UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **FACULTÉ DES SCIENCES**

L2 - Techniques mathématiques EEA - HAE304X

Feuille de TD n° 2

Primitives, intégrales

Exercice 1

Déterminer les primitives suivantes

1. $\displaystyle\int xe^{x^2}dx$ 2. $\displaystyle\int \frac{\ln|x|}{x}dx$ 3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln|x|}$ 4. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

5. $\displaystyle\int \ln|x|dx$ 6. $\displaystyle\int x\ln|x|dx$; 7. $\displaystyle\int xe^{3x}dx$ 8. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x+3)^2}$ 9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4}$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+8x+10}$ 11. $\displaystyle\int \frac{2x+4}{2x^2+8x+10}dx$ 12. $\displaystyle\int \frac{2x+5}{2x^2+8x+10}dx$ 13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ 2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ 3. $\displaystyle\int_0^1 x^2\arctan x\,dx$

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos^2 x\,dx$ 2. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin^4 x\,dx$ 3. $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sin^3 x\cos^2 x\,dx$

Exercice 4

Calculer de deux manières différentes les intégrales

$I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos t\ dt$ et $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin t\ dt.$

Exercice 5

Déterminer les primitives des fractions rationnelles suivantes :

1. $\dfrac{1}{x(x+1)}$ 2. $\dfrac{1}{x^2(x^2+1)}$ 3. $\dfrac{x}{x^2-4}$ 4. $\dfrac{x^3}{x^2-4}$ 5. $\dfrac{1}{(x-1)^2(x+2)}$ 6. $\dfrac{x^4}{x^3-x^2+x-1}$

Exercice 6

Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos x}dx$, $J = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$ et $K = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x}dx$.

Exercice 7

Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx.$

Exercice 8

Calculer la limite de la somme de Riemann : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}.$

Exercice 9

Une application

Calculer la valeur efficace sur l'intervalle $[0,1]$ du signal $s(t)=\dfrac{1}{2t+3}$.

On rappelle que la valeur efficace d'un signal $s(t)$ sur l'intervalle $[0,T]$ est Veff $=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\,dt}$.

Dérivées partielles

Exercice 10

Soit la fonction $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=xe^{y^2}$. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

Intégrales doubles

Exercice 11

Calculer $I=\displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,1]}\frac{1}{1+x+y}\,dx\,dy$.

Exercice 12

Soit le domaine $\Delta=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad 1\leq x\leq 2\,,\ 0\leq y\leq x\}$.

a) Représenter Δ et calculer son aire avec et sans calcul intégral.

b) Intégrer la fonction $f(x,y)=x+y$ sur le domaine Δ.

Exercice 13

Soit Δ, le domaine du plan délimitée par les paraboles d'équations $y=x^2$ et $x=y^2$.

a) Calculer $I=\displaystyle\iint_\Delta xy\,dx\,dy$.

b) Calculer l'aire de Δ.

Exercice 14

On considère le disque centré en O et de rayon R : $D(O,R)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad x^2+y^2\leq R^2\}$.

Retrouver le fait que son aire vaut πR^2 :

a) en réalisant un découpage par tranches verticales de ce disque.

b) en utilisant les coordonnées polaires.

Exercice 15

Calculer $I=\displaystyle\iint_{D(O,1)}\frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$ $\quad$ ($D(O,1)$ est le disque unité).

Exercice 16

Soit Δ, le domaine s'écrivant en polaires : $\Delta=\{(r,\theta)\in\mathbb{R}_+\times[0,2\pi[;\quad 0\leq r\leq 2\,,\ \frac{\pi}{6}\leq\theta\leq\frac{\pi}{3}\}$.

a) Calculer l'aire de Δ.

b) Calculer $I=\displaystyle\iint_\Delta x^3y\,dx\,dy$.