⅔)=MR_j(MR_{-j}(⅓, ⅔))$ et $\{\alpha_{j*} , \alpha_{-j*}\}=\{(⅓, ⅔),(⅓, ⅔)\}$ est un EN.

- <u>Illustration graphique:</u>



- Nous avons vu précédemment que pour qu'un joueur rationnel adopte une stratégie mixte, il doit nécessairement être indifférent entre cette stratégie mixte et toutes les stratégies pures auxquelles la stratégie mixte attribue une probabilité strictement positive.

  - Cette propriété permet de trouver aisément les EN en stratégies mixtes.

  - Si α_* est un EN en stratégies mixtes, on a nécessairement:

  $U_j(\alpha_*) = U_j(a_j, \alpha_{-j*})$ pour tout $j \in \mathbf{N}$, où a_j est une des stratégies pures auxquelles α_{j*} attribue une probabilité strictement positive.

- Dans l'Exemple précédent, si α_* est un EN en stratégies mixtes, on a nécessairement pour chaque joueur j=1,2 :

  $U_j(A, \alpha_{-j*}) = 2.\ p_{-j*} = 1 - p_{-j*} = U_j(B, \alpha_{-j})$

  $\Rightarrow$ $p_{-j*} = ⅓$, $U_j(\alpha_*) = ⅔$ et $\alpha_* = \{(⅓, ⅔), (⅓, ⅔)\}$.

- Soulignons qu'en plaçant un joueur en situation d'indifférence, on obtient une condition sur les stratégies mixtes des autres joueurs.

  - Il en découle que, contrairement à ce que l'on pourrait croire, à l'EN en stratégies mixtes $\alpha_* = \{(⅓ , ⅔), (⅓ , ⅔)\}$, la probabilité de jouer B est plus forte que celle de jouer A.
    - Or, les deux joueurs préfèrent se coordonner sur A.
    - L'explication est que si l'un des joueurs jouait A avec une probabilité plus forte, l'autre ne serait plus indifférent.
      - Il préfèrerait en effet jouer A.

  - Si toutes choses égales par ailleurs, on augmente les gains associés à l'issue {A, A} (par exemple en les élevant au carré), le phénomène s'accentue (l'EN en stratégies mixtes devient $\alpha_* = \{(1/5, 4/5),(1/5 ,4/5)\}$.

- Parmi les trois EN du jeu de coordination,{A,A} est l'issue la plus probable car c'est l'issue Pareto dominante.
  - On peut invoquer la possibilité d'une communication préalable entre les joueurs qui permettrait une entente tacite stable sur {A,A}, la répétition du jeu, la consultation d'un expert, ou encore l'intelligence des joueurs.

- L'EN en stratégies mixtes semble ici peu pertinent.
  - Remarquons toutefois que la stratégie mixte ($\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$) est ici une stratégie prudente pour chaque joueur (le paiement de sécurité est $\frac{2}{3}$).
  - Dans ce cas particulier, si chaque joueur adopte sa stratégie prudente, un EN est formé. En conséquence, les stratégies prudentes sont ici parfaitement rationnelles. Toutefois, leur emploi est peu vraisemblable.

Exemple. La bataille des sexes

- Comme dans le jeu précédent, deux individus doivent décider du lieu où passer leur soirée. Ils ont le choix entre le lieu A et le lieu B.
  - Chacun préfère toujours se coordonner avec l'autre, mais le joueur 1 préfère le lieu A au lieu B tandis que le joueur 2 préfère le lieu B au lieu A (l'histoire initiale fait intervenir un couple, d'où le nom du jeu).

		Joueur 2	
		A	B
Joueur 1	A	EN $\underline{2}$; $\underline{1}$	0 ; 0
	B	0 ; 0	EN $\underline{1}$; $\underline{2}$

- Ce jeu admet trois EN, deux EN en stratégies pures, {A,A} et {B,B}, et un EN en stratégies mixtes, $\alpha_* = \{(⅔, ⅓),(⅓, ⅔)\}$.
  - Contrairement à l'exemple précédent, il est ici difficile de sélectionner un de ces trois EN, car le critère de Pareto est ici inopérant.

- Dans la bataille des sexes, chaque joueur a intérêt à se coordonner avec l'autre, mais le joueur 1 souhaite atteindre {A,A}, tandis que le joueur 2 souhaite atteindre {B,B} et ces deux issues sont des EN.
    - Si les deux joueurs jouent la bataille des sexes pour la première fois, il est difficile de prédire l'issue du jeu.
        - Sans plus d'informations sur le jeu, il n'est pas possible de prédire lequel des EN sera joué.

- Dans ce cas, la sélection d'un équilibre en particulier ne peut s'expliquer que par des éléments extérieurs au jeu.
    - Ces éléments relèvent de la culture et de l'expérience des joueurs, des normes ou conventions sociales qu'ils ont intégrées.
    - Par exemple, le nom des stratégies peut avoir un effet focal. Si l'on demande à deux joueurs d'annoncer un horaire exact, avec la promesse d'être récompensés si leurs annoncent coïncident, l'annonce « 12h00 » est plus focale que l'annonce « 10h42 ».

- On peut également considérer l'EN en stratégies mixtes $\alpha_* = \{(⅔,⅓), (⅓,⅔)\}$.

  - Cet EN décrit **un état stable du jeu**, dans lequel les croyances de chaque joueur sont cohérentes avec les stratégies adoptées par les autres joueurs et la stratégie adoptée par chaque joueur est rationnelle compte tenu de ses croyances.

    - Il ne correspond pas à la combinaison de stratégies prudentes des joueurs (ici, les stratégies prudentes des joueurs 1 et 2 sont respectivement (⅓,⅔) et (⅔,⅓) et leur paiement de sécurité est 2/3).

    - On peut remarquer que si les joueurs adoptent les stratégies mixtes d'EN, les issues {A,A}et{B,B} apparaissent chacune avec une probabilité de 2/9. Les joueurs ont plus d'une chance sur deux d'obtenir un paiement de 0 (avec une probabilité de 5/9).

    - L'issue la plus probable est {A,B}.

Exemple. Coordination difficile

- Les joueurs doivent décider de rouler à gauche ou à droite. On peut considérer qu'ils jouent fréquemment le jeu avec des partenaires différents. Chacun préfère se coordonner avec l'autre, mais comment faire?

		Joueur 2	
		Rouler à Gauche	Rouler à Droite
Joueur 1	Rouler à Gauche	EN $\underline{1}$; $\underline{1}$	0 ; 0
	Rouler à Droite	0 ; 0	EN $\underline{1}$; $\underline{1}$

- Ce jeu admet trois EN, deux EN en stratégies pures, {G,G} et {D,D}, et un EN en stratégies mixtes, $\alpha_* = \{(½ , ½),(½ , ½)\}$où toutes les issues sont équiprobables avec un paiement espéré de ½.

- Les joueurs peuvent résoudre se problème de coordination en adoptant une convention. Cet exemple illustre le fait que les conventions peuvent sensiblement contribuer à l'efficacité économiques en permettant aux agents de se coordonner.

- Même lorsque l'on peut appliquer le critère de Pareto et sélectionner un des EN (lorsqu'il en existe plusieurs), il est parfois difficile d'affirmer que l'EN Pareto-dominant sera joué.

- L'exemple suivant, proposé par Harsanyi et Selten (1988), illustre ce point.

<u>Exemple. Limite du critère de dominance Parétienne</u>

		Joueur 2: A	Joueur 2: B
Joueur 1	A	EN $\underline{9}$; $\underline{9}$	0 ; 8
	B	8 ; 0	EN $\underline{7}$; $\underline{7}$

- Ce jeu admet deux EN en stratégies pures, {A,A} et {B,B}, et un EN en stratégies mixtes, $\alpha_* = \{(7/8,\ 1/8),(7/8,\ 1/8)\}$.

- {A,A} est l'issue Pareto dominante.

- L’ équilibre {A,A} est-il vraiment la prédiction la plus raisonnable de l’issue du jeu?
  - Pour les deux joueurs, l’équilibre {A,A} est attractif car il garantit le paiement maximal pour chacun. C’est l’issue Pareto dominante. Si une communication préalable au jeu est possible, une entente tacite sur l’issue {A,A} est stable (puisque c’est un EN).
  - Toutefois, B est une stratégie prudente pour chaque joueur (elle garantit un paiement de 7 quelle que soit la stratégie de l’autre). La combinaison des stratégies prudentes des joueurs forme un EN. Il est donc tout à fait rationnel de jouer B.
  - Le risque joue ici contre le critère de Pareto. Si un joueur pense qu’il y a plus d’une chance sur huit pour que l’autre joue B, alors il est rationnel de jouer B.

- Chaque joueur pourrait également remarquer que son adversaire à toujours intérêt à ce qu'il joue A.

  - Même après avoir conclu une entente tacite sur l'issue {A,A}, chaque joueur peut penser que l'autre veut simplement l'amener à jouer A, quelle que soit la stratégie qu'il a réellement l'intention de jouer.

    - En effet, comme face à un joueur qui joue A, on obtient un paiement très proche, 9 ou 8, en jouant respectivement A ou B, l'erreur n'est pas couteuse. Par contre c'est très coûteux pour celui qui joue A face à B et obtient 0.

    - De plus si un joueur n'est pas certain des paiements de son adversaire, et pense que les véritables paiements sont 8 et 9 face à A (au lieu de 9 et 8), en jouant respectivement A ou B, il peut très bien se dire que l'autre s'engage à jouer A alors qu'il va jouer B.

<u>Exemple. EN en stratégies mixtes lorsque les joueurs ont plus de deux stratégies</u>

		Joueur 2		
		G	C	D
Joueur 1	H	$\underline{3}$; 0	0 ; 0	0 ; $\underline{3}$
	M	0 ; 0	$\underline{1}$; $\underline{1}$ EN	0 ; 0
	B	0 ; $\underline{3}$	0 ; 0	$\underline{3}$; 0

- Ce jeu admet un EN en stratégies pures {M,C}, et deux EN en stratégies mixtes, {(⅕,⅗,⅕),(⅕,⅗,⅕)} et {(½,0, ½), (½,0, ½)}.

- Lorsque les joueurs disposent de plus de deux actions possibles, les jeux peuvent admettre plusieurs EN en stratégies mixtes. La tâche est donc un peu plus lourde. Voici une manière de les trouver.
  - On commence par chercher s'il existe un EN en stratégies mixtes dans lequel chaque joueur attribue une probabilité strictement positive à toutes ses stratégies pures: $\alpha_1=(p_1,q_1,1-p_1-q_1)$ et $\alpha_2=(p_2,q_2,1-p_2-q_2)$.
  - si α_* est un EN en stratégies mixtes:
    - o Le joueur 1 est indifférent entre H, M et B si et seulement si:

$$U_1(H,\alpha_{2*})= U_1(M,\alpha_{2*})= U_1(B,\alpha_{2*})$$

$$3.p_2=q_2=3(1-p_2-q_2) \quad => \quad \alpha_{2*}=(⅕,⅗, ⅕).$$

    - o Le joueur 2 est indifférent entre G, C et D si et seulement si:

$$U_2(G,\alpha_{1*})= U_2(C,\alpha_{1*})=U_2(D,\alpha_{1*})$$

$$3(1-p_1-q_1)= q_1=3.p_1=> \quad \alpha_{1*}=(⅕,⅗, ⅕).$$

- Puis on cherche s'il existe un EN en stratégies mixtes dans lequel le joueur 1 ne joue jamais B: $\alpha_1=(p_1,1-p_1,0)$, avec $0<p_1<1$.
  - Si tel est le cas, le joueur 2 ne jouera jamais une stratégie mixte qui attribue une probabilité strictement positive à toutes ses stratégies pures, car il ne peut être indifférent entre ses stratégies pures: $3(1-p_1-q_1)= q_1=3.p_1$ n'est jamais vérifiée.
  - Il s'agit alors de trouver $\alpha_1=(p_1,1-p_1,0)$ tel que le joueur 2 est indifférent entre:
    - G~C : $U_2(G,\alpha_{1*})=U_2(C,\alpha_{1*})$ => $0= 1-p_1$ => $p_1=1$ => impossible
    - G~D : $U_2(G,\alpha_{1*})=U_2(D,\alpha_{1*})$ => $0=3.p_1$ => $p_1=0$ => impossible.
    - C~D : $U_2(C,\alpha_{1*})=U_2(D,\alpha_{1*})$ => $1- p_1=3.p_1$ => $\alpha_{1*}=(\frac{1}{4},\frac{3}{4}, 0)$.
- Enfin, on cherche $\alpha_2=(0,q_2,1-q_2)$, avec $0<q_2<1$ tel que :

  $U_1(H,\alpha_{2*})=U_1(M,\alpha_{2*})$ => $q_2=0$ => impossible.

- Puis on cherche s'il existe un EN en stratégies mixtes dans lequel le joueur 1 ne joue jamais M: $\alpha_1=(p_1,0,1-p_1)$, avec $0<p_1<1$.
  - Il s'agit alors de trouver $\alpha_1=(p_1,0,1-p_1)$ tel que le joueur 2 est indifférent entre :
    - G~C : $U_2(G,\alpha_{1*})=U_2(C,\alpha_{1*}) \Rightarrow 3(1-p_1)=0 \Rightarrow p_1=1$

      => impossible.
    - G ~D : $U_2(G,\alpha_{1*})=U_2(D,\alpha_{1*}) \Rightarrow 3(1-p_1)=3.p_1 \Rightarrow p_1=½$

      => $\alpha_{1*}=(½,0,½)$.
    - C~D : $U_2(C,\alpha_{1*})=U_2(D,\alpha_{1*}) \Rightarrow 0=3.p_1 \Rightarrow p_1=0$

      ⇒ impossible.
  - Enfin, on cherche $\alpha_2=(p_2,0,1-p_2)$ tel que le joueur 1 est indifférent entre H et B:
    - $U_1(H,\alpha_2)=U_1(B,\alpha_2) \Rightarrow 3.p_2=3(1-p_2) \Rightarrow p_2=½$

      => $\alpha_{2*}=(½,0,½)$.

- On a montré que le joueur 1 (resp. 2) est indifférent entre H et B (resp. G et D) lorsque $\alpha_{1*}=(½,0, ½)$ et $\alpha_{2*}=(½,0, ½)$.

- Mais les stratégies M et C ne sont jamais jouées. Il reste à montrer que α_{1*} (resp. α_{2*}) est une meilleure réponse à α_{2*} (resp. α_{1*}).

- Face à α_{2*}, H, B et α_{1*} donnent 3/2, tandis que M donne 0.
  - α_{1*} est une meilleure réponse à α_{2*}.

- Face à α_{1*}, G, D et α_{2*} donnent 3/2, tandis que C donne 0.
  - α_{2*} est une meilleure réponse à α_{1*} .

- Finalement, on cherche s'il existe un EN en stratégies mixtes dans lequel le joueur 1 ne joue jamais H: $\alpha_1=(0,q_1,1-q_1)$, avec $0<q_1<1$.

  - Il s'agit alors de trouver $\alpha_1=(0,q_1,1-q_1)$ tel que:
    - $U_2(G,\alpha_{1*})=U_2(C,\alpha_{1*}) \Rightarrow 3(1-q_1)=q_1 \Rightarrow q_1=3/4 \Rightarrow \alpha_{1*}=(0,3/4,1/4)$
    - $U_2(G,\alpha_{1*})=U_2(D,\alpha_{1*}) \Rightarrow 3(1-q_1)=0 \Rightarrow q_1=1$
    - $U_2(C,\alpha_{1*})=U_2(D,\alpha_{1*}) \Rightarrow q_1=0$.

    - Enfin, on cherche $\alpha_2=(p_2,1-p_2,0)$), avec $0<p_2<1$ tel que :

      $U_1(M,\alpha_2)=U_1(B,\alpha_2) \Rightarrow 1-p_2=0 \Rightarrow p_2=1$

      => impossible.

Exemple. Limite du critère de Pareto dans un jeu à 3 joueurs

- Cet exemple illustre une limite du critère de Pareto comme critère de sélection dans les jeux à plus de deux joueurs.

Joueur 3 : N

Joueur 1 \ Joueur 2	G	D
H	$\underline{0}$; $\underline{0}$; $\underline{10}$ *EN*	-5 ; -5 ; $\underline{0}$
B	-5 ; -5 ; $\underline{0}$	$\underline{1}$; $\underline{1}$; -5

Joueur 3 : S

Joueur 1 \ Joueur 2	G	D
H	$\underline{-2}$; $\underline{-2}$; 0	-5 ; -5 ; $\underline{0}$
B	-5 ; -5 ; $\underline{0}$	*EN* $\underline{-1}$; $\underline{-1}$; $\underline{5}$

- Ce jeu admet deux EN en stratégies pures :{H,G,N} et {B,D,S}.
  - Or {H,G,N} domine{B,D,S} au sens de Pareto.
    - On pourrait donc penser qu'une communication préalable entre les joueurs leur permettrait d'atteindre {H,G,N}. Comme c'est un EN, dévier unilatéralement ne peut être profitable.
    - Toutefois, si le joueur 3 s'engage à jouer N, les joueurs 1 et 2 ont intérêt à s'entendre pour jouer B et D.
      - Cette entente entre les joueurs 1 et 2 est stable puisque c'est toujours une combinaison de meilleures réponses (quel que soit le choix du joueur 3).
    - Sachant cela, le joueur 3 peut préférer jouer S.

- Nous venons de voir que les jeux admettent généralement plusieurs EN.

  - On peut également se demander si un jeu admet toujours au moins un EN.

    - Certains jeux n'admettent pas d'EN en stratégies pures.

    - Toutefois, le théorème suivant garantit l'existence d'au moins un EN en stratégies mixtes.

✓ **THEOREME. Nash (1951)**

✓ Tout jeu fini admet au moins un EN en stratégies mixtes.

- Par exemple le jeu pile ou face n'admet pas d'EN en stratégies pures.

  - L'unique EN du jeu est en stratégies mixtes: $\alpha_* = \{\alpha_{1*}, \alpha_{2*}\} = \{(½, ½),(½, ½)\}$.

Exemple. Un problème d’agence

- Un agent (joueur 1) travaille pour un principal (joueur 2). Il est en charge de la réalisation d’un projet pouvant générer un résultat R en cas de réussite, et 0 sinon. La réussite du projet nécessite que l’agent travail.
- L’agent peut soit travailler (action T), soit se soustraire à la tâche (action NT). Le coût du travail pour l’agent est C>0.
- Le principal peut soit auditer (action A) et observer si le travail est effectué, soit ne pas auditer (action NA). L’Audit lui coûte I<W .

- On suppose que le principal ne peut pas payer l’agent en fonction du résultat.
  - L’agent reçoit W>C quel que soit le résultat R du projet, sauf si le Principal audit et démontre une absence de travail.
  - La responsabilité de l’agent est supposée limitée, si son absence de travail est démontrée, il perd effectivement son salaire, mais n’est pas puni. Son paiement est alors nul.

Forme stratégique:

		Principal	
		A	NA
Agent	T	$\underline{W-C}$; R-W-I	W-C ; $\underline{R-W}$
	NT	0 ; $\underline{-I}$	$\underline{W}$; -W

- Avec: W>C>0 et W>I>0, ce jeu n'admet pas d'EN en stratégies pures.

  - Le théorème de Nash nous garantit toutefois qu'il existe un EN en stratégies mixtes.

- Soit $\alpha_1=(\alpha_1(T), \alpha_1(NT))=(p_1, 1-p_1)$ une stratégie mixte de l'agent et $\alpha_2=(\alpha_2(A), \alpha_2(NA))=(p_2, 1-p_2)$ une stratégie mixte du principal.

  - Les paiement espérés de l'agent, face à une stratégie quelconque α_2 du principal, sont:
    - $U_1(T, \alpha_2)=W-C$ et $U_1(NT, \alpha_2)=(1-p_2)W$

  - Les paiement espérés du principal, face à une stratégie quelconque α_1 de l'Agent, sont:
    - $U_2(A, \alpha_1)=p_1(R-W)-I$ et $U_2(NA, \alpha_1)=p_1.R-W$

  - De là, il vient:

$$\begin{aligned}
\alpha_{1*} = MR_1(\alpha_2) &= (1, 0) \text{ si } p_2 > C/W \\
&= (p_1, 1-p_1) \text{ si } p_2 = C/W \\
&= (0, 1) \text{ si } p_2 < C/W
\end{aligned}$$

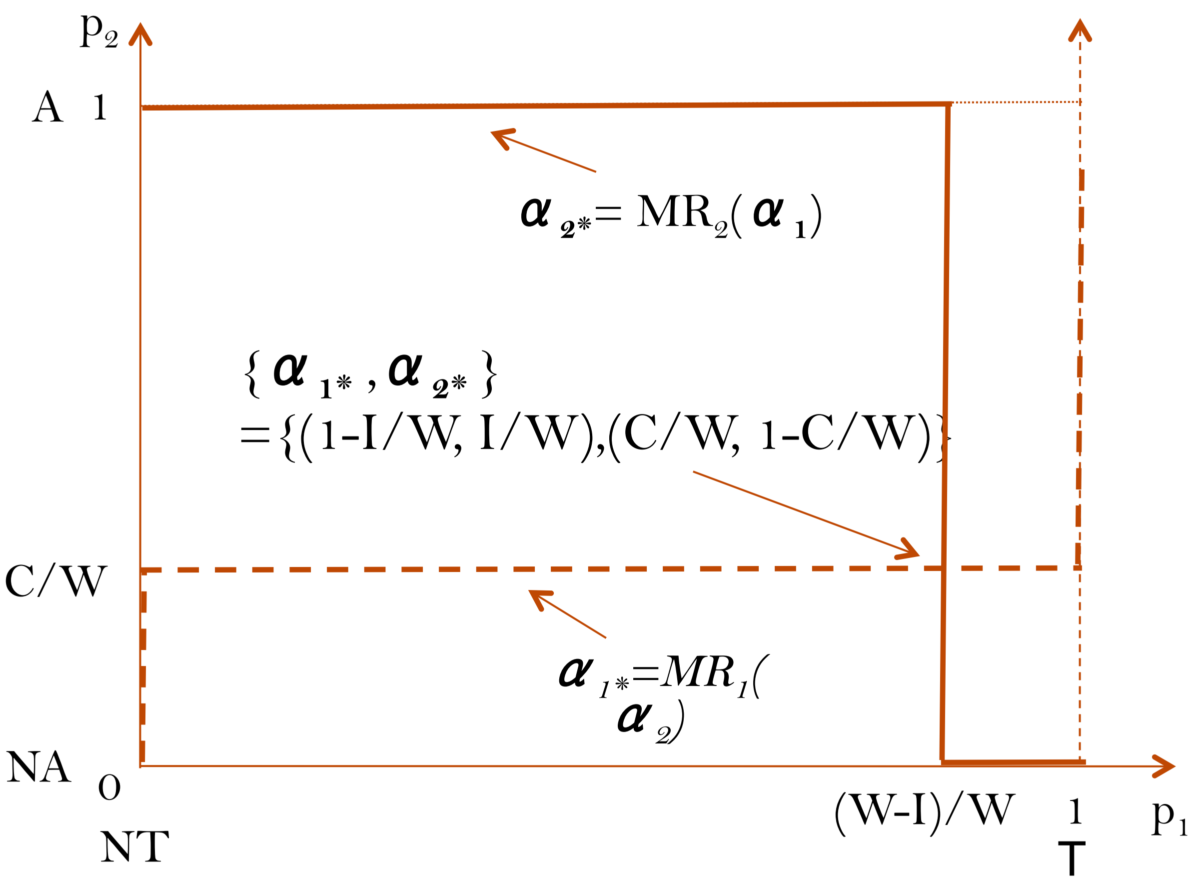
- Et pour le joueur 2:

$$\boldsymbol{\alpha}_{2*} = MR_2(\boldsymbol{\alpha}_1) = (1\,,0) \text{ si } p_1 < (W\text{-}I)/W$$
$$= (p_2\,,1\text{-}\,p_2) \text{ si } p_1 = (W\text{-}I)/W$$
$$= (0\,,\,1) \text{ si } p_1 > (W\text{-}I)/W$$

- On peut utiliser le fait que si $\boldsymbol{\alpha}_*$ est un EN en stratégies mixtes, on a nécessairement:

$$U_1(T\,,\ \boldsymbol{\alpha}_{2*}) = W\text{-}C = (1\text{-}\,p_{2*})W = U_1(NT\,,\ \boldsymbol{\alpha}_{2*})$$
$$U_2(A\,,\ \boldsymbol{\alpha}_{1*}) = p_{1*}(R\text{-}W)\text{-}I = p_{1*}.R\text{-}W = U_2(NA\,,\ \boldsymbol{\alpha}_{1*})$$
$$\Rightarrow \quad p_{2*} = C/W \ \text{ et } \ p_{1*} = (W\text{-}I)/W$$
$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{\alpha}_* = \{(1\text{-}I/W\,,\ I/W),\ (C/W\,,\ 1\text{-}C/W)\}$$

- <u>Illustration graphique:</u>



- Ce jeu d'agence décrit une situation dans laquelle le principal a toujours intérêt à ce que l'agent travail. Mais l'agent a intérêt à travailler uniquement s'il est audité. Le principal doit donc inciter l'agent à travailler en l'auditant. Toutefois, auditer coûte cher et n'a qu'une vertu incitative.

  - Considérons l'exemple suivant: R=20, W=6, I=4 et C=2, la matrice des paiements est :

		Principal	
		A	NA
Agent	T	$\underline{4}$; 10	4 ; $\underline{14}$
	NT	0 ; $\underline{-4}$	$\underline{6}$; -6

- L'analyse précédente a montré que l'unique EN du jeu est $\alpha_* = \{(\frac{1}{3},\frac{2}{3}),(\frac{1}{3},\frac{2}{3})\}$. Les paiements espérés à l'équilibre sont: $U_{1*} = 4$ et $U_{2*} = \frac{2}{3}$.

- Comme cet EN est unique, c'est la seule prédiction possible de l'issue du jeu. L'EN est particulièrement focal pour des joueurs intelligents (qui savent, au moins intuitivement, que ce jeu n'admet qu'un unique EN dans lequel les stratégies sont mixtes).

- On peut interpréter la stratégie mixte du principal comme un objet de choix en considérant qu'il joue ce jeu avec beaucoup d'agents différents et contrôle seulement un agent sur trois. Sa stratégie mixte donne la fréquence avec laquelle il contrôle les agents.

- On peut aussi interpréter l'EN comme un équilibre en croyances. La stratégie de l'agent est la croyance du principal sur la stratégie pure de l'agent tandis que la stratégie du principal est la croyance de l'agent sur la stratégie pure du principal.

- Enfin on peut considérer que tous les joueurs jouent en stratégies pures, que l'on tire un agent d'une population où 1/3 jouent T, et que l'on tire un principal d'une population où 1/3 jouent A.

Exemple. Duopole de Cournot

- Deux entreprises se font concurrence en sur un marché.
- La demande (inverse) est linéaire p(q)=12-q, et les coûts de production de chaque entreprise sont supposés identiques et normalisés à zéro: c(q)=0 pour tout q.
- Dans le duopole de Cournot, la variable stratégique du jeu est le niveau de production. Chaque entreprise détermine sa production comme une meilleure réponse à la production de l'autre (fonctions de réaction).

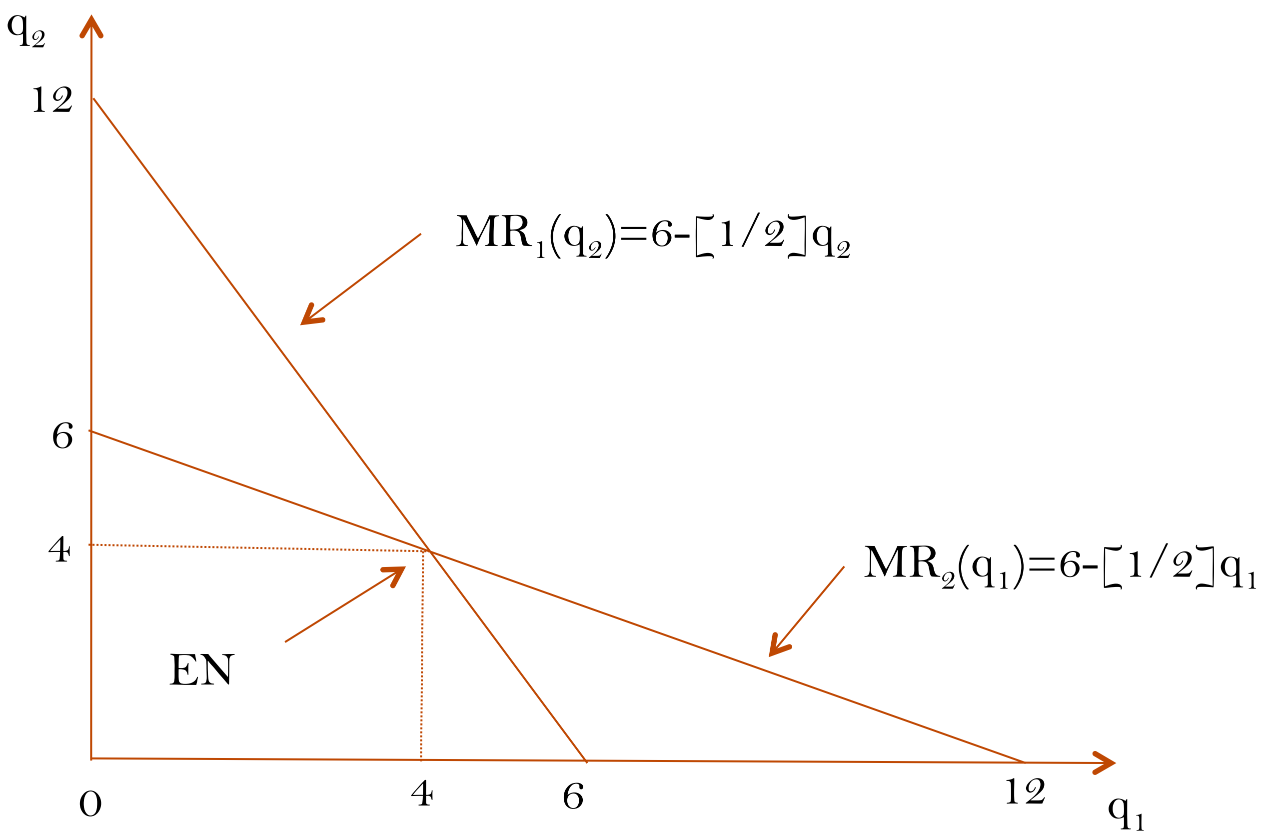
- L'entreprise 1 choisit q_1 en considérant q_2 comme donnée:
  - Profit1=$p.q_1=[12-q_1-q_2]q_1$ et $q_1^*=MR_1(q_2)=6-[1/2]q_2$

- De même pour l'entreprise 2:
  - Profit 2=$p.q_2= =[12-q_1-q_2]q_1$ et $q_{2*}=MR_2(q_1)=6-[1/2]q_1$

- A l'EN:
  - $q_{1*}=MR_1(q_{2*})$ et $q_{2*}=MR_2(q_{1*})$

- Il s'agit de déterminer un point fixe:
  - $q_{1*}= MR_1(q_{2*}) =MR_1(MR_2(q_{1*}))$
  - soit $f(q_{1*})=q_{1*}$.

Equilibre de Cournot-Nash



Matrice des paiements du duopole de Cournot (3 niveaux de production possibles):

			q_2	
		6	4	3
	6	0 ; 0	12 ; 8	18 ; $\underline{9}$
q_1	4	8 ; 12	$\underline{16}$; $\underline{16}$ EN	$\underline{20}$; 15
	3	$\underline{9}$; 18	15 ; $\underline{20}$	18 ; 18