L2 - Techniques mathématiques EEA - HAE304X

Feuille de TD n° 2

Primitives, intégrales, sommes de Riemann

Exercice 1

Déterminer les primitives suivantes

1. $\displaystyle\int xe^{x^2}dx$ 2. $\displaystyle\int \frac{\ln|x|}{x}dx$ 3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln|x|}$ 4. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

5. $\displaystyle\int \ln|x|dx$ 6. $\displaystyle\int x\ln|x|dx$; 7. $\displaystyle\int xe^{3x}dx$ 8. $\displaystyle\int \frac{dx}{(2x+3)^2}$ 9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4}$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+8x+10}$ 11. $\displaystyle\int \frac{2x+4}{2x^2+8x+10}dx$ 12. $\displaystyle\int \frac{2x+5}{2x^2+8x+10}dx$ 13. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ 2. $\displaystyle\int_0^1 x^2 \arctan x\, dx$ 3. $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^2 x\, dx$ 2. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin^4 x\, dx$ 3.(*) $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sin^3 x \cos^2 x\, dx$

Exercice 4

(*)Calculer de deux manières différentes les intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t}\cos t\ dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} e^{-t}\sin t\ dt.$$

Exercice 5

Déterminer les primitives des fractions rationnelles suivantes :

1. $\displaystyle\frac{1}{x(x+1)}$ 2. $\displaystyle\frac{1}{x^2(x^2+1)}$ 3. $\displaystyle\frac{x}{x^2-4}$ 4. $\displaystyle\frac{x^3}{x^2-4}$ 5. $\displaystyle\frac{1}{(x-1)^2(x+2)}$ 6. $\displaystyle\frac{x^4}{x^3-x^2+x-1}$

Exercice 6 (Sommes de Riemann)

Calculer les limites des sommes de Riemann suivantes :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}\ , \quad (*)T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}\ , \quad (*)U_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})\,.$$

Exercice 7

Une application

Calculer la valeur efficace sur l'intervalle $[0,1]$ du signal $s(t) = \dfrac{1}{2t+3}$.

On rappelle que la valeur efficace d'un signal $s(t)$ sur l'intervalle $[0,T]$ est Veff $= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\,dt}$.

Dérivées partielles

Exercice 8
Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x \sin y$. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Intégrales doubles

Exercice 9
Calculer $I = \displaystyle\iint_{[0,1]\times[0,1]} \frac{1}{1 + x + y}\, dx\, dy$.

Exercice 10
Soit Δ, le domaine du plan délimitée par les paraboles d'équations $y = x^2$ et $x = y^2$.
a) Calculer $I = \displaystyle\iint_{\Delta} xy\, dx\, dy$.
b) Calculer l'aire de Δ.

Exercice 11
On consière le disque centré en O et de rayon R : $D(O, R) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^2 \leq R^2\}$.
Retrouver le fait que son aire vaut πR^2 :
a) en réalisant un découpage par tranches verticales de ce disque.
b) en utilisant les coordonnées polaires.

Exercice 12
Calculer $I = \displaystyle\iint_{D(O,1)} \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\, dx\, dy \quad (D(O, 1)$ est le disque unité).