

L2 - Techniques mathématiques EEA - HAE304X

Feuille de TD n° 1

Limites, continuité et dérivabilité**Exercice 1**

Déterminer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 + 3x - 2; & \quad \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 6x + 7}{3x^2 - 5}; & \quad \text{(c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}; & \quad \text{(d)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}; \\ \text{(e)} \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos(x)}; & \quad \text{(f)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}; & \quad \text{(g)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 + 2x - 1} - 2x + 3. \end{aligned}$$

Exercice 2

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(x) = x \ln x; & \quad \text{(b)} \quad f(x) = \frac{x^2}{\cos x}; & \quad \text{(c)} \quad f(x) = \sin x^2; & \quad \text{(d)} \quad f(x) = x \left(x + \sqrt{1 + x^2} \right) \text{ et} \\ g(x) = \sqrt{x} \left(x^2 + \frac{e^x}{\sqrt{x}} \right); & \quad \text{(e)} \quad f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}; & \quad \text{(f)} \quad f(x) = \ln \left(\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{1/3} \right); & \quad \text{(g)} \quad f(x) = x 2^x. \end{aligned}$$

Exercice 3Calculer les dérivées successives de la fonction $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(x + 1)$.**Développements limités****Exercice 4**

Ecrire les expressions suivantes sous la forme de développements limités.

- $(1 + 3x - x^2 + x^3 \varepsilon_1(x)) + (-2 + 5x^2 - x^4 + x^4 \varepsilon_2(x))$
- $(2x + 5x^2 - 4x^3 + x^5 \varepsilon_1(x))(-1 + 3x - x^2 + x^3 + 2x^4 + x^5 \varepsilon_2(x))$

Exercice 5

Déterminer les développements limités suivants.

- $DL_5(0)$ de $f(x) = \cos 3x$
- $DL_3(0)$ de $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$
- $DL_4(0)$ de $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, puis de $g(x) = \frac{x}{\sin x}$
- $DL_3(0)$ de $f(x) = \tan x$

Exercice 6

Déterminer les développements limités suivants.

- $DL_5(0)$ de $f(x) = e^{\cos x}$
- $DL_7(0)$ de $f(x) = \arctan(x)$
- $DL_2(0)$ de $f(x) = \sqrt{2+x}$
- $DL_2(1)$ de $f(x) = \sqrt{3+x}$
- $DL_1(0)$ de $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$
- $DL_{15}(0)$ de $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. En déduire $f^{(10)}(0)$.

Exercice 7

A l'aide des développements limités, calculer la limite en 0 de

1. $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2},$

2. $f(x) = \frac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2}.$