

L2 - Techniques mathématiques EEA - HAE304X

Feuille de TD n° 3

Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercice 1

Résoudre les équations différentielles :

1. $y'(x) + 3y(x) = 5$ avec $y(0) = 1$.
2. $y'(x) - (1+x)y(x) = -2x - x^2$, avec $y(0) = 2$.
3. $y'(x) - 2y(x) = e^{2x}x^2$, avec $y(0) = 0$.
4. $y'(x) - \frac{1}{1+x}y(x) = 2x^2$, avec $y(0) = -3$; et ceci pour $x > 0$.

Exercice 2

Une application

La vitesse de déplacement des ions entre deux électrodes immergées dans un électrolyte vérifie

$$\frac{dv}{dt} + \frac{R}{m}v = \frac{F}{m},$$

équation différentielle où m, F, R sont des constantes. Calculer v en fonction de t .

Equations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants

Exercice 3

Résoudre les équations différentielles :

1. $y'' - 3y' + y = x$
2. $y'' - 6y' - 7y = -7x^2 - 5x + 1$
3. $y'' - 2y' + y = 0$, avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.
4. (*) $y'' + y' - y = xe^x$ Solution : $y(x) = \lambda e^{x(-1-\sqrt{5})/2} + \mu e^{x(-1+\sqrt{5})/2} + (x-3)e^x$
5. (*) $y'' - 2y' + 5y = 10 \cos x$ Solution : $y(x) = e^x(\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x) + 2 \cos x - \sin x$
6. (*) $y'' - 3y' + 2y = e^x \sin x$ Solution : $y(x) = \lambda e^{2x} + \mu e^x + \frac{1}{2}e^x(\cos x - \sin x)$

Equations différentielles à variables séparables

Exercice 4

- a. Montrer que l'équation (E) : $2y' + e^{y-x} = 0$ est une équation à variables séparables.
- b. Trouver la solution de (E) qui vérifie $y = 1$ quand $x = 0$.

Exercice 5

Une application

La variation de la pression en fonction de l'altitude vérifie l'équation différentielle $\frac{dp}{dh} = -\frac{gM}{RT} p$ où p est la pression, h l'altitude, M le poids moléculaire de l'air, g la constante de gravité, R la constante des gaz parfaits et T la température. Sachant que pour $h = 0$, $p = p_0$, exprimer la pression en fonction de l'altitude et de la température (supposée constante).

Exercice 6

Une application

Le refroidissement d'un corps dans un courant d'air est proportionnel à la différence de température entre le corps (T) et l'air (θ) : $T'(t) = -\lambda(T(t) - \theta)$. Si $\theta = 30^\circ C$ et si T passe de 100 à $70^\circ C$ en 15 mn, au bout de combien de temps T vaudra-t-elle $40^\circ C$?