

# Modélisation et Commande Avancée

## MEA4

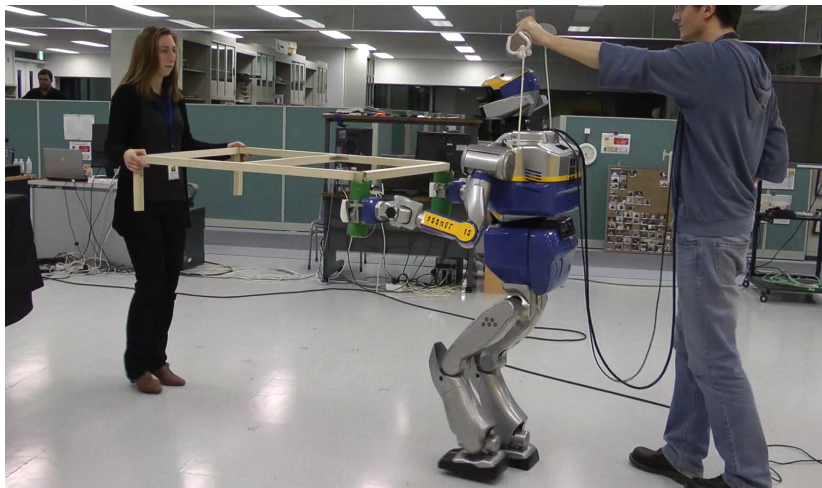
Philippe Fraisse

Université de Montpellier

May 22, 2018

# Introduction

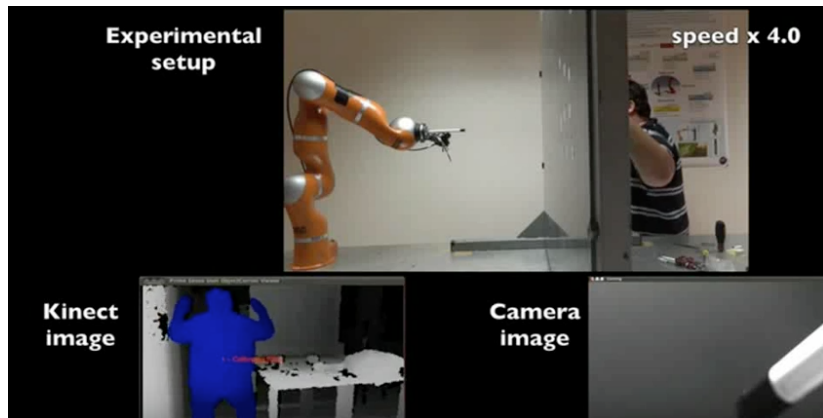
## Systèmes robotisés



Interaction Humain-Humanoïde (Joint Robotics Lab, Tsukuba, Japan, 2013).

# Introduction

## Systèmes robotisés



Interaction Humain-Humanoïde (Projet ANR ICARO 2011).

# Introduction à la robotique

## Étude des robots redondants

### Systèmes sous-déterminés

Soit le système algébrique :

$$Ax = b \quad (1)$$

Avec  $A$  une matrice de dimension  $m \times n$  et  $x$  un vecteur de dimension  $n \times 1$  et  $b$  de dimension  $m \times 1$ .

On considère le cas sous-déterminé avec :  $m < n$  et  $\text{rang}(A) = m$ . Le système présente un nombre d'équations ( $m$ ) inférieur aux nombres d'inconnus ( $n$ ).

Le nombre de solution est infinie. On propose alors le choix de minimiser la norme euclidienne du vecteur  $x$ . Dans ce cas essayons de trouver quelle est la relation qui permet de réaliser cette minimisation. Soit :

$$\begin{aligned} \underset{x}{\operatorname{argmin}} \frac{1}{2} \|x\|_2^2 \\ \text{s.t. : } Ax - b = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

# Modélisation et Commande Avancée

## Étude des robots redondants

### Systèmes sous-déterminés

On propose de déterminer sa solution en utilisant les multiplicateurs de Lagrange. Soit une nouvelle fonction objectif définie par :

$$\xi(x) = \frac{1}{2} \|x\|_2^2 + \lambda^T (Ax - b)$$

Avec un vecteur de dimension  $m$ . On a maintenant un problème de minimisation non-contraint avec  $m + n$  variables, les  $m$  composantes de  $b$  et les  $n$  composantes de  $x$ . On peut les regrouper dans le vecteur :

$$y = [x^T \lambda^T]^T$$

On peut maintenant établir la solution de ce problème par :

$$\frac{\partial \xi(x)}{\partial y} = 0$$

### Systèmes sous-déterminés

On peut décomposer cette expression en deux solutions :

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = x + A^T \lambda = 0_n$$

et

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = Ax - b = 0_m$$

. On a :  $x = -A^T \lambda$  et  $AA^T \lambda - b = 0$  De ces deux expressions on en déduit :

$$x = A^T (AA^T)^{-1} b \quad (3)$$

Avec :

$$A^+ = A^T (AA^T)^{-1} \quad (4)$$

$A^+$  est appelée la pseudo-inverse de Moore-Penrose de la matrice  $A$  ou inverse généralisée.

# Modélisation et Commande Avancée

Étude des robots redondants

## propriétés de la pseudo-inverse

En considérant la relation :

$$Ax = b$$

avec  $x = A^+b$  et  $A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$ , on obtient les propriétés suivantes :

$$AA^+A = A$$

$$A^+AA^+ = A^+$$

$$(A^+A)^T = A^+A$$

Une solution particulière  $x_p$  peut-être trouver en utilisant le projecteur dans le noyau de la matrice  $A$ . Soit :

$$x_p = A^+b + (I - A^+A)z \quad (5)$$

Avec  $z$  un vecteur quelconque.

### propriétés de la pseudo-inverse

Démonstration :

$$x_p = A^+b + (I - A^+A)z$$

$$Ax_p = AA^T(AA^T)^{-1}b + A(I - A^T(AA^T)^{-1}A)z$$

$$Ax_p = AA^T(AA^T)^{-1}b + Az - AA^T(AA^T)^{-1}Az$$

$$Ax_p = b + Az - Az$$

soit :

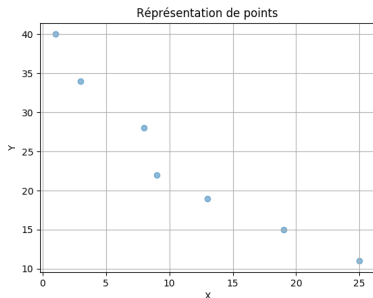
$$Ax_p = b$$



### Exercice : système sur-déterminé

Soit l'ensemble des points suivants :

- 1  $X = [1 \ 3 \ 8 \ 9 \ 13 \ 19 \ 25]$  et  $Y = [40 \ 34 \ 28 \ 22 \ 19 \ 15 \ 11]$
- 2 Déterminer la droite d'équation  $Y = a * X + b$  minimisant l'écart entre la distribution des points et la droite au sens des moindres carrés.



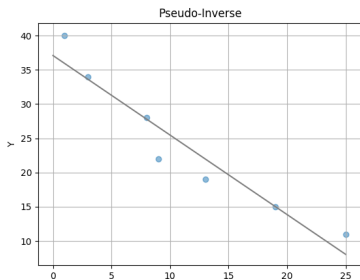
# Modélisation et Commande Avancée

## Étude des robots redondants

### Exercice : système sur-déterminé

Soit l'ensemble des points suivants :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ X_2 & 1 \\ \dots & 1 \\ X_7 & 1 \end{pmatrix}^+ Y^T = \begin{pmatrix} -1.1617 \\ 37.0875 \end{pmatrix} \quad (6)$$



### Exercice : système sous-déterminé

Soit le système suivant à 2 équations et 4 inconnues :

$$\begin{pmatrix} 0.5 & -1 & 3 & 0.1 \\ 2 & 1 & 1.5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 25 \end{pmatrix}$$

on obtient :

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & -1 & 3 & 0.1 \\ 2 & 1 & 1.5 & 2 \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} 12 \\ 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.38 \\ 1.98 \\ 3.77 \\ 4.30 \end{pmatrix}$$

### Hiérarchie de tâche

On suppose que l'on a  $N$  tâches à réaliser sur le robot humanoïde qui est une chaîne cinématique arborescente (CoM, Marche, saisie d'objets, manipulation, évitement de collision, etc.).

Est-il possible d'avoir  $N$  tâches concurrentes utilisant en même temps les articulations  $\theta$  du robot humanoïde? Dans une première approximation, on considère donc le problème suivant :

$$\dot{\theta} = \sum_{k=1}^N J_k^+ \dot{e}_k \quad (7)$$

- Est-ce que cette solution est viable?
- Expliquer l'incohérence de cette proposition.

# Modélisation et Commande Avancée

## Étude des robots redondants

### Hiérarchie de tâche

On propose d'étudier 2 tâches  $e_1$  et  $e_2$  sur le robot humanoïde. Si l'on prend indépendamment les 2 tâches dans le cas général on a :

$$\dot{\theta} = J_1^+ \dot{e}_1 + (\mathbb{I} - J_1^+ J_1) Z_1 \quad (8)$$

et

$$\dot{\theta} = J_2^+ \dot{e}_2 + (\mathbb{I} - J_2^+ J_2) Z_2 \quad (9)$$

avec  $Z_1$  et  $Z_2$  deux vecteurs quelconques.

On peut réécrire la première équation en multipliant par  $J_2$  à gauche et à droite :

$$J_2 \dot{\theta} = J_2 J_1^+ \dot{e}_1 + J_2 (\mathbb{I} - J_1^+ J_1) Z_1 \quad (10)$$

$$\dot{e}_2 = J_2 J_1^+ \dot{e}_1 + J_2 (\mathbb{I} - J_1^+ J_1) Z_1 \quad (11)$$

### Hiérarchie de tâche

on a :

$$Z_1 = (J_2(\mathbb{I} - J_1^+ J_1))^+ (\dot{e}_2 - J_2 J_1^+ \dot{e}_1) \quad (12)$$

On insère ce résultat dans l'équation (8) et on obtient :

$$\dot{\theta}^* = J_1^+ \dot{e}_1 + (\mathbb{I} - J_1^+ J_1)(J_2(\mathbb{I} - J_1^+ J_1))^+ (\dot{e}_2 - J_2 J_1^+ \dot{e}_1) \quad (13)$$

Avec  $P_1 = (\mathbb{I} - J_1^+ J_1)$  et  $P_2 = (\mathbb{I} - J_2^+ J_2)$  on a :

$$\dot{\theta}^* = J_1^+ \dot{e}_1 + P_1 (J_2 P_1)^+ (\dot{e}_2 - J_2 J_1^+ \dot{e}_1) \quad (14)$$

On peut simplifier cette équation car  $P_1 (J_2 P_1)^+ = (J_2 P_1)^+$ . On obtient :

$$\dot{\theta}^* = J_1^+ \dot{e}_1 + (J_2 P_1)^+ (\dot{e}_2 - J_2 J_1^+ \dot{e}_1) \quad (15)$$

### Hiérarchie de tâche

$$\dot{\theta}^* = J_1^+ \dot{e}_1 + (J_2 P_1)^+ (\dot{e}_2 - J_2 J_1^+ \dot{e}_1) \quad (16)$$

Cette équation peut ainsi se décomposer par :

$$u_1 = J_1^+ \dot{e}_1 \quad (17)$$

$$u_2 = (J_2 P_1)^+ (\dot{e}_2 - J_2 u_1) \quad (18)$$

et :

$$\dot{\theta}^* = u_1 + u_2 \quad (19)$$

### Hiérarchie de tâche

Si l'on souhaite généraliser à  $N$  tâches, on a :

$$\textcircled{1} \quad u_1 = J_1^+ \dot{e}_1$$

$$\textcircled{2} \quad u_2 = (J_2 P_1)^+ (\dot{e}_2 - J_2 u_1)$$

$$\textcircled{3} \quad u_3 = (J_3 P_2)^+ (\dot{e}_3 - J_3 u_2)$$

$$\textcircled{4} \quad u_4 = (J_4 P_3)^+ (\dot{e}_4 - J_4 u_3)$$

$$\textcircled{5} \quad \dots$$

$$\textcircled{6} \quad u_N = (J_N P_{N-1})^+ (\dot{e}_N - J_N u_{N-1})$$

$$\textcircled{7} \quad \dot{\theta}^* = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \dots + u_N$$

$$\dot{\theta}^* = \sum_{k=1}^N u_k + P_N Z_N \quad (20)$$

Avec  $u_k = (J_k P_{k-1})^+ (\dot{e}_k - J_k u_{k-1})$ ,  $P_0 = \mathbb{I}$  et  $u_0 = 0$ .



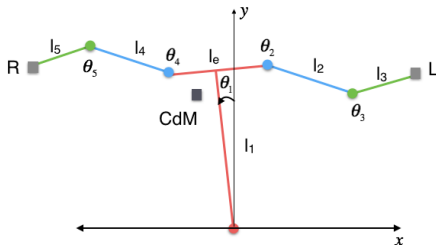
# Modélisation et Commande Avancée

## Étude des robots redondants

### Exercice : Commande hiérarchisée

On souhaite contrôler 3 tâches simultanément sur le torse d'un robot humanoïde.

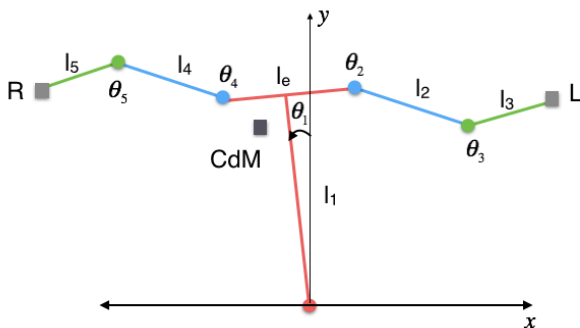
- T1 : Contrôle de la position de la main droite selon l'axe  $x$
- T2 : Contrôle de la position de la main gauche selon l'axe  $x$
- T3 : Contrôle de la position du CdM selon l'axe  $x$



Commande hiérarchisée d'un torse de robot humanoïde

# Modélisation et Commande Avancée

## Étude des robots redondants



Commande hiérarchisée d'un torse de robot humanoïde

Avec

- $l_1 = 0.7m$ ,  $l_2 = l_4 = 0.4m$ ,  $l_3 = l_5 = 0.3m$ ,  $l_e = 0.3m$
- $m_1 = 20kg$ ,  $m_2 = m_4 = 6kg$ ,  $m_5 = m_3 = 4kg$
- $C_1 = 0.6m$ ,  $C_2 = C_4 = 0.2m$ ,  $C_3 = C_5 = 0.15m$ ,  $l_e = 0.3m$

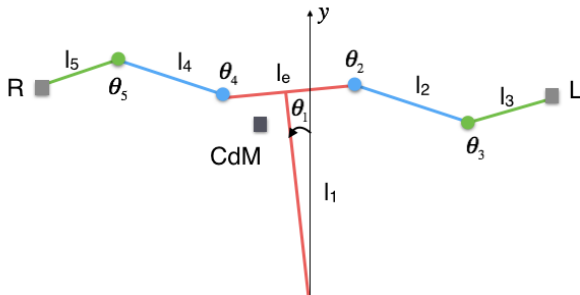
# Modélisation et Commande Avancée

## Modélisation du Centre de Masse

### Exercice : Modélisation du CdM

Écrire l'expression de la position du CdM du robot plan en utilisant la relation suivante :

$$OC\vec{d}M = \frac{1}{\sum_{i=1}^5 m_i} \sum_{i=1}^5 m_i O\vec{C}_i \quad (21)$$



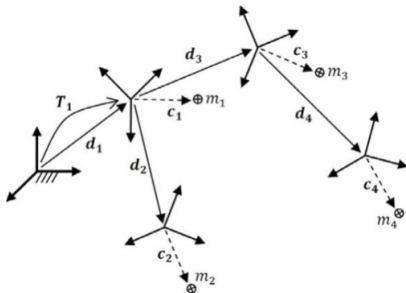
# Modélisation et Commande Avancée

## Modélisation du Centre de Masse en 3D

### Exercice : Modélisation du CdM en 3D

Développer l'expression de la position du CdM du robot :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{dM} \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{m_1}{M} \mathbf{T}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{m_2}{M} \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{c}_2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{m_3}{M} \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_3 \begin{bmatrix} \mathbf{c}_3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{m_4}{M} \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_3 \mathbf{T}_4 \begin{bmatrix} \mathbf{c}_4 \\ 1 \end{bmatrix}$$



## Modélisation du Centre de Masse en 3D

# Modélisation et Commande Avancée

## Modélisation du Centre de Masse en 3D

### Exercice : Modélisation du CdM en 3D

Montrer que la position du CdM peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{C}_{dM} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{r}_2 + \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{r}_3 + \mathbf{A}_1\mathbf{A}_3\mathbf{r}_4 + \mathbf{A}_1\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4\mathbf{r}_5$$