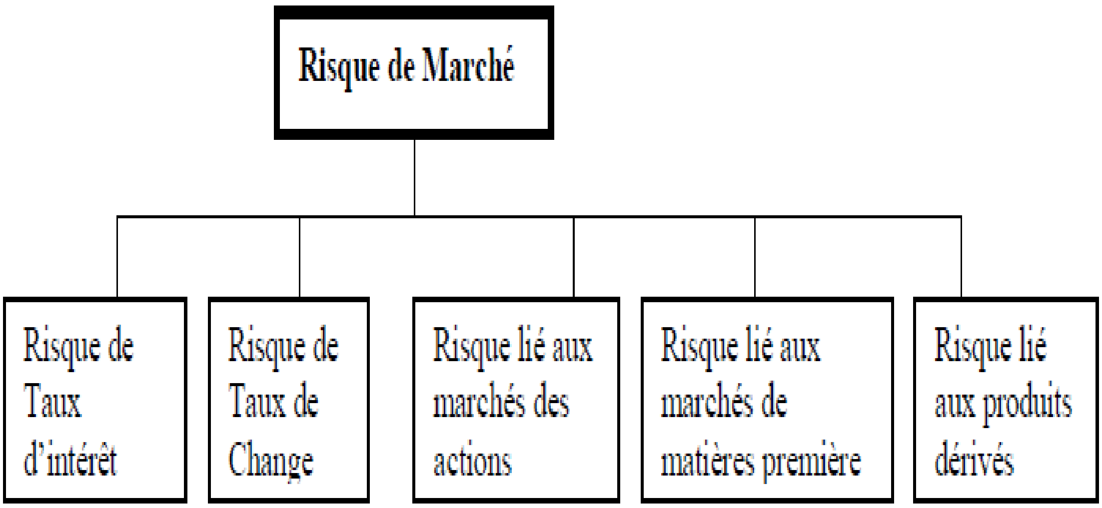
Value at Risk

1.Le risque de marché:

Le risque de marché est une **estimation** de **l'incertitude** des rentabilités **futures** qui résulte d'une évolution **défavorable** des facteurs du marché. Le risque de marché peut se définir comme une diminution de la valeur d'un portefeuille due aux changements des prix d'actifs financiers qui le composent. Il reflète la perte potentielle qui peut être causée par la chute de la valeur de marché du portefeuille.



La définition du risque fait référence au terme "volatilité " qui est souvent approximée par l'écart type des rendements d'un actif donné. L'écart type est une mesure de l'écartement des rendements par rapport à leur moyenne historique. La principale "loi" de la finance est donc la relation entre le rendement et le risque.

Mais, au lieu de considérer à la fois les variations positives et négatives du prix de l'action, l'investisseur peut être uniquement concerné par une mesure du risque qui ne s'intéresse qu'aux ***variations négatives*** de la valeur de son portefeuille (risque de **perte**).

On doit alors trouver des mesures de risque comme **le semi-écart type négatif** qui s'intéresse uniquement aux observations en dessous d'une moyenne ou d'un prix (risque baissier ou **downside risk**) ou des mesures des ***pires pertes possibles*** d'un portefeuille durant un horizon temporel et pour un niveau de confiance donné : c'est le principe fondateur de la ***Value at Risk***.

2. Un peu d'histoire :

Jusqu'à la **fin des années 80**, les méthodes utilisées pour détecter et gérer les risques de marché n'étaient adaptés qu'à des produits spécifiques. Il était alors impossible de comparer les mesures de risque entre les différents actifs. En plus, le développement spectaculaire des produits dérivés, l'augmentation de la volatilité des marchés financiers, et surtout les crises financières à répétition ont poussé les instituions financières à rechercher **un indicateur global et synthétique** des risques financiers.

En **Juillet 1993**, le **Groupe des 30** (constitué des représentants des institutions financières internationales et des autorités de régulation) recommandait de quantifier les risques par une mesure standard : **Value at Risk (VaR)** .

En **octobre 1994**, le directeur général La banque américaine **JP MORGAN** Dennis Weatherstone , ne désirant plus voir une **multitude** de rapports de risques de marché sur son bureau demanda à ses collaborateurs de développer un rapport **simplifié** sur lequel **l'exposition de la banque au risque du marché** était clairement exprimé. La banque développa alors son propre modèle de mesure du risque du marché (modèle **interne)**: **Riskmetrics** dont la diffusion gratuite sur le net a été à l'origine du développement spectaculaire de la VaR sur l'échelon mondial.

En **Janvier 1996**, le **comité de Bâle** adopte l'amendement **''risques de marchés''** aux **accords de Bâle de 1988** (Ces accords, pour stabiliser le système bancaire mondial, exigeaient une **réserve de**

fonds propres minimum de **8%** par rapport aux crédits accordés. C'est une contrainte de **solvabilité** appelée le **ratio Cooke**).

Cet amendement **"risques de marchés"** autorise les banques d'utiliser leur propre modèle interne: la **VaR**, pour déterminer le niveau en **fonds propres** susceptibles de **couvrir** les **pertes** éventuelles qu'elles peuvent subir si les conditions de marché évoluent défavorablement.

3. Définition de la Value at Risk (VaR):

La perte maximale attendue d'un portefeuille sur un horizon temporel donné et à un niveau de confiance donné sous des conditions normales de marché.

Estimer la VaR consiste à répondre à la question suivante : Quel est le **montant maximal** qu'un investisseur risque de perdre avec une probabilité de **x %** pour une période y ? Par exemple, un gestionnaire de portefeuille peut déclarer que le montant de la VaR **mensuelle** est de 20 millions d'euros avec une probabilité de **99%**. Ce qui signifie que pour le mois prochain, il y a seulement une probabilité de 1% pour que la perte soit plus élevée que 20 millions d'euros.

Les variables fondamentales pour l'estimation de la VaR sont :

1- le niveau de confiance : c'est la probabilité que la perte ne soit pas plus élevée que ce qui était attendu.

2- L'horizon de prévision: c'est le cadre temporel de la VaR estimée. On suppose que durant cet horizon de prévision, le portefeuille ne change pas.

3-volatilité des rendements.

Soient r_1, $r_2, r_3, \dots r_n$ des variables aléatoires qui représentent les rendements financiers d'un actif donné. Supposons que $\{r_t\}$ suive un processus stochastique : $r_t = \mu_t + \varepsilon_t = \mu_t + \sigma_t z_t$

Où $\mu_t = E(\varepsilon_t / \Omega_{t-1})$, $\sigma_t^2 = E(\varepsilon_t^2 / \Omega_{t-1})$ et $\{z_t\} = \varepsilon_t / \sigma_t$.

La VaR avec une probabilité donnée $\alpha \in (0,1)$, notée **VaR (**α), se définit comme le **quantile** α de la distribution de probabilité des rendements financiers : $F(VaR(\alpha)) = \Pr(r_t < VaR(\alpha)) = \alpha$

Ce quantile peut être estimé en inversant la fonction de distribution des rendements financiers standardisés G(z).

$$VaR(\alpha) = F^{-1}(\alpha) = \mu_t + \sigma_t G^{-1}(\alpha)$$

L'estimation de la VaR implique la spécification de G(z) et l'estimation de μ_t, σ_t^2 .

Méthodes d'estimation de la VaR:

Les méthodes paramétriques supposent que les rendements financiers standardisés suivent une fonction de distribution connue.

Les distributions les plus souvent utilisées sont la loi normale et la loi de student.

- Si on suppose que $\{z_t\} = \varepsilon_t / \sigma_t$ suit une distribution normale standard $\Phi(z)$; alors :

$$VaR(\alpha) = \mu_t + \sigma_t \Phi^{-1}(\alpha)$$

où $\Phi^{-1}(\alpha)$ est la quantile α de la distribution normale standard, et μ_t et σ_t^2 sont respectivement la moyenne et la variance conditionnelles des rendements financiers. Afin d'estimer la variance conditionnelle des rendements, on utilise un modèle de la famille GARCH qui **correspond le mieux aux caractéristiques empiriques des rendements**.

- Si on suppose que $\{z_t\}$ suit une loi de distribution de student à v degré de libertés, $(T_v(z))$; alors

$$VaR(\alpha) = \mu_t + \sigma_t T_v^{-1}(\alpha)$$

où $T_v^{-1}(\alpha)$ est le quantile α de la t-distribution de Student avec v degrés de liberté, et μ_t et σ_t^2 sont la moyenne et la variance conditionnelles des rendements.

Les modèles GARCH :

La classe la plus populaire des modèles de la volatilité conditionnelle est représentée par le modèle autorégressif conditionnellement hétéroscédastique introduit par Engle (1982). Ces modèles ont été généralisés par Bollerslev (1986) : ce sont les modèles GARCH (p, q). Le modèle le plus utilisé empiriquement est le modèle GARCH (1,1) :

Ce modèle a deux caractéristiques fondamentales : une spécification particulière de l'équation de la variance inspirée par les **caractéristiques empiriques** des données financières (faits stylisés) et une hypothèse selon laquelle les résidus standardisés soient indépendants identiquement distribués (i.i.d).

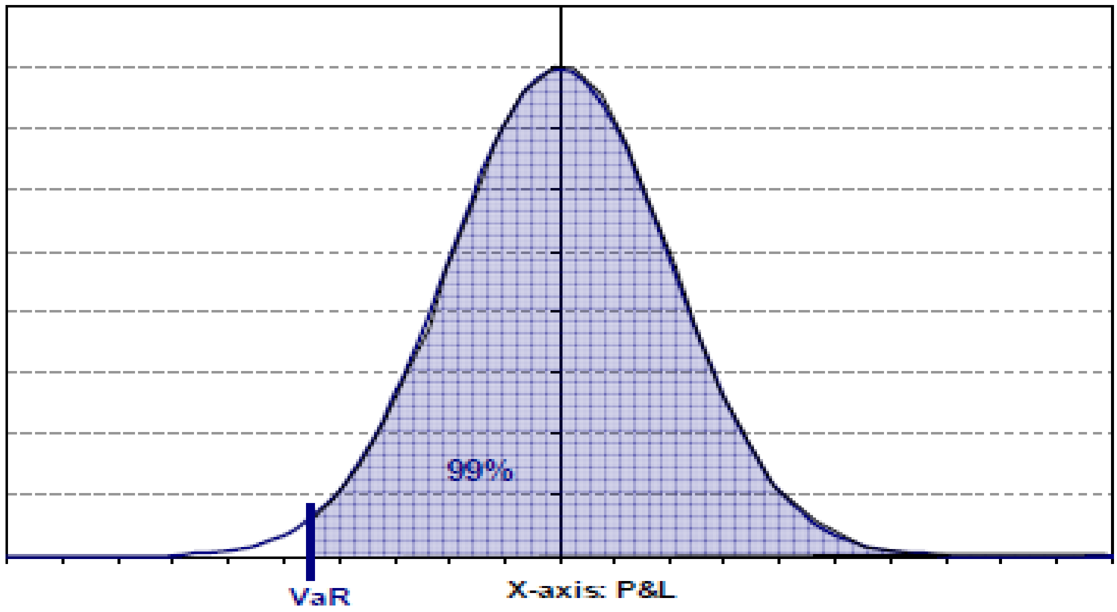
Afin d'implémenter l'algorithme GARCH, il est nécessaire de spécifier la **distribution** des ε_t. En général, on fait appel à la **distribution normale standard.** Ainsi, quand la variance de la série temporelle est calculée, le ***quantile 5% est calculé comme – 1.645 fois l'écart type estimé, alors que le quantile 1% est calculé comme -2,33 fois l'écart type estimé.***

Remarque: Riskmetrics vs GARCH

Sous l'approche Riskmetrics, les résidus standardisés sont également supposés normalement distribués. En revanche, la variance est calculée en utilisant une moyenne mobile exponentiellement pondérée (**E**xponentially **W**eighted **M**oving **A**verage), qui correspond à un modèle **IGARCH**: $\sigma_t^2 = \lambda\sigma_{t-1}^2 + (1-\lambda)y_{t-1}^2$ où $\lambda = 0.94$

La somme des paramètres de persistance équivaut à1. Par conséquent, il existe une racine unitaire dans le processus GARCH. Le modèles EWMA n'est donc qu'un modèle GARCH (1,1) spécifié avec les paramètres : $\omega = 0, \alpha = 1-\lambda$ et $\beta = \lambda$.

Tests de validation de la VaR (Backtesting) :



« VaR is only good as its backtest.When someone shows me a VaR number, I don't ask how it is computed, I ask to see the backtest » (Brown,2008).

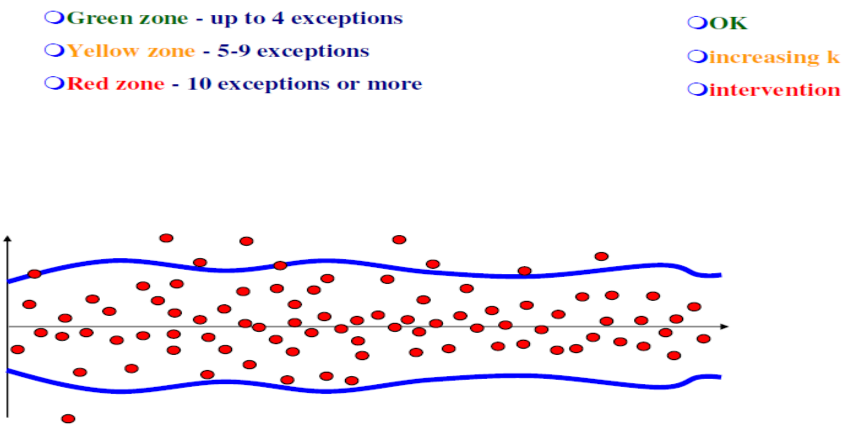
Le **backtesting** consiste à vérifier que les pertes éventuelles *ex post* sont inférieures ou égales aux chiffres de la VaR calculés *ex ante*. C'est un indicateur de la pertinence *ex post* des chiffres de la VaR anticipée.

Le comité de Bâle pour la supervision bancaire a imposé aux banques et autres institutions financières une **réserve minimale en capital** afin de se prémunir contre des pertes éventuelles résultant d'une évolution défavorable des facteurs du marché, en se basant sur les estimations de la Value at Risk. **En 1996**, le comité de Bâle a autorisé les institutions financières d'utiliser leurs propres modèles internes d'estimation de leur Value at Risk afin de déterminer leurs réserves en capital. En contrepartie, le comité a exigé que les réserves minimales en capital doivent être suffisamment larges pour couvrir des pertes éventuelles durant une période de détention du portefeuille de **10 jours** avec une estimation journalière à un niveau de confiance de **99%.**

Afin de pouvoir juger de la pertinence du modèle interne utilisé pour l'estimation de la VaR par chaque institution financière, le comité de Bâle exige qu'un backtest (une évaluation) soit effectué sur une période d'une année (**250 jours ouvrables**) pendant laquelle les rendements journaliers réalisés du portefeuille de la banque sont comparés à la Value at Risk estimée. Les pertes réalisées au-delà de la VaR estimée sont appelées **violations** ou **exceptions.**

En se basant sur le nombre de ces violations, différents facteurs d'échelle (scaling factors) sont imposés et multipliés par la Value at Risk afin d'obtenir la réserve minimale en capital comme le montre le tableau suivant :

Zone	Violations	Scaling Factor
Green Zone	0 to 4	3.00
Yellow Zone	5	3.40
	6	3.50
	7	3.65
	8	3.75
	9	3.85
Red Zone	10 or more	4.00



Test de Kupiec (1995) :

Le test le plus couramment utilisé pour vérifier la validité des modèles VaR est le test du rapport de vraisemblance introduit par Kupiec (1995). Un modèle peut être rejeté si le nombre de violations est trop élevé, indiquant l'échec du modèle dans l'estimation de la VaR. D'un autre côté, un modèle peut être rejeté si le nombre de violations est trop faible voire nul. En effet, dans le premier cas , un modèle agressif sous-estimerait le niveau du risque et inciterait l'institution financière à prendre des positions trop risquées alors que dans le deuxième cas, un modèle conservateur entraînerait une perte d'opportunités d'investissements et donc de profits.

Le test de Kupiec montre que si l'on suppose que la probabilité d'une exception est constante, alors le nombre d'exceptions x suit une **distribution binomiale** dans l'échantillon de tailleT :

$$f(x) = \binom{T}{x} p^{x} (1-p)^{T-x}$$

Un modèle VaR adéquat doit fournir des estimations VaR avec une couverture inconditionnelle ($\hat{p}$) $= \left(\frac{x}{T}\right)$ (taux d'échec=failure rate) égal au taux de couverture désiré (p) correspondant à niveau de confiance donné (1% pour un niveau de confiance de 99%,et 5% pour 95%).

Ainsi, pour effectuer le test de Kupiec, la seule information nécessaire est le nombre d'observations (T), le nombre d'exceptions (x), et le degré de confiance.

Par conséquent, l'hypothèse nulle du test pour l'adéquation du modèle :

$$H_0 : p = \hat{p} = \frac{x}{T}$$

La statistique du rapport de vraisemblance s'exprime comme suite :

$$LR_{UC} = -2\ln\left(\frac{(1-p)^{T-x}p^{x}}{\left[1-\left(\frac{x}{T}\right)^{T-x}\left(\frac{x}{T}\right)^{x}\right]}\right)$$

qui est asymptotiquement distribuée selon un khi-deux à un degré de liberté $\chi^2(1)$. Par conséquent, l'hypothèse nulle sera rejetée si $LR_{UC} > 3{,}84$.

Le tableau suivant montre les régions de confiance du test de KUPIEC.

VaR Confidence Level	Non-rejection region for number of violations *x*		
	T= 255 days	*T= 510 days*	*T= 1000 days*
99%	*x < 7*	*1 < x < 11*	*4 < x < 17*
97.5%	*2 < x < 12*	*6 < x < 21*	*15 < x < 36*
95%	*6 < x < 21*	*16 < x < 36*	*37 < x < 65*
92.5%	*11 < x < 28*	*27 < x < 51*	*59 < x < 92*
90%	*16 < x < 36*	*38 < x < 65*	*81 < x < 120*

La VaR modèle GARCH-Loi de Student (St-VaR)

Quantile de la loi de Student

Dégré de liberté	5	7	9	10	30	100	1500
Quantile (q)	3,36493	2,99795157	2,82143792	2,76376946	2,45726153	2,36421736	2,32883641

La Cornish-Fisher Value at Risk: CF-VaR

La VaR normale ajustée avec le skewness et le kurtosis de la distribution des rendements standardisés:

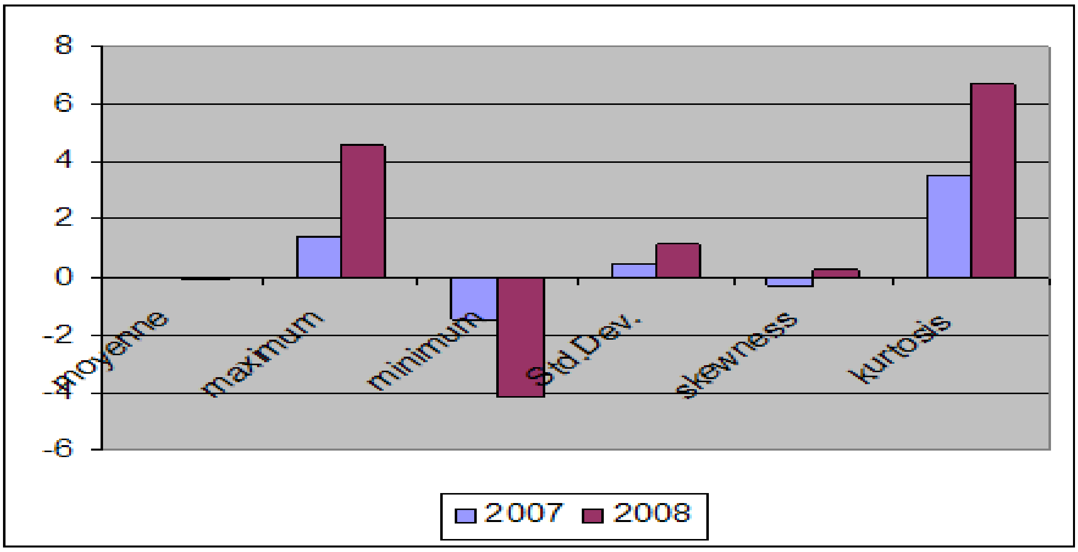
$$z^{CF} \approx z + \frac{1}{6}(z^2 - 1)S + \frac{1}{24}(z^3 - 3z)K - \frac{1}{36}(2z^3 - 5z)S^2$$

z est le quantile de la loi normale standard, S : skewness et K : l'excès de kurtosis.

Ainsi, la Cornish-Fisher VaR est: $VaR_{\alpha}^{CF} = \mu + z^{CF}\sigma$

La Cornish-Fisher VaR permet de calculer la Value-at-Risk pour les distributions avec asymmétrie and queues épaisses. Si la distribution est normale, le skewness et l' excés de kurtosis du rendement de portefeuille sont nuls, z^{CF} est donc équivalent au quantile de la loi normale z .

Backtesting sur 2007-2008



Statistiques descriptives des rendements 2007-2008

Year	Confidence level	NVaR	Riskmetrics	StVaR	cfVaR
2007	99%	1	1	0	0
	95%	6	6	8	6
2008	99%	17	17	17	10
	95%	34	34	31	29

Table. Dépassement des modèles VaR

Degré de confiance	Modèle du risque de marché			
	NVaR	Riskmetrics	StVaR	CfVaR
95%	40	40	39	35
99%	18	18	17	10

Table. Résultats du test de Kupiec

Modèle	Degré de confiance	Test statistic LR	Critical value χ^2	Test outcome
NvaR	99%	19,93	3,84	REJECT
	95%	7,45	3,84	REJECT
Riskmetrics	99%	19,93	3,84	REJECT
	95%	7,45	3,84	REJECT
StVaR	99%	17,41	3,84	REJECT
	95%	6,52	3,84	REJECT
CfVaR	99%	3,71	3,84	Accept
	95%	3,35	3,84	Accept