

L2 - Techniques mathématiques EEA - HAE304X

Feuille de TD n° 1

Limites, continuité et dérivabilité

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 + 3x - 2; \quad (b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 6x + 7}{3x^2 - 5}; \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x};$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 2x - 1} - 2x + 3; \quad (e) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1}.$$

Exercice 2

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$(a) f(x) = x \ln x; \quad (b) f(x) = \frac{x^2}{\cos x}; \quad (c) f(x) = \sin x^2; \quad (d) f(x) = x \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right) \text{ et}$$

$$g(x) = \sqrt{x} \left(x^2 + \frac{e^x}{\sqrt{x}} \right); \quad (e) f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}; \quad (f) f(x) = \ln \left(\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{1/3} \right); \quad (g) f(x) = x 2^x.$$

Exercice 3

(*) Calculer les dérivées successives de la fonction $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(x+1)$.

Exercice 4

Une application

On considère un filtre RLC série en régime permanent, avec en entrée un tension V_e sinusoïdale. La sortie V_s est mesurée sur la résistance R . Le courant parcourant ce circuit est I . La fonction de transfert associée est $H = V_s/V_e$.

- Déterminer l'impédance Z associée à ce circuit, telle que $V_e = ZI$.
- Ce circuit est résonant en courant lorsque $|I|$ est maximal, c'est à dire lorsque $|Z|$ est minimum. Déterminer la fréquence associée.
- Tracer l'allure du diagramme de Bode de ce circuit, en déterminant les limites
 - du module de H
 - de l'argument de H

Développements limités

Exercice 5

Ecrire les expressions suivantes sous la forme de développements limités.

- $(1 + 3x - x^2 + o(x^3)) + (-2 + 5x^2 - x^4 + o(x^4))$
- $(2x + 5x^2 - 4x^3 + o(x^5))(-1 + 3x - x^2 + x^3 + 2x^4 + x^5 + o(x^5))$

Exercice 6

Déterminer les développements limités suivants.

- $DL_5(0)$ de $f(x) = \cos 3x$
- $DL_3(0)$ de $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$
- $DL_4(0)$ de $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, puis de $g(x) = \frac{x}{\sin x}$
- (*) $DL_5(0)$ de $f(x) = \tan x$

Exercice 7

Déterminer les développements limités suivants.

1. $DL_5(0)$ de $f(x) = e^{\cos x}$
2. $DL_7(0)$ de $f(x) = \arctan(x)$
3. $DL_3(0)$ de $f(x) = \sqrt{2+x}$
4. $DL_2(1)$ de $f(x) = \sqrt{3+x}$
5. (*) $DL_1(0)$ de $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$

Exercice 8

A l'aide des développements limités, calculer la limite en 0 de

1. $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$,
2. $f(x) = \frac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2}$.