MÉTHODES NUMÉRIQUES

Alain Foucaran

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : POURQUOI ?

Les méthodes utilisées en mathématiques classiques ne peuvent résoudre tous les problèmes.

Exemple : quelle est la valeur de x telle que :

$$x = e^{-x}$$

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : POURQUOI ?

Les méthodes utilisées en mathématiques classiques ne peuvent résoudre tous les problèmes.

Exemple : quelle est la valeur de x telle que :

$$x = e^{-x}$$

Il n'est pas possible de donner une formule donnant la valeur de x !

Autres exemples :

- On ne sait pas résoudre analytiquement toutes les équations différentielles.
- On ne sait pas calculer toutes les intégrales.

Solution : On remplace la résolution mathématique exacte par une résolution numérique qui donne généralement une solution approchée.

L'analyse numérique est une branche ancienne des mathématiques.

Autrefois, les mathématiciens développaient des outils pour résoudre les problèmes posés par les sciences et la nature.

Newton (1643-1727) : physicien

Gauss (1777-1855) : astronome

Les méthodes numériques ne connurent cependant leur essor actuel qu'avec l'avènement des ordinateurs aux alentours des années 1945-1947.

Pour être utilisées correctement et pour que leurs résultats soient interprétés correctement, les méthodes d’analyse numérique nécessitent une connaissance des principes de base qui ont guidé les mathématiciens.

Il est très difficile, voire impossible, d’utiliser un algorithme d’analyse numérique comme une boîte noire.

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : OBJECTIF DU COURS

Donner des méthodes numériques de base pour résoudre un certain nombre de problèmes mathématiques que l'on rencontre en physique et notamment en électronique.

ET

Comprendre le fonctionnement des algorithmes pour permettre une analyse critique des résultats.

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : PLAN DU COURS

- Développement de TAYLOR
- Racines d'Equations
- Résolution de Système d'Equations
- Moindres Carrés et Lissage
- Dérivée – Extrapolation
- Intégration
- Equations Différentielles

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR

- Développement de TAYLOR
- Racines d' Equations
- Résolution de Système d' Equations
- Moindres Carrés et Lissage
- Dérivée – Extrapolation
- Intégration
- Equations Différentielles

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR

Pour le calcul numérique, le développement de Taylor est un outil fondamental. Pour une fonction *f* au voisinage de x_0 on écrit :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots$$

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}$$

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i (x - x_0)^i \quad \text{avec} \quad a_i = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}$$

Lorsque la série est tronquée à l'ordre N inclus, on écrit :

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{N} a_i (x - x_0)^i + o\left((x - x_0)^{N+1}\right)$$

Donne l'ordre de grandeur de l'erreur

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : DÉVELOPPEMENT DE TAYLOR

Exemple :

Développement de Taylor de $f(x) = e^{3x^2}$?

Exemple :

Développement de Taylor de $f(x) = e^{3x^2}$?

$$e^U = 1 + U + \frac{U^2}{2!} + \frac{U^3}{3!} + \cdots$$

$$e^{3x^2} = 1 + 3x^2 + \frac{9x^4}{2} + \frac{9x^6}{2} + \cdots$$

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : PLAN DU COURS

- Développement de TAYLOR
- Racines d'Equations
- Résolution de Système d'Equations
- Moindres Carrés et Lissage
- Dérivée – Extrapolation
- Intégration
- Equations Différentielles

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : RACINE D'ÉQUATIONS

Objectif:

Résoudre l'équation $f(x) = 0$

- Méthode itérative (point fixe)
- Méthode de la Bissection (dichotomie)
- Méthode de la tangente (Newton)
- Méthode de la sécante (Lagrange)
- Algorithme de Bairstow

Objectif:

Résoudre l' équation $f(x) = 0$

- <u>Méthode itérative (point fixe)</u>
- Méthode de la Bissection (dichotomie)
- Méthode de la tangente (Newton)
- Méthode de la sécante (Lagrange)
- Algorithme de Bairstow

RACINE D' ÉQUATIONS : MÉTHODE ITÉRATIVE (POINT FIXE)

Principe général :

- Trouver g en fonction de f telle que
  - $f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=x$
  - la suite u_k converge (si x_0 est bien choisi)
- Conditions suffisantes sur g en dimension 1
  - g dérivable et $|g'(x)| < 1$

RACINE D' ÉQUATIONS : MÉTHODE ITÉRATIVE (POINT FIXE)

Exemple : $f(x) = x^3 + 3x + 2 = 0$

Donner g(x)=x ?

$$x = x^3 + 4x + 2$$

$$x = -\frac{1}{3}\left(x^3 + 2\right)$$

$$x = -\frac{3x + 2}{x^2}$$

RACINE D'ÉQUATIONS : MÉTHODE ITÉRATIVE (POINT FIXE)

Résolution :

La résolution s'effectue de la manière suivante: partant d'une première estimation de x_0, on l'injecte au second membre de $x_0=g(x)$, ce qui donne une nouvelle estimation $x_1=g(x_0)$ qu'on injecte à nouveau au second membre …

RACINE D' ÉQUATIONS : MÉTHODE ITÉRATIVE (POINT FIXE)

Exemple :

En partant de la valeur x = 0,2, résoudre par itération l' équation :

$$x^2 - x = 0$$

Cette équation possède évidemment deux racines, 0 et 1. Pour la résoudre par itération, il faut la mettre sous la forme : $x = g(x)$, et on sait que la méthode converge si on a, au voisinage de la racine : $|g'(x)| < 1$.

Supposons qu'on veuille rechercher la racine = 1 par méthode itérative.

on peut par exemple écrire l'équation :

$$x = x^2$$

$$g(x) = x^2 \quad \text{et} \quad g'(x) = 2x$$

on voit que le processus converge au voisinage de la racine 0 et diverge au voisinage de 1 puisque $g'(0) = 0$ et $g'(1) = 2$.

	A	B
1	x	g(x)=x*x
2	0,2	0,04
3	0,04	0,0016
4	0,0016	0,00000256
5	0,00000256	6,5536E-12
6	6,5536E-12	4,295E-23

Tableau 1 : $x = x^2$

<u>on voit que :</u>

si $x_0 < 1$ on converge vers 0

si $x_0 > 1$ on diverge

si $x_0 = 1$ on reste bloqué à 1

on peut aussi écrire :

$$x = \sqrt{x}$$

$$g(x) = \sqrt{x} \quad \text{et} \quad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

	A	B
1	x	g(x)=x^(1/2)
2	0,2	0,4472136
3	0,4472136	0,6687403
4	0,6687403	0,81776543
5	0,81776543	0,90430384
6	0,90430384	0,95094892

Tableau 2 : $x = x^{1/2}$

on voit qu'au contraire de tout à l'heure le processus converge au voisinage de 1 et pas au voisinage de 0 puisque $g'(1) = 1/2$ *et* $g'(0) = \infty$.

quelque soit x_0*, on converge toujours vers 1*

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : RACINE D'ÉQUATIONS

Objectif:

Résoudre l'équation $f(x) = 0$

- Méthode itérative (point fixe)
- <u>Méthode de la Bissection (dichotomie)</u>
- Méthode de la tangente (Newton)
- Méthode de la sécante (Lagrange)
- Algorithme de Bairstow

RACINE D' ÉQUATIONS : BISSECTION (DICHOTOMIE)

En grec *dikhotomia* = action de partager en 2

Quand peut-on utiliser cette méthode ?

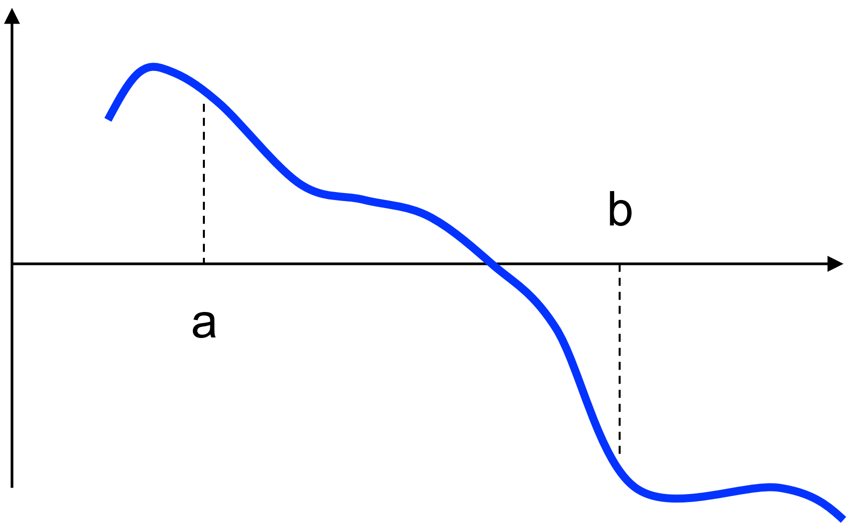
Lorsque :

- f est continue

et

- on connaît 2 points $x=a$ et $x=b$ tels que

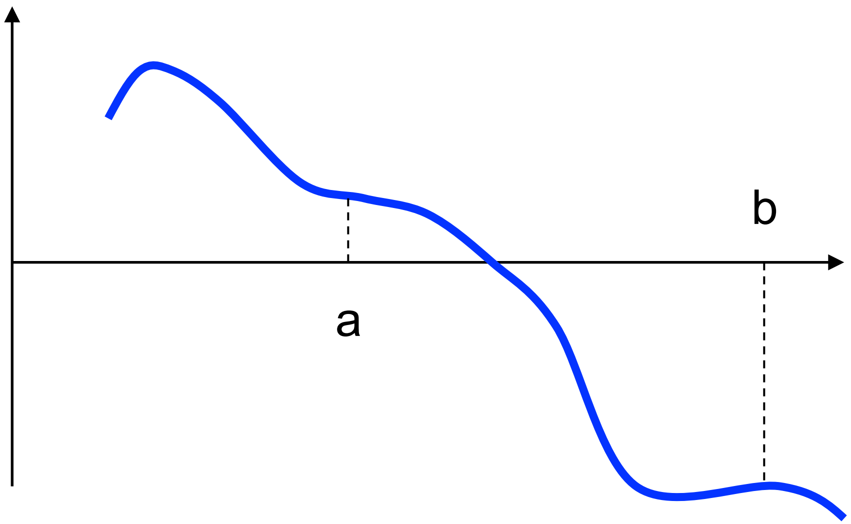
$$f(a)\,.\,f(b) < 0$$



Dans ces conditions, il existe au moins une solution sur [a ; b]

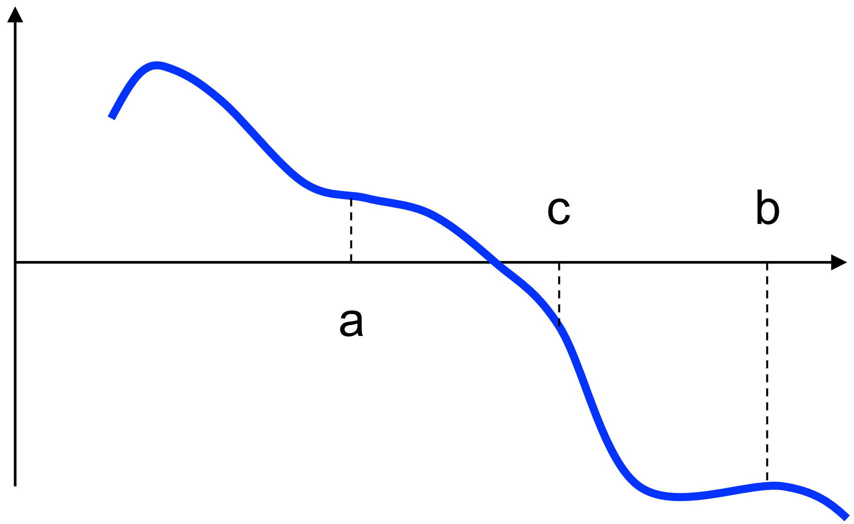
RACINE D'ÉQUATIONS : BISSECTION (DICHOTOMIE)

1 – La solution est encadrée : elle se trouve dans l'intervalle [a ; b]



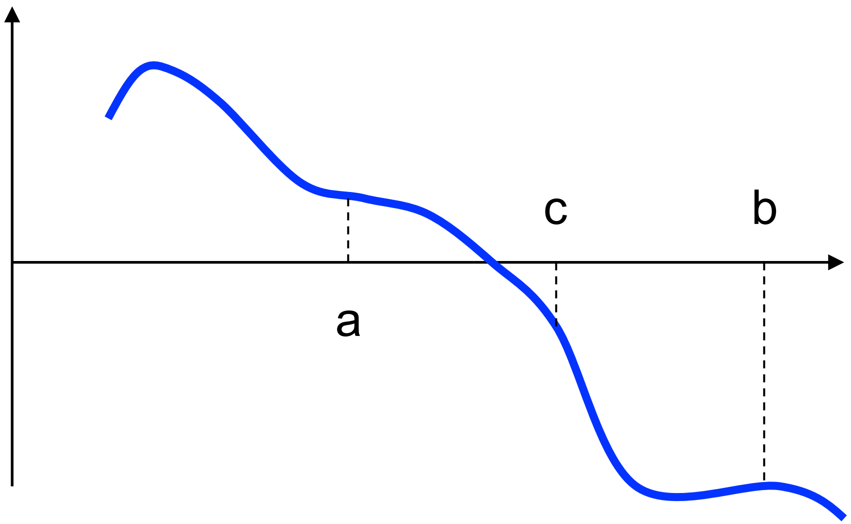
RACINE D'ÉQUATIONS : BISSECTION (DICHOTOMIE)

1 – La solution est encadrée : elle se trouve dans l'intervalle [a ; b]
2 – On choisit un point c au milieu de [a ; b]



RACINE D'ÉQUATIONS : BISSECTION (DICHOTOMIE)

1 – La solution est encadrée : elle se trouve dans l'intervalle [a ; b]
2 – On choisit un point c au milieu de [a ; b]



3 – Si f(a).f(c) < 0 alors la solution se trouve dans [a ; c] , sinon elle se trouve dans [c ; b]

→ L'intervalle encadrant la solution est donc 2 fois plus petit ! Il suffit de recommencer jusqu'à obtenir la précision souhaitée.

RACINE D'ÉQUATIONS : BISSECTION (DICHOTOMIE)

Au bout de n itérations, la longueur de l'intervalle encadrant la solution est :

$$\varepsilon = \frac{b-a}{2^n}$$

La méthode converge à coup sûr !

RACINE D'ÉQUATIONS : BISSECTION (DICHOTOMIE)

Limitations :

- Il faut connaître *a priori* [a ; b]

- S'il y a plusieurs solutions dans [a ; b], la méthode converge vers l'une d'entre elles

- Ne permet pas de résoudre une équation avec *f(x)* qui s'annule sans changer de signe

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : RACINE D' ÉQUATIONS

Objectif:

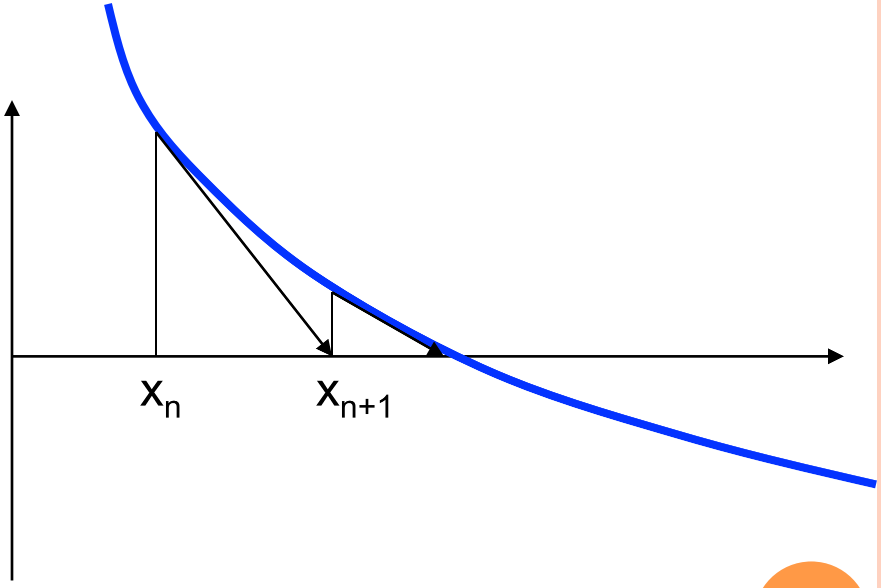
Résoudre l' équation $f(x) = 0$

- Méthode itérative (point fixe)
- Méthode de la Bissection (dichotomie)
- Méthode de la tangente (Newton)
- Méthode de la sécante (Lagrange)
- Algorithme de Bairstow

Quand peut-on utiliser cette méthode ?

Lorsque l' on connaît la dérivée de la fonction

En $x=x_n$, on trace la tangente à la courbe. L' intersection de la tangente avec l' axe des abscisses donne x_{n+1}, un point plus proche de la solution



RACINE D'ÉQUATIONS : TANGENTE (NEWTON)

L'équation de la tangente en (x_n, y_n) s'écrit :

$$Y_n(x) = f'(x_n) \times x + b$$

On connaît 2 points : En $x = x_n$ on a $f(x_n)$
En $x = x_{n+1}$ on a 0

d'où :

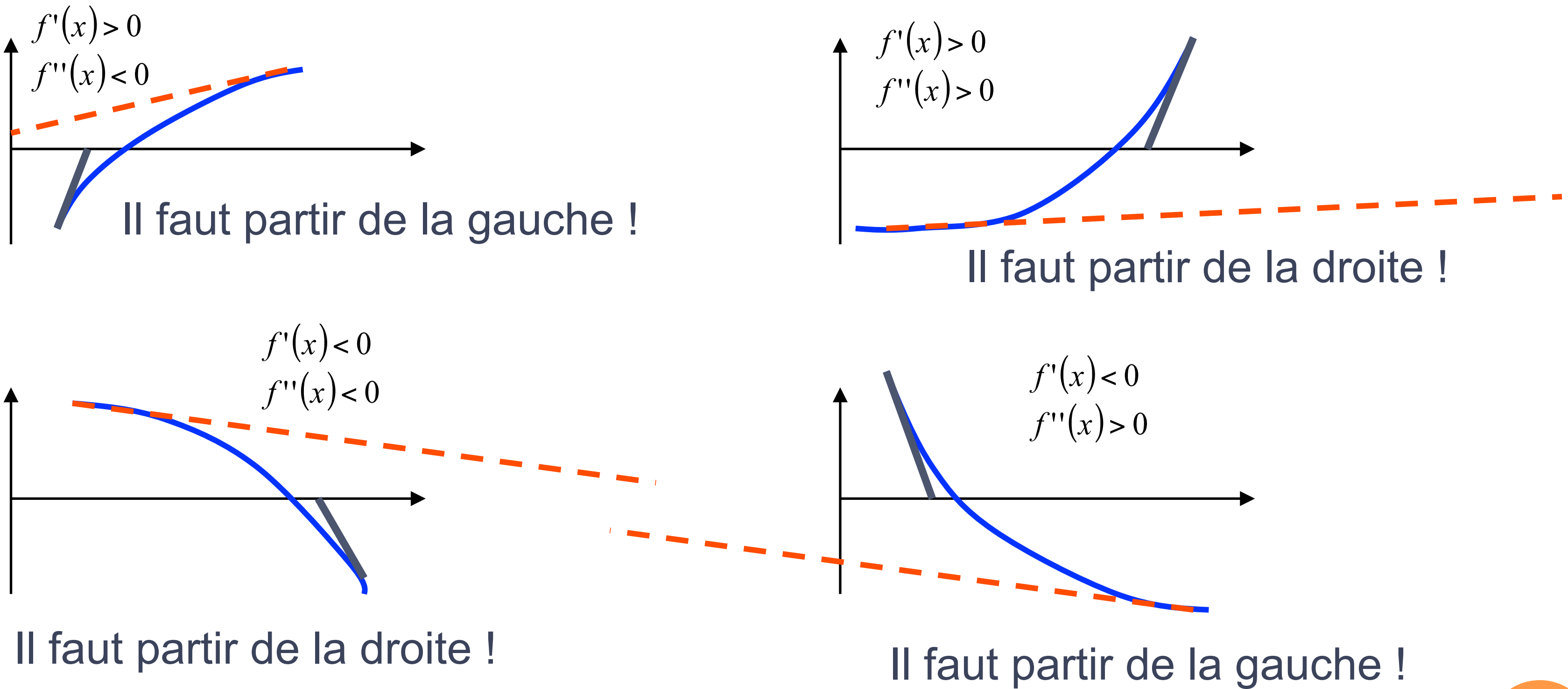
$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Suite qui converge vers notre solution (sous certaines conditions)

À condition, bien sûr, que la dérivée ne s'annule pas !

Condition suffisante et point de départ

On se place sur un intervalle au voisinage de la solution sur lequel les dérivées 1^{ere} et 2nde existent et ne s'annulent pas : la fonction est donc strictement monotone et de même convexité.



La méthode converge alors si la solution est une solution simple.

RACINE D'ÉQUATIONS : TANGENTE (NEWTON)

Dans le cas de racines multiples, on peut construire une nouvelle suite en remplaçant **f(x)** par **f(x)/f' (x)**

Racine simple

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Racine multiple

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)f(x_n)}{f'(x_n)^2 - f(x_n)f''(x_n)}}$$

Objectif:

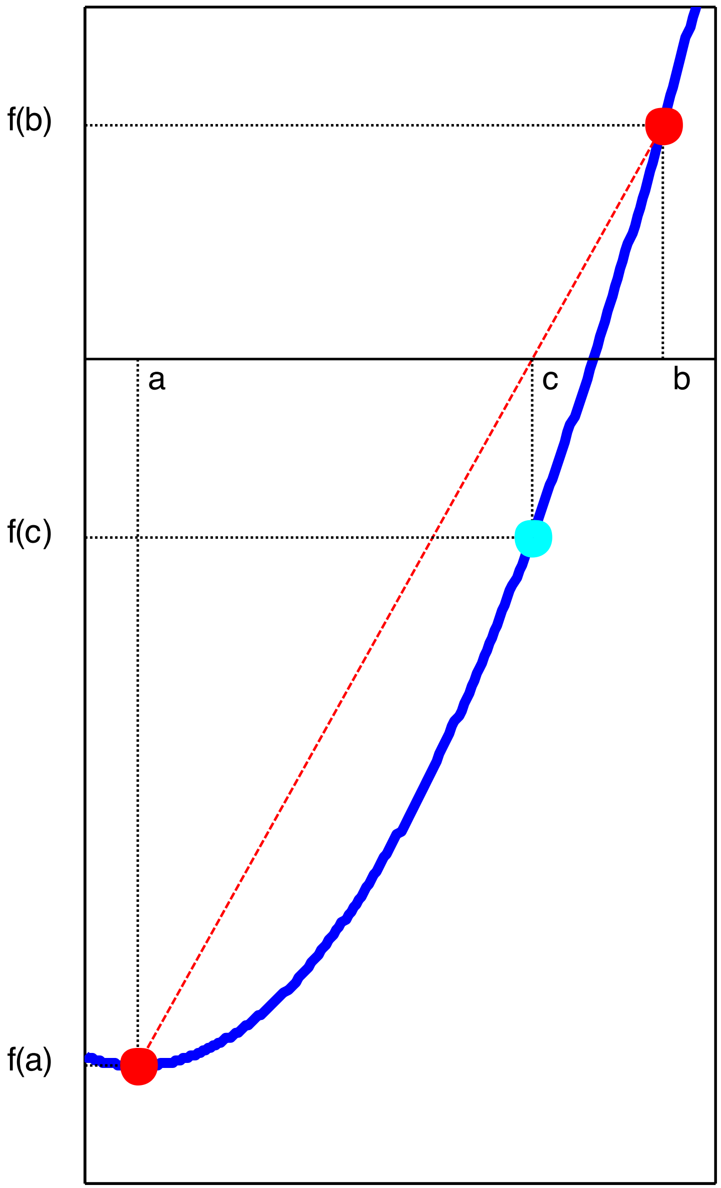
Résoudre l' équation $f(x) = 0$

- Méthode itérative (point fixe)
- Méthode de la Bissection (dichotomie)
- Méthode de la tangente (Newton)
- Méthode de la sécante (Lagrange)
- Algorithme de Bairstow

RACINE D'ÉQUATIONS : SÉCANTE (LAGRANGE)

Lorsque l'on ne connaît pas analytiquement l'expression de la dérivée, on peut appliquer la méthode de Newton en approximant la dérivée par :

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}$$



RACINE D' ÉQUATIONS : SÉCANTE (LAGRANGE)

En injectant cette expression dans :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

On obtient :

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1})f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}}$$

Objectif:

Résoudre l' équation $f(x) = 0$

- Méthode itérative (point fixe)
- Méthode de la Bissection (dichotomie)
- Méthode de la tangente (Newton)
- Méthode de la sécante (Lagrange)
- <u>Algorithme de Bairstow</u>

RACINE D' ÉQUATIONS : ALGORITHME DE BAIRSTOW

Permet de déterminer les racines d'un polynôme de degré n.

Déterminons les racines du polynôme :

$P\,n(\lambda) = a_0 \lambda^{n} + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n$

La méthode de Bairstow consiste à calculer tous les facteurs quadratiques de P.

$P(x) = a_0 \prod_{J+1}^{n} (x^2 + pjx + qj)$ si P est un polynôme de degré 2n

$P(x) = a_0 (x - \gamma) \prod_{J+1}^{n} (x^2 + pjx + qj)$ si P est un polynôme de degré 2n +1

RACINE D' ÉQUATIONS : ALGORITHME DE BAIRSTOW

Puis, nous allons calculer les racines de ces facteurs quadratiques :

On considère un facteur quadratique initial :

$x^2 + px + q$

On écrit la formule de division :

$P(x) = (x^2 + p\,x + q)\,Q(x) + r\,x + s$

Avec : $Q(x) = b_0\,x^{n-2} + b_1\,x^{n-3} + \ldots + b_{n-2}$

$r = b_{n-1}$ et $s = b_{n-1}.p + b_n$

On cherche à déterminer p et q pour que :

$r(p, q) = s(p,q) = 0.$

RACINE D'ÉQUATIONS : ALGORITHME DE BAIRSTOW

Pour ceci on calcule p et q (par la méthode de Newton-Raphson) : à partir d'une estimation de p et q on cherche Δp et Δq tel que :

$$r(p+\Delta p, q+\Delta q) = s(p+\Delta p, q+\Delta q) = 0$$

Soit au premier ordre :

$$r(p, q) + \partial r/\partial p \, \Delta p + \partial r/\partial q \, \Delta q = 0$$

$$s(p, q) + \partial s/\partial p \, \Delta p + \partial s/\partial q \, \Delta q = 0$$

Nous allons calculer Δp et Δq en résolvant ce système de 2 équations puis on remplace p par $p+\Delta p$ et q par $q+\Delta q$. La suite des estimations obtenues converge.

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : PLAN DU COURS

- Développement de TAYLOR
- Racines d'Equations
- <u>Résolution de Système d'Equations</u>
- Moindres Carrés et Lissage
- Dérivée – Extrapolation
- Intégration
- Equations Différentielles

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : SYSTÈME D'ÉQUATIONS

Objectif:

Résoudre l'équation $A.X = B$

- Méthode de Cramer
- Méthode de Jacobi
- Méthode de Gauss-Siedel
- Méthode de Choleski
- Méthode de Newton-Raphson

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : SYSTÈME D' ÉQUATIONS

$$A.X = B$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots\ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : SYSTÈME D' ÉQUATIONS

$$A.X = B$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : MÉTHODE DE CRAMER

Objectif:

Résoudre l'équation $A.X = B$

- <u>Méthode de Cramer</u>
- Méthode de Jacobi
- Méthode de Gauss-Siedel
- Méthode de Choleski
- Méthode de Newton-Raphson

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : MÉTHODE DE CRAMER

$$A.X = B$$

$$x_p = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\mu_{k,p}}_{\text{!transposée}} b_k = \frac{1}{\det A}\det\begin{pmatrix}\text{la matrice obtenue à partir de A} \\ \text{en remplaçant sa } p\text{-ième colonne} \\ \text{(càd celle des coefficients de } x_p\text{)} \\ \text{par la colonne du 2}^{\text{nd}}\text{ membre}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\det(X, X', X'') = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} &= x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \\ &= x(y'z'' - y''z') - y(x'z'' - x''z') + z(x'y'' - x''y') \\ &= xy'z'' + x'y''z + x''yz' - xy''z' - x'yz'' - x''y'z.\end{aligned}$$

Exemple :

$$(S):\begin{cases}6x+3y+4z=1\\5x-7y+5z=2\\5x+3y+3z=0\end{cases}$$

.

Matrice du système : $A=\begin{pmatrix}6 & 3 & 4\\5 & -7 & 5\\5 & 3 & 3\end{pmatrix}$

$$\det(A)=?$$

Exemple :

$$(S):\begin{cases}6x+3y+4z=1\\5x-7y+5z=2\\5x+3y+3z=0\end{cases}$$

.

Matrice du système : $$A=\begin{pmatrix}6 & 3 & 4\\5 & -7 & 5\\5 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

$$\det(A)=14$$

$$x=\frac{1}{14}\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ 2 & -7 & 5\\ 0 & 3 & 3\end{vmatrix}=\frac{1}{14}(-7\times 3-5\times 3-2(9-12))=-\frac{30}{14}=-\frac{15}{7}$$

$$y=\frac{1}{14}\begin{vmatrix}6 & 1 & 4\\ 5 & 2 & 5\\ 5 & 0 & 3\end{vmatrix}=\frac{1}{14}(-(5\times 3-5\times 5)+2(6\times 3-5\times 4))=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$$

$$z=\frac{1}{14}\begin{vmatrix}6 & 3 & 1\\ 5 & -7 & 2\\ 5 & 3 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{14}(15+35-2(18-15))=\frac{22}{7}$$

Objectif:

Résoudre l' équation $A.X = B$

- Méthode de Cramer
- <u>Méthode de Jacobi</u>
- Méthode de Gauss-Siedel
- Méthode de Choleski
- Méthode de Newton-Raphson

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : MÉTHODE DE JACOBI

On suppose que A est une matrice inversible dont aucun élément de la diagonale est nul. Cette méthode consiste à isoler le coefficient de la diagonale de chaque ligne du système.

Si l'un des coefficients diagonaux est nul, il est parfois possible de permuter certaines lignes pour éviter cette situation.

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : MÉTHODE DE JACOBI

Nous cherchons à résoudre le système Ax = B.
On commence par décomposer la matrice A
A = M – N, de telle façon que M soit inversible
Il est ensuite possible d'écrire le système Ax = B sous la forme :

$$Mx = Nx + b$$

Où encore :

$$x = M^{-1}Nx + M^{-1}b$$

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : MÉTHODE DE JACOBI

Cela revient à résoudre par récurrence la suite des vecteurs :

$$x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$$

Cette relation est une relation de récurrence du premier ordre.

Avec M = D, N = E+ F, nous obtenons la relation suivante :

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(E+F)x^{(k)} + D^{-1}b$$

Si on exprime cette relation en fonction des éléments de la matrice A, la relation de Jacobi est la suivante :

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = -\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{(k)} + \frac{b_i}{a_{ii}}}$$

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : MÉTHODE DE JACOBI

<u>Les décompositions de A font intervenir :</u>
Une matrice diagonale et deux matrices triangulaires

$$-E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$-F = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 17 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -18 \end{cases}$$

à partir d'un vecteur [0 0 0]

<u>première itération</u>

$$\begin{cases} x_1^1 = \frac{1}{3}(2 - 0 + 0) = \frac{2}{3} \\ x_2^1 = \frac{1}{5}(17 - 0 - 0) = \frac{17}{5} \\ x_3^1 = -\frac{1}{6}(-18 - 0 + 0) = 3 \end{cases}$$

<u>deuxième itération</u>

$$\begin{cases} x_1^2 = \frac{1}{3}(2 - \frac{17}{5} + 3) = \frac{8}{15} \\ x_2^2 = \frac{1}{5}(17 - \frac{2}{3} - 2(3)) = \frac{17}{5} \\ x_3^2 = -\frac{1}{6}(-18 - 2(\frac{2}{3}) + \frac{17}{5}) = 2,655 \end{cases}$$

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,66667	3.40000	3.00000
2	0.53333	2.06667	2.65556
3	0.86296	2.23111	2.83333
4	0.86741	2.09407	2.91580
5	0.94057	2.06020	2.94012
6	0.95997	2.03583	2.97016
7	0.97811	2.01994	2.98069
8	0.98691	2.01210	2.98938
9	0.99242	2.00686	2.99362
10	0.99558	2.00407	2.99633

Les valeurs convergent vers la solution [1 2 3] avec une convergence assez lente

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : MÉTHODE DE GAUSS-SIEDEL

Objectif:

Résoudre l'équation $A.X = B$

- Méthode de Cramer
- Méthode de Jacobi
- <u>Méthode de Gauss-Siedel</u>
- Méthode de Choleski
- Méthode de Newton-Raphson

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : MÉTHODE DE GAUSS-SIEDEL

On applique la méthode de JACOBI

MAIS on utilise les dernières valeurs obtenues plutôt que celles de l'itération précédente.

La méthode converge plus vite !

On a le même critère de convergence que pour la méthode de Jacobi !

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : MÉTHODE DE GAUSS-SIEDEL

Par calculs successifs, la relation de Gauss-Seidel est la suivante :

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=1+i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right)}$$

Exemple :

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 17 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -18 \end{cases}$$

à partir d'un vecteur [0 0 0]

<u>première itération</u>

$$\begin{cases} x_1^1 = \frac{1}{3}(2 - 0 + 0) = \frac{2}{3} \\ x_2^1 = \frac{1}{5}\left(17 - \frac{2}{3} - 0\right) = \frac{49}{15} \\ x_3^1 = -\frac{1}{6}\left(-18 - 2\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{49}{15}\right) = \frac{241}{90} \end{cases}$$

<u>deuxième itération</u>

$$\begin{cases} x_1^2 = \frac{1}{3}(2 - \frac{49}{15} + \frac{241}{90}) = 0.47 \\ x_2^2 = \frac{1}{5}\left(17 - 0.47 - 2\left(\frac{241}{90}\right)\right) = 2.235 \\ x_3^2 = -\frac{1}{6}(-18 - 2(0.47) + 2.235) = 2,784 \end{cases}$$

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
0	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,66667	3.26667	2.67778
2	0.47037	2.23481	2.78432
3	0.84983	2.11630	2.93056
4	0.93808	2.04016	2.97267
5	0.97750	2.01543	2.98993
6	0.99150	2.00573	2.99621
7	0.99683	2.00515	2.99858
8	0.99881	2.00080	2.99947
9	0.99955	2.00030	2.99980
10	0.99983	2.00011	2.99993

On constate que pour un même nombre d'itérations, la solution approximative obtenue par la méthode de Gauss-Seidel est plus précise. Les valeurs convergent vers la solution x= [1 2 3] avec une convergence plus rapide.

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : MÉTHODE DE CHOLESKI

Objectif:

Résoudre l'équation $A.X = B$

- Méthode de Cramer
- Méthode de Jacobi
- Méthode de Gauss-Siedel
- <u>Méthode de Choleski</u>
- Méthode de Newton-Raphson

Cette factorisation s'applique pour des matrices A symétriques et positives.

Théorème : Soit A une matrice de dimension n. Il existe une et une seule matrice B triangulaire inférieure, telle que $A=BB^t$.

Objectif:

Résoudre l'équation $A.X = B$

- Méthode de Cramer
- Méthode de Jacobi
- Méthode de Gauss-Siedel
- Méthode de Choleski
- Méthode de Newton-Raphson

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : MÉTHODE DE NEWTON-RAPHSON

On a un système non linéaire de la forme :

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, x_3 \ldots, x_N) = 0 \\ . \\ f_N(x_1, x_2, x_3 \ldots, x_N) = 0 \end{cases}$$

A partir d'une estimation initiale $x_i^{(0)}$, on pose $x_i^{(1)}=x_i^{(0)}+\Delta x$, où les Δx sont donner par la résolution du <u>système linéaire</u> AX=Y dont les éléments sont donnés par :

$$a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \qquad \text{et} \qquad y_i = -f_i$$

MÉTHODES NUMÉRIQUES

Alain Foucaran

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : PLAN DU COURS

- Développement de TAYLOR
- Racines d'Equations
- Résolution de Système d'Equations
- Moindres Carrés et Interpolation
- Dérivée – Extrapolation
- Intégration
- Equations Différentielles

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : MOINDRES CARRÉS

- Développement de TAYLOR
- Racines d'Equations
- Résolution de Système d'Equations
- Moindres Carrés et Interpolation
- Dérivée – Extrapolation
- Intégration
- Equations Différentielles

Il arrive souvent que l'on ait besoin de connaître la valeur d'une fonction connue en un nombre limité de points.

<u>Exemple :</u>

X	-2	-1	2	3	5
Y=f(x)	-32	26	-4	-162	-1600

<u>Question :</u> quelle est la valeur de y pour x=0 ?

Pour répondre à cette question, il faut effectuer une interpolation !

X	-2	-1	2	3	5
Y=f(x)	-32	26	-4	-162	-1600

Intuitivement : on peut réaliser une « interpolation linéaire »

On fait passer une droite par les points (-1;26) et (2;-4) et l'équation de cette droite nous donne la valeur de y pour tout x compris entre -1 et 2.

On a :

Y=ax+b   L'équation est vérifiée en (-1;26) et (2;-4) :

$26=-a+b$

$-4=2a+b$

Donc Y=-10x+16

En x=0 on a donc Y=16

En réalité, il existe des méthodes beaucoup plus performantes que l'interpolation linéaire. Par exemple :

- Interpolation par polynômes
- Interpolation par fractions continues et fractions rationnelles
- Interpolation cubique

Nous n'aborderons ici « que » l'interpolation par polynômes !

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : INTERPOLATION

Objectif:

Estimer la valeur d'une fonction échantillonnée

- Interpolation polynômiale en puissance de x
- Interpolation polynômiale de Lagrange
- Interpolation polynômiale de Newton
- Ajustements – moindres carrés

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : INTERPOLATION

Objectif:

Estimer la valeur d'une fonction échantillonnée

- <u>Interpolation polynômiale en puissance de x</u>
- Interpolation polynômiale de Lagrange
- Interpolation polynômiale de Newton
- Ajustements – moindres carrés

INTERPOLATION POLYNÔMIALE EN PUISSANCE DE X

Reprenons l'exemple précédent :

X	-2	-1	2	3	5
Y=f(x)	-32	26	-4	-162	-1600

Nous avons donc 5 points par lesquels nous pouvons faire passer un polynôme de degré 5-1=4.

$$P(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + a_5 x^4$$

X	-2	-1	2	3	5
Y=f(x)	-32	26	-4	-162	-1600

On écrit ensuite que le polynôme doit passer par chacun des points :

$P(-2)=-32=a_1+a_2x(-2)+a_3x(-2)^2+a_4x(-2)^3+a_5x(-2)^4$
$P(-1)=26=a_1+a_2x(-1)+a_3x(-1)^2+a_4x(-1)^3+a_5x(-1)^4$
$P(2)=-4=$ …
$P(3)=-162=$ …
$P(5)=-1600=$ …

Autrement dit, on a écrit un système de 5 équations à 5 inconnues

Le système s'écrit, sous forme matricielle :

$$\left\{\begin{array}{cccccc}
1 & -2 & 4 & -8 & 16 & -32 \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 26 \\
1 & 2 & 4 & 8 & 16 & -4 \\
1 & 3 & 9 & 27 & 81 & -162 \\
1 & 5 & 25 & 125 & 625 & -1600
\end{array}\right.$$

Une résolution par la méthode du pivot de Gauss donne (30;-1;0;2;-3)

Le polynôme peut donc s'écrire :

$$P(x) = 30 - x + 2x^3 - 3x^4$$

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : INTERPOLATION

Objectif:

Estimer la valeur d'une fonction échantillonnée

- Interpolation polynômiale en puissance de x
- <u>Interpolation polynômiale de Lagrange</u>
- Interpolation polynômiale de Newton
- Ajustements – moindres carrés

INTERPOLATION POLYNÔMIALE DE LAGRANGE

On appelle polynômes interpolateurs de Lagrange aux abscisses $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ les n polynômes $L_0, L_1 \ldots L_{n-1}$ définis par :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Exemple : les 3 polynômes associés aux 3 abscisses $x_0=2$, $x_1=4$ et $x_2=5$ sont :

$$L_0(x) = \frac{x-4}{2-4} \times \frac{x-5}{2-5} \quad L_1(x) = \frac{x-2}{4-2} \times \frac{x-5}{4-5} \quad L_2(x) = \frac{x-2}{5-2} \times \frac{x-4}{5-4}$$

Propriétés des polynômes de Lagrange :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$\boxed{L_i(x_j) = 0}$$

$$\boxed{L_i(x_i) = 1}$$

Utilité des polynômes de Lagrange :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Au lieu de développer un polynôme en puissance de x, on peut le développer en polynômes de Lagrange :

$$P(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + \ldots + y_{n-1} L_{n-1}(x)$$

AVANTAGE : les coefficients sont les y_i !!!

Exemple :

$$y(x) = x^2 - 2x + 2$$

X	1	2	4
Y=f(x)	1	2	10

On a 3 points donc 3 polynômes de degré 3-1=2 à déterminer :

$$L_0(x) = \frac{x-2}{1-2} \times \frac{x-4}{1-4} \qquad L_1(x) = \frac{x-1}{2-1} \times \frac{x-4}{2-4} \qquad L_2(x) = \frac{x-1}{4-1} \times \frac{x-2}{4-2}$$

Le polynôme passant par les 3 points s' écrit simplement :

$$P(x) = 1.L_0(x) + 2.L_1(x) + 10.L_2(x)$$

$$P(3) = 5$$

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : INTERPOLATION

Objectif:

Estimer la valeur d'une fonction échantillonnée

- Interpolation polynômiale en puissance de x
- Interpolation polynômiale de Lagrange
- Interpolation polynômiale de Newton
- Ajustements – moindres carrés

INTERPOLATION POLYNÔMIALE DE NEWTON

Dans cette méthode, on écrit les polynômes sous la forme :

$$P(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) + \dots$$
$$+ a_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_{n-1})$$

Le calcul des coefficients a_i s'effectue par la méthode dite des « **différences divisées** »

Etant donnés les points tabulés (x_0, f_0), (x_1, f_1),…., (x_n, f_n), on construit les coefficients $D_{i,j}$, de la manière suivante :
$D_{i,0} = f_i$

puis par exemple :

$D_{0,1} = (D_{1,0} – D_{0,0}) / (x_1 – x_0)$, $\quad D_{1,3} = (D_{2,2} – D_{1,2}) / (x_4 – x_1)$, ..

et de façon générale : $\quad D_{i,j} = \dfrac{D_{i+1,j-1} - D_{i,j-1}}{x_{i+j} - x_i}$

Le polynôme d'interpolation de Newton est alors donné par le fait que les coefficients $a_i = D_{0,i}$:

$P_n(x) = D_{0,0} + D_{0,1} (x-x_0) + D_{0,2} (x-x_0) (x-x_1) + \ldots + D_{0,n} (x-x_0)\ldots.. (x-x_{n-1})$

Exemple : On a 3 points (0,1), (2,5) et (4,17)

x	y		
0	$\boxed{1}$ a_0		
2	5	$\frac{1-5}{0-2}=\boxed{2}$ a_1	
4	17	$\frac{5-17}{2-4}=6$	$\frac{2-6}{0-4}=\boxed{1}$ a_2

$$P(x)=1+2(x-0)+1(x-0)(x-2)$$

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : INTERPOLATION

Objectif:

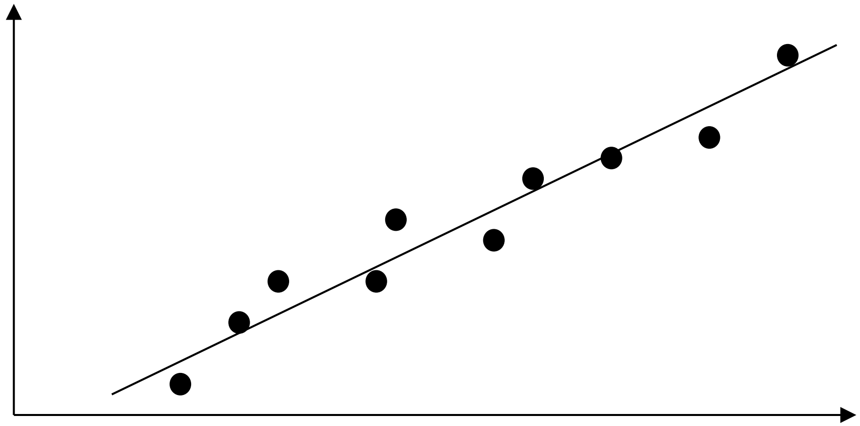
Estimer la valeur d'une fonction échantillonnée

- Interpolation polynômiale en puissance de x
- Interpolation polynômiale de Lagrange
- Interpolation polynômiale de Newton
- Ajustements – moindres carrés

AJUSTEMENTS – MOINDRES CARRÉS

La méthode des moindres carrés, indépendamment élaborée par Legendre en 1805 et Gauss en 1809, permet de comparer des données expérimentales, généralement entachées d'erreurs de mesure, à un modèle mathématique censé décrire ces données.

Lorsque le nombre de points augmente, l'utilisation d'un polynôme n'a pas forcément de sens :



Dans cet exemple, les incertitudes de mesures donnent un nuage de points « autour » d'une droite : il ne faut surtout pas faire passer un polynôme de degré 9 par ces 10 points !

On utilise alors une méthode d'approximation = **méthode des moindres carrés.**

Cette méthode consiste à chercher une droite (ou plus généralement un polynôme) représentant au « mieux » le nuage de points.

Pour cela, on calcule par exemple, la somme des écarts quadratiques :

$$S(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - (a_0 + a_1 x_i) \right]^2$$

Le but est alors de trouver le meilleur couple (a_0, a_1) c'est-à-dire celui qui minimise S (= moindres carrés)

Lorsque S est minimum, ses dérivées doivent s'annuler :

$$S(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - (a_0 + a_1 x_i) \right]^2$$

$$\frac{dS(a_0, a_1)}{da_0} = 0 \Leftrightarrow \sum y_i = N a_0 + a_1 \sum x_i$$

$$\frac{dS(a_0, a_1)}{da_1} = 0 \Leftrightarrow \sum x_i y_i = a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2$$

Il s'agit donc de résoudre un système de 2 équations à 2 inconnues

Que nous pouvons écrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} N & \sum_{I=1}^{N} x_I \\ \sum_{I=1}^{N} x_I & \sum_{I=1}^{N} x_I^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{I=1}^{N} y_I \\ \sum_{I=1}^{N} x_I . y_I \end{bmatrix}$$

La solution de ce système nous donne le couple (a_0,a_1) c'est-à-dire l'équation de la droite qui approxime le nuage de points.

Exemple :

X	0	1	3	4
Y	1	6	34	57

Trouver par les moindres carrés la droite représentant au mieux le nuage de points.

C' est-à-dire nous cherchons la droite

$$g(x) = a_0 + a_1 x$$

Exemple :

X	0	1	3	4
Y	1	6	34	57

$$\begin{bmatrix} 4 & \sum_{I=1}^{4} x_I \\ \sum_{I=1}^{4} x_I & \sum_{I=1}^{4} x_I^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{I=1}^{4} y_I \\ \sum_{I=1}^{4} x_I . y_I \end{bmatrix}$$

Exemple :

X	0	1	3	4
Y	1	6	34	57

$$\begin{bmatrix} 4 & \sum_{I=1}^{4} x_I \\ \sum_{I=1}^{4} x_I & \sum_{I=1}^{4} x_I^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{I=1}^{4} y_I \\ \sum_{I=1}^{4} x_I . y_I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 26 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 98 \\ 336 \end{bmatrix}$$

Exemple :

X	0	1	3	4
Y	1	6	34	57

$$\begin{bmatrix} 4 & \sum_{I=1}^{4} x_I \\ \sum_{I=1}^{4} x_I & \sum_{I=1}^{4} x_I^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{I=1}^{4} y_I \\ \sum_{I=1}^{4} x_I . y_I \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 26 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 98 \\ 336 \end{bmatrix}$$

Nous trouvons alors :

a_1=-3,5

a_2=14

C' est-à-dire g(x)=-3,5+14x

Exemple :

X	0	1	3	4
Y	1	6	34	57

Nous pouvons calculer l'erreur quadratique moyenne :

$$EQM = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{I=1}^{N}\left(y_i - Y_{I\,lissé}\right)^2}$$

$$EQM = \sqrt{\frac{1}{4}.81} = 4,5$$

Généralisation à un polynôme de degré m<<N

$$S(a_0, a_1, \ldots a_m) = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i - \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_m x_m^2 \right) \right]^2$$

La minimisation de S consiste à annuler les m+1 dérivées de S donc à écrire un système de m+1 équations à m+1 inconnues !

$$\begin{bmatrix} \sum_{I=1}^{N} x_I^0 & \ldots & \sum_{I=1}^{N} x_I^{(M-1)} \\ \ldots & & \\ \sum_{I=1}^{N} x_I^{(M-1)} & & \sum_{I=1}^{N} x_I^{2(M-1)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \ldots \\ a_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{I=1}^{N} x_I^0 . y \\ \ldots \\ \sum_{I=1}^{N} x_I^{(M-1)} . y_I \end{bmatrix}$$

Exemple :

X	0	1	3	4
Y	1	6	34	57

Trouver par les moindres carrés le polynôme de degré 2 représentant au mieux le nuage de points.

Exemple :

X	0	1	3	4
Y	1	6	34	57

$$\begin{bmatrix} 4 & 8 & 26 \\ 8 & 26 & 92 \\ 26 & 92 & 338 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 98 \\ 336 \\ 1224 \end{bmatrix}$$

Nous trouvons alors :

$a_1=1$

$a_2=2$

$a_3=3$

C' est-à-dire $g(x)=1+2x+3x^2$

EQM=0 donc solution exacte!!

MÉTHODES NUMÉRIQUES

Alain Foucaran

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : PLAN DU COURS

- Développement de TAYLOR
- Racines d'Equations
- Résolution de Système d'Equations
- Moindres Carrés et Interpolation
- Dérivée – Extrapolation
- Intégration
- Equations Différentielles

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : DÉRIVÉE

- Développement de TAYLOR
- Racines d'Equations
- Résolution de Système d'Equations
- Moindres Carrés et Interpolation
- <u>Dérivée – Extrapolation</u>
- Intégration
- Equations Différentielles

Si f est une fonction dont on connaît une expression analytique, le calcul de la dérivée ne pose aucune difficulté.

Il existe d'ailleurs des logiciels capables de calculer analytiquement la dérivée de fonctions.

Cependant, l'estimation de la dérivée d'une fonction définie par un ensemble de N points de mesure est très délicate !

Objectif:

Estimer la dérivée d'une fonction échantillonnée

- Rappel - Taylor
- Différences excentrées
- Différences centrées
- Extrapolation de Richardson
- Méthode générale

Objectif:

Estimer la dérivée d'une fonction échantillonnée

- Rappel - Taylor
- Différences excentrées
- Différences centrées
- Extrapolation de Richardson
- Méthode générale

RAPPEL - TAYLOR

La dérivée est définie par :

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Une estimation précise de cette quantité est difficile à partir d'information de nature discrète et ***dépend de l'échantillonnage*** de la fonction

Pour le calcul numérique, le développement de Taylor est un outil fondamental.

Pour une fonction f au voisinage de x_0 on écrit :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \ldots$$

Ou encore:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{\boxed{\infty}} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i$$

Lorsque la série est tronquée à l' ordre N inclus, on écrit :

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{\boxed{N}} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + \boxed{o\left((x - x_0)^{N+1}\right)}$$

Donne l' ordre de grandeur de l' erreur

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : DÉRIVÉE

Objectif:

Estimer la dérivée d'une fonction échantillonnée

- Rappel - Taylor
- Différences excentrées
- Différences centrées
- Extrapolation de Richardson
- Méthode générale

DIFFÉRENCES EXCENTRÉES

En posant dans Taylor $x=x_0+h$,
c'est-à-dire $h=x-x_0$, on a :

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}h^i=f(x_0)+f'(x_0)h+o(h^2)$$

Qui peut aussi s'écrire :

$$\boxed{f'(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+o(h)}$$

Il s'agit d'une _*différence finie à 2 points*_ dite « en avant ».
On peut aussi construire une différence en « arrière »:

$$\boxed{f'(x_0)=\frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}+o(h)}$$

DÉRIVÉE SECONDE

On a vu que : $f'(x_0)=\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+o(h)$ (1)

Donc en dérivant : $f''(x_0)=\dfrac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}+o(h)$ (2)

Avec (1) on a : $f'(x_0+h)=\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0+h)}{h}+o(h)$ (3)

Avec (1) et (3) dans (2), on trouve :

$$\boxed{f''(x_0)=\dfrac{f(x_0+2h)-2f(x_0+h)+f(x_0)}{h^2}+o(h)}$$

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : DÉRIVÉE

Objectif:

Estimer la dérivée d'une fonction échantillonnée

- Rappel - Taylor
- Différences excentrées
- Différences centrées
- Extrapolation de Richardson
- Méthode générale

DIFFÉRENCES CENTRÉES

En posant dans Taylor $x=x_0+h$,
c' est-à-dire $h=x-x_0$, on a :

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}h^i=f(x_0)+f'(x_0)h+o(h^2)$$

En posant dans Taylor $x=x_0-h$,
c' est-à-dire $h=x+x_0$, on a :

$$f(x_0-h)=f(x_0)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(-1)^i.h^i=f(x_0)-f'(x_0)h+o(h^2)$$

$$\begin{cases} f(x_0+h) = f(x_0) + \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} h^i = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h^2) \\ f(x_0-h) = f(x_0) + \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (-1)^i . h^i = f(x_0) - f'(x_0)h + o(h^2) \end{cases}$$

La différence des deux nous permet d'écrire :

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} + o(h^2)}$$

On a amélioré la précision !

Il vaut donc mieux utiliser les différences centrées, sauf pour … … le 1er et le dernier point !

Exercice :

Donner l'expression de la dérivée seconde en utilisant la méthode de différence centrée ?

Exercice :

Donner l'expression de la dérivée seconde en utilisant la méthode de différence centrée ?

$$\begin{cases} f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \dfrac{f''(x_0)h^2}{2} + \dfrac{f'''(x_0)h^3}{3!} + o(h^4) \\[2ex] f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \dfrac{f''(x_0)h^2}{2} - \dfrac{f'''(x_0)h^3}{3!} + o(h^4) \end{cases}$$

La somme des deux nous permet d'écrire :

$$\boxed{f''(x_0) = \frac{f(x_0+h) + f(x_0-h) - 2f(x_0)}{h^2}}$$

CHOIX DU PAS OPTIMUM

Contrairement à ce que l'on peut penser, faire tendre le pas vers 0 ne donnera pas une précision infinie !

Il existe un choix optimum pour h qui correspond a une précision-seuil qu'il est impossible de franchir !

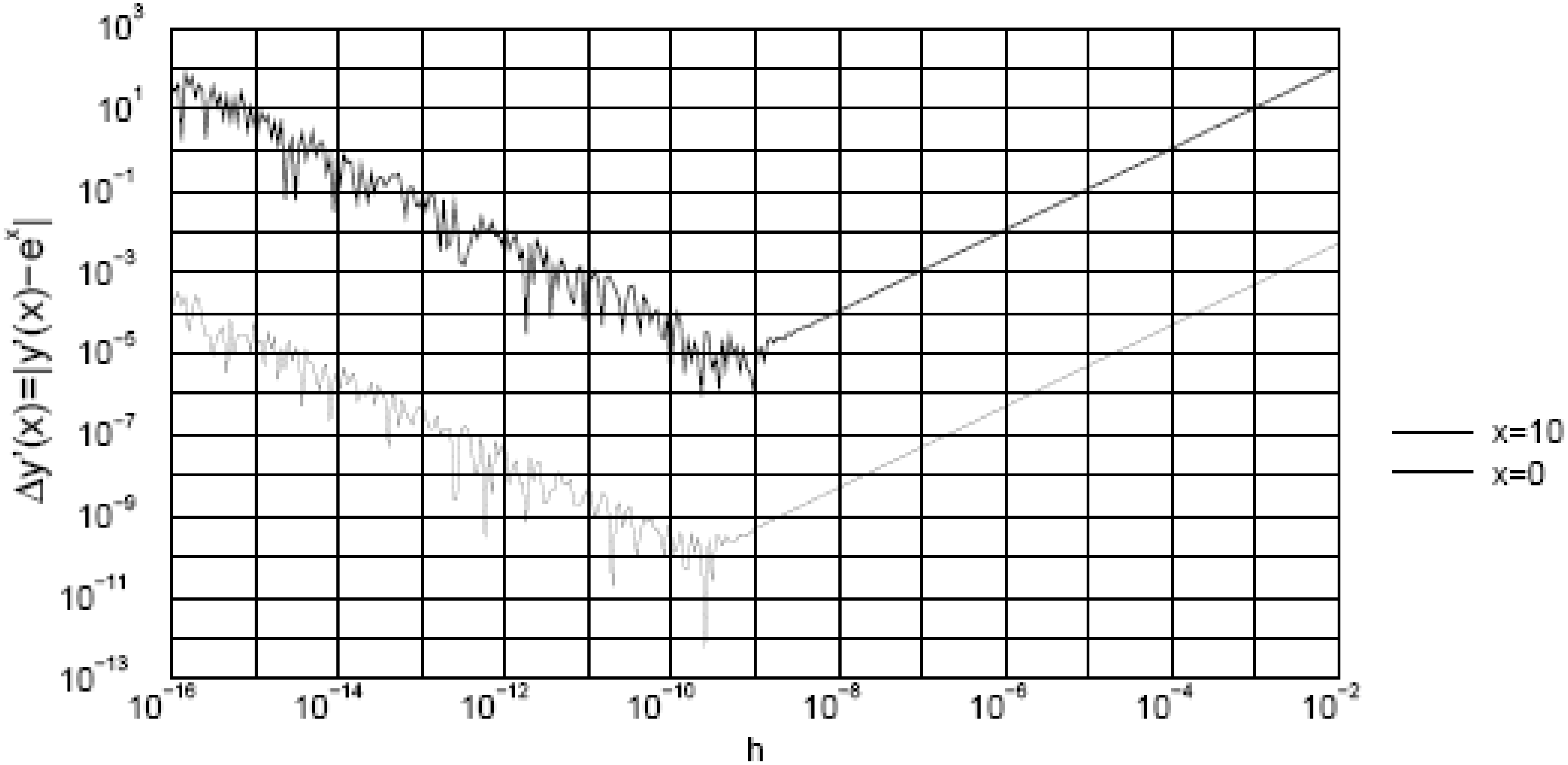


Figure 3.4: Exemple illustrant l'existence d'un pas optimum $h_{\rm opt}$ pour le calcul de la dérivée de la fonction e^x en $x = 0$ et $x = 10$. Ici, $h_{\rm opt} \sim 10^{-9}$.

Objectif:

Estimer la dérivée d'une fonction échantillonnée

- Rappel - Taylor
- Différences excentrées
- Différences centrées
- <u>Extrapolation de Richardson</u>
- Méthode générale

EXTRAPOLATION DE RICHARDSON

On part encore de :

$$\begin{cases} f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} h^i = f(x_0) + f'(x_0)h + \ldots \\ f(x_0-h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (-1)^i . h^i = f(x_0) - f'(x_0)h + \ldots \end{cases}$$

On a alors :

$$f(x_0+h) - f(x_0-h) = 2hf'(x_0) + \frac{2f^{(3)}(x_0)h^3}{3!} + \frac{2f^{(5)}(x_0)h^5}{5!} + \ldots$$

On pose $D(h) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$

$$= f'(x_0) + \frac{f^{(3)}(x_0)h^2}{3!} + \frac{f^{(5)}(x_0)h^4}{5!} + \dots$$

On calcule $D(h/2)$:

$$D(h/2) = f'(x_0) + \frac{f^{(3)}(x_0)h^2}{3! \times 2^2} + \frac{f^{(5)}(x_0)h^4}{5! \times 2^4} + \dots$$

Finalement :

$$f'(x_0) = \frac{4D\left(\frac{h}{2}\right) - D(h)}{3} + o(h^4)$$

On a encore amélioré la précision !!
Mais il faut connaître la fonction en $x_0 \pm h/2$

PLUS GÉNÉRALEMENT …

Plus généralement, on peut écrire :

$$\boxed{f'(x_0) \approx \frac{2^k D\left(\frac{h}{2^{k-1}}\right) - D\left(\frac{h}{2^k}\right)}{2^k - 1}}$$

Et on gagne typiquement un ordre de grandeur sur la précision !

Objectif:

Estimer la dérivée d'une fonction échantillonnée

- Rappel - Taylor
- Différences excentrées
- Différences centrées
- Extrapolation de Richardson
- Méthode générale

MÉTHODE GÉNÉRALE

Il est également possible de remplacer localement la fonction par une fonction analytique (ex: polynôme d'interpolation).

Il est alors facile de calculer les dérivées 1^{ere}, seconde …

Attention : ne pas prendre un degré trop élevé qui induit des oscillations (phénomène de « Runge »)

ILLUSTRATION DU PHÉNOMÈNE DE RUNGE

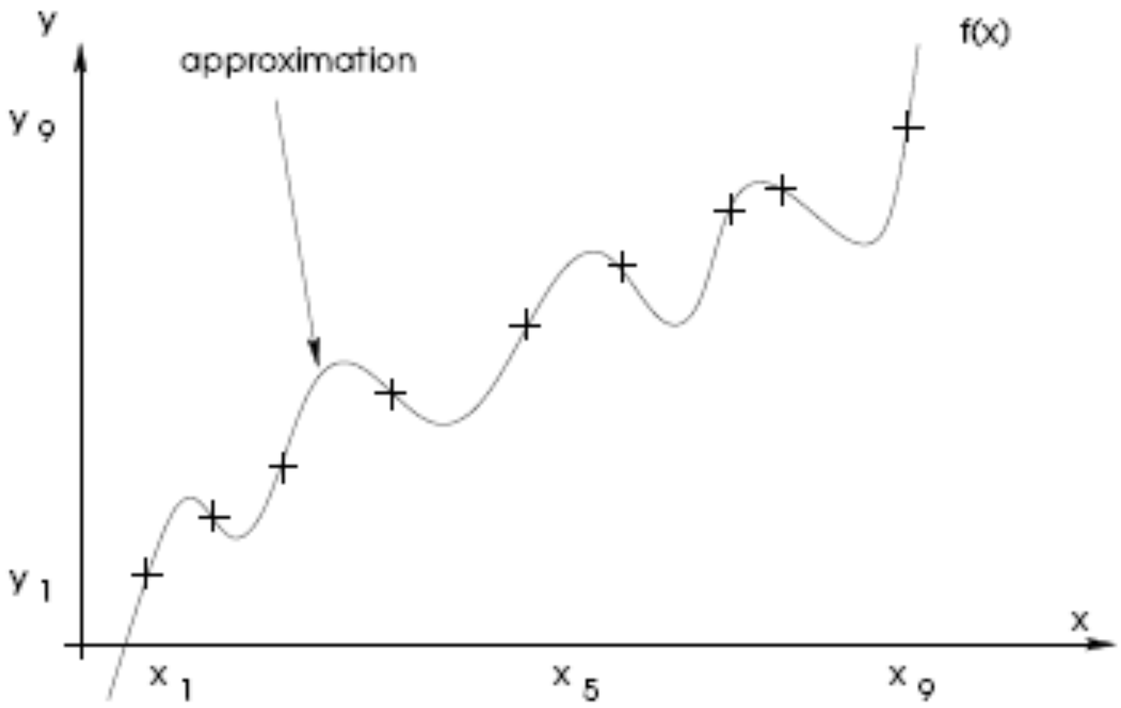


Figure 4.7: Oscillations apparaissant quand on tente de faire passer un polynôme de degré élevé par un ensemble de points.

Exercice :

Une fonction est tabulée aux points xi régulièrement espacés de pas h.

Donner les relations donnant au second ordre (c'est à dire en négligeant les termes en O(h2)) les dérivées première, seconde de la fonction f en x_i, en fonction des valeurs tabulées?

x_i	1,50	1,75	2,00	2,25	2,50
f_i	4,4817	5,7546	7,3891	9,4877	12,1825

Application numérique : on se propose de comparer aux valeurs exactes, pour la fonction e^x, les dérivées calculées numériquement en $x_i = 2$.

Exercice – solutions :

On calcule les développements en série de Taylor de $f_{i\pm1} = f(x_i \pm h)$ et de $f_{i\pm2} = f(x_i \pm 2h)$, d'où :

$$f_{i+1} - f_{i-1} = 2h\, f'_i + (h^3/3)\, f_i^{(3)} + O(h^5)$$
$$f_{i+1} + f_{i-1} = 2\, f_i + h^2\, f''_i + (h^4/12)\, f_i^{(4)} + O(h^6)$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} f'_i = \left(f_{i+1} - f_{i-1}\right)/(2h) + O(h^2) \\ f''_i = \left(f_{i-1} - 2 f_i + f_{i+1}\right)/h^2 + O(h^2) \end{cases}$$

Exercice – solutions :

Application numérique : on compare les dérivées de e^x en $x = 2$, qui valent toutes $e^2 = 7{,}38906$ aux dérivées calculées :

$$f'(2) = \left(e^{2,25} - e^{1,75}\right)/0{,}5 = 7{,}4662 \ ; \quad \text{erreur} \ : \ 1{,}04\,\%$$

$$f''(2) = \left(e^{1,75} - 2e^{2} + e^{2,25}\right)/(1/16) = 7{,}4256 \ ; \quad \text{erreur} \ : \ 4{,}9 \times 10^{-3}$$

MÉTHODES NUMÉRIQUES

Alain Foucaran

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : PLAN DU COURS

- Développement de TAYLOR
- Racines d'Equations
- Résolution de Système d'Equations
- Moindres Carrés et Interpolation
- Dérivée – Extrapolation
- Intégration
- Equations Différentielles

- Développement de TAYLOR
- Racines d'Equations
- Résolution de Système d'Equations
- Moindres Carrés et Interpolation
- Dérivée – Extrapolation
- Intégration
- Equations Différentielles

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : INTÉGRATION

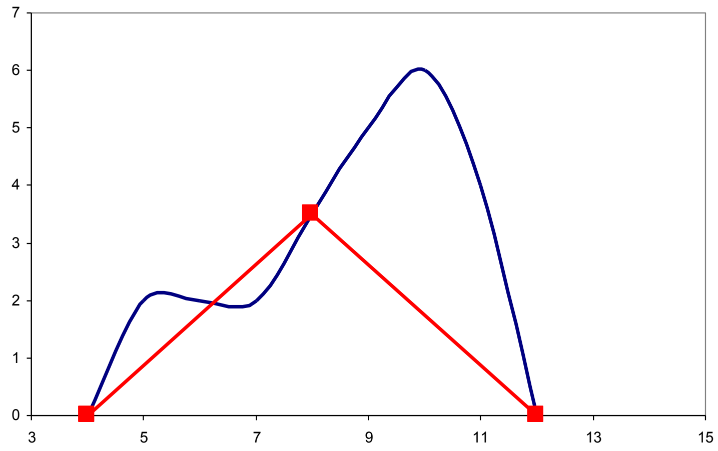
Nous pouvons rencontrer des intégrales dont le calcul par des méthodes analytiques est très compliqué ou même impossible.

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \qquad \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+\cos^2 x\,.\,dx} \qquad \int_0^1 \cos^2 x\,.\,dx$$

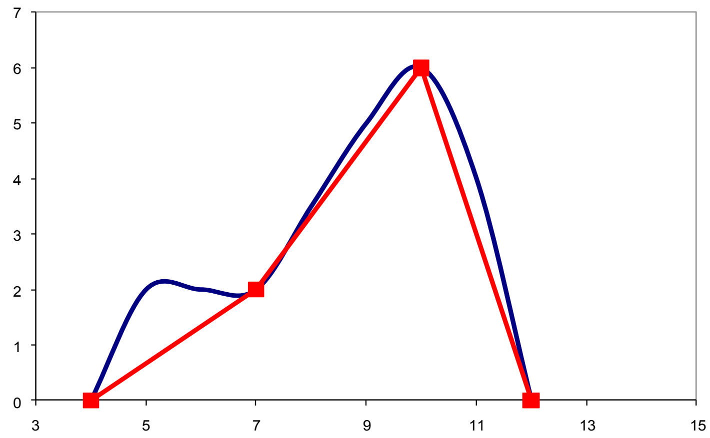
Dans ce cas, nous pouvons appliquer des méthodes numériques pour évaluer la valeur de l'intégrale

Décomposition de l'intervalle de résolution [a,b]:

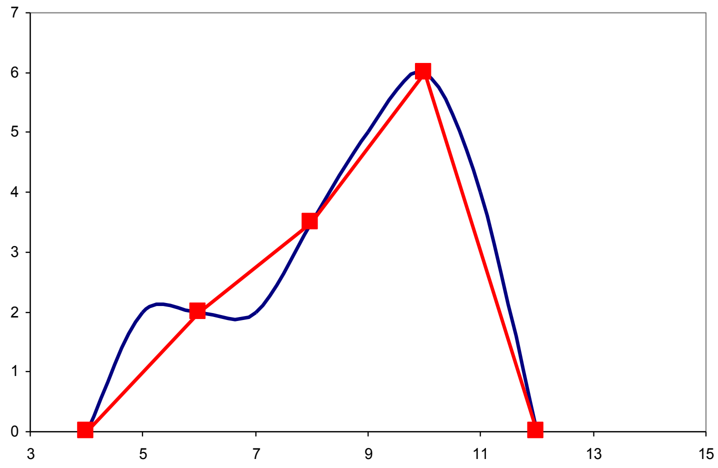
Two segments



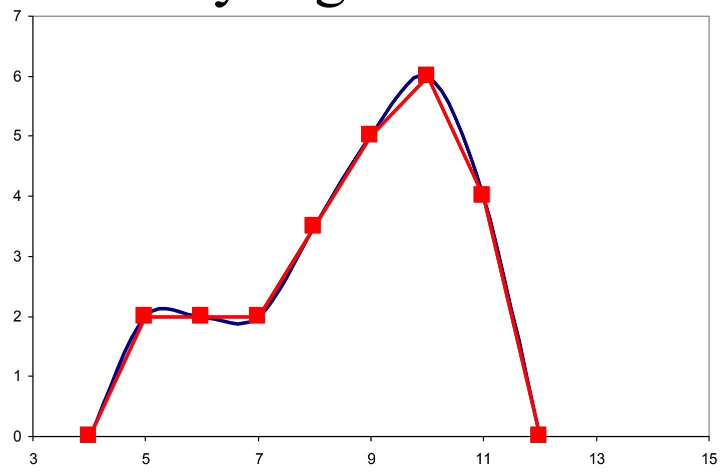
Three segments



Four segments



Many segments



LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : INTÉGRATION

Objectif:

Calculer l'intégrale d'une fonction échantillonnée

- Méthode des rectangle
- Méthode des trapèzes
- Méthode de Simpson
- Méthode de Newton-Cotes

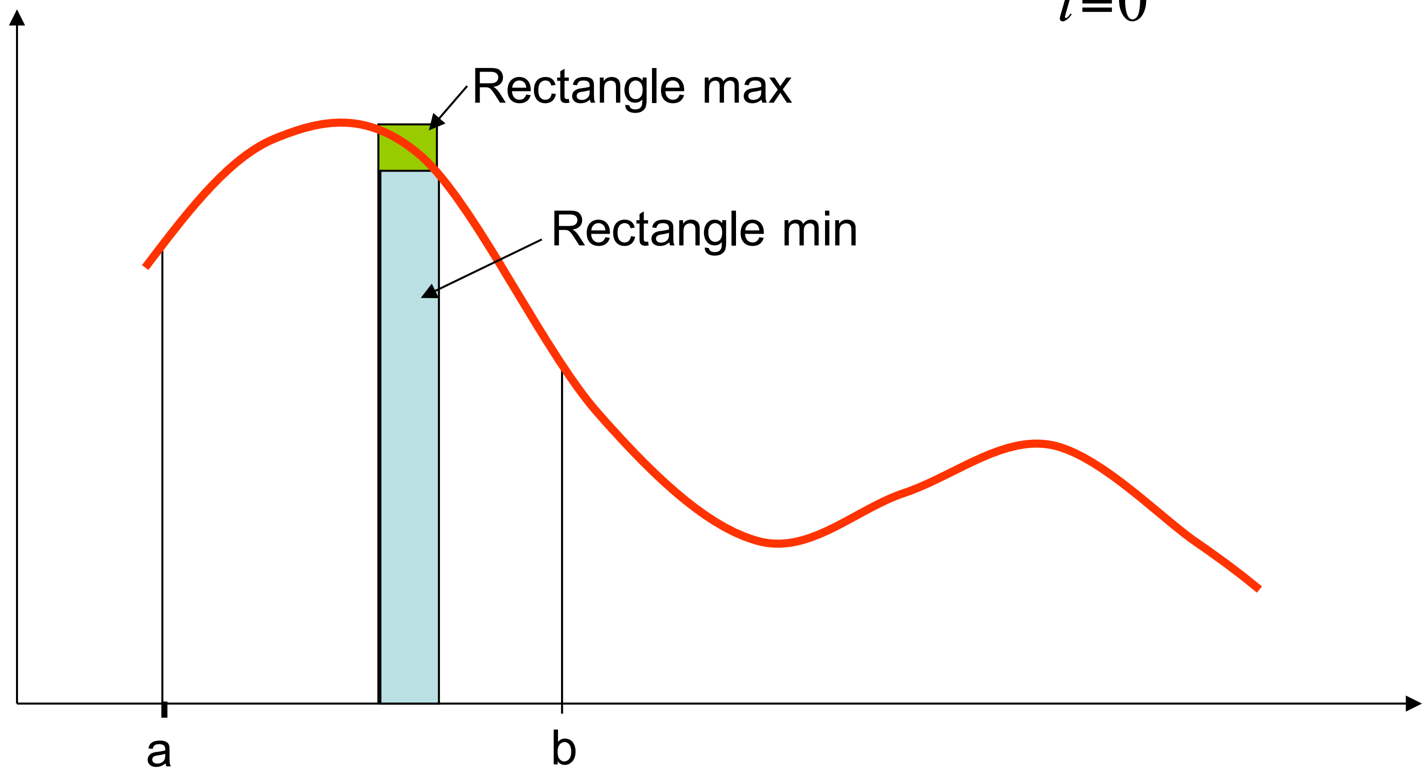
Objectif:

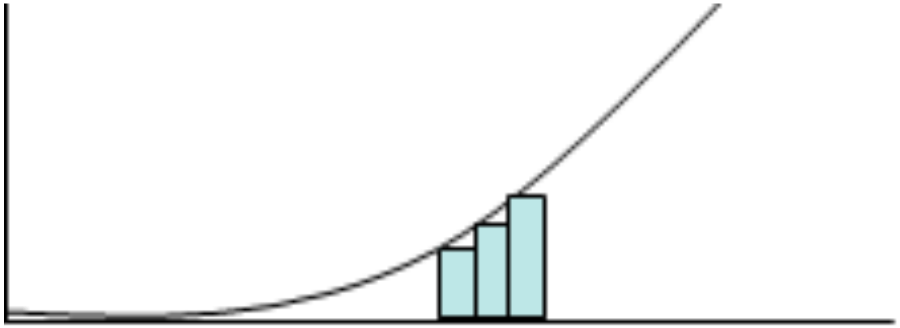
Calculer l'intégrale d'une fonction échantillonnée

- Méthode des rectangle
- Méthode des trapèzes
- Méthode de Simpson
- Méthode de Newton-Cotes

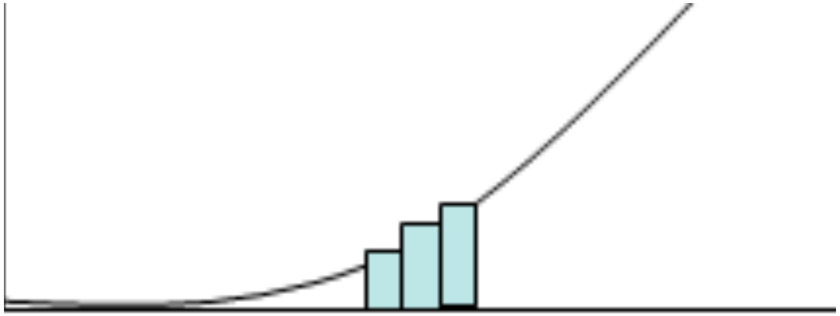
Considérons un pas constant : $h = \dfrac{b-a}{n}$

L'intégrale est donc $I \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$

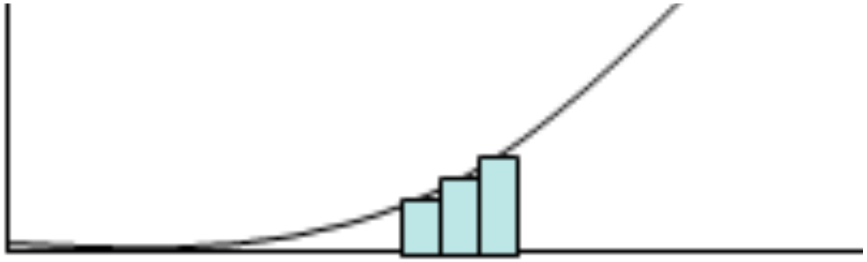




Méthode des rectangles à gauche



Méthode des rectangles à droite



Méthode du point milieu

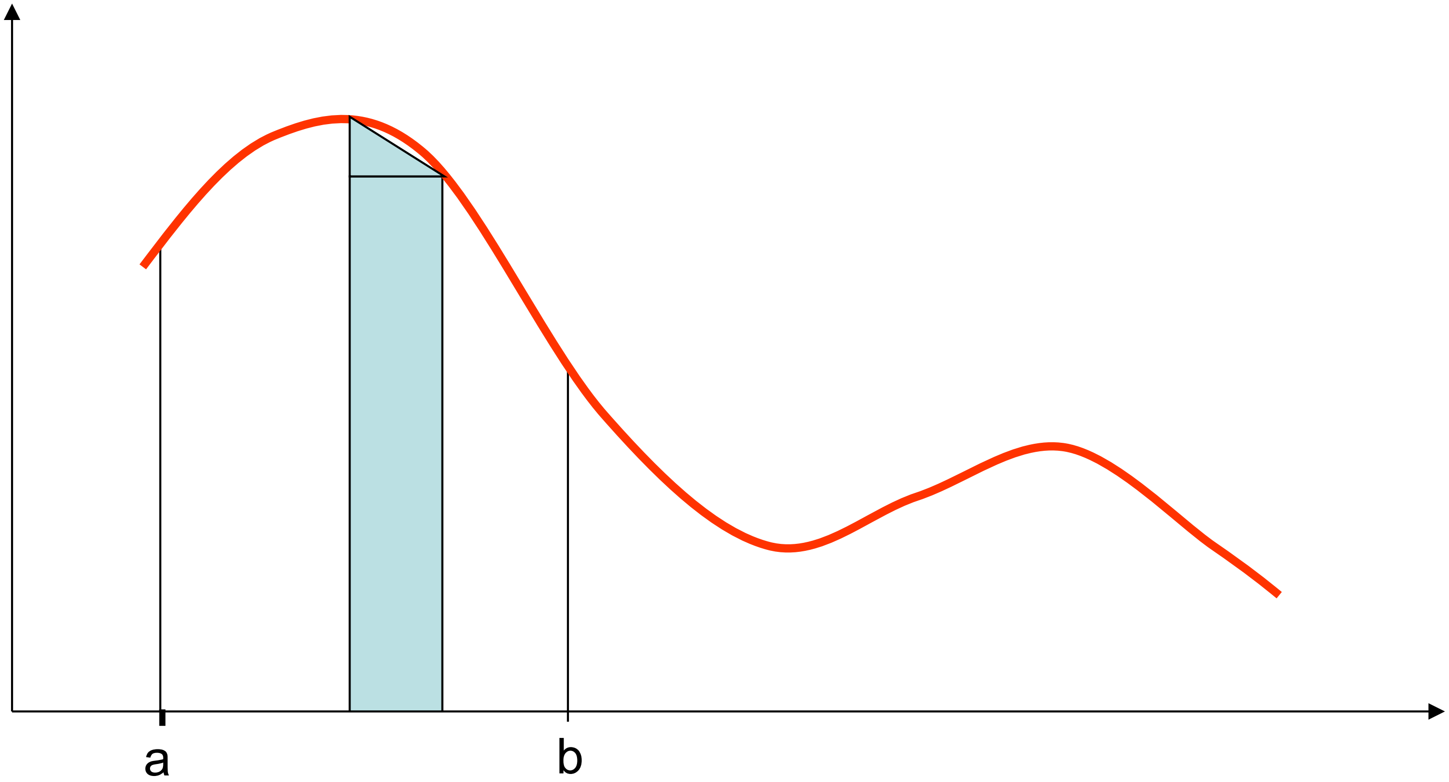
Objectif:

Calculer l'intégrale d'une fonction échantillonnée

- Méthode des rectangle
- <u>Méthode des trapèzes</u>
- Méthode de Simpson
- Méthode de Newton-Cotes

Considérons un pas constant : $h = \dfrac{b-a}{n}$

L'intégrale est donc $I \approx \dfrac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left[f(x_i)+f(x_{i+1})\right]$

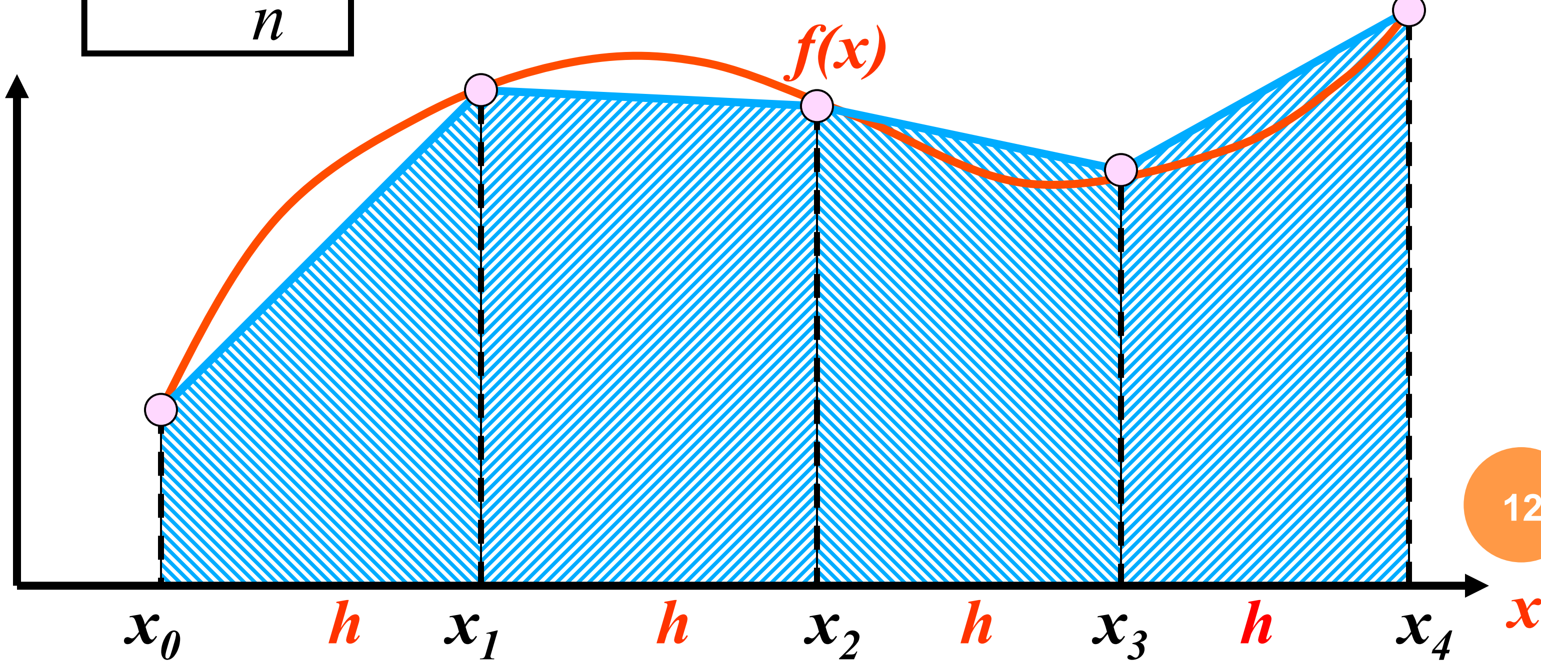


$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots\cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] + \frac{h}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right] + \cdots + \frac{h}{2}\left[f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_i) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

$$\boxed{h = \frac{b-a}{n}}$$



Exemple : Evaluer l' intégrale $I = \int_0^4 xe^{2x}dx$

$$n = 1, h = 4 \Rightarrow I = \frac{h}{2}\left[f(0) + f(4)\right] = 23847.66 \qquad \varepsilon = -357.12\%$$

$$n = 2, h = 2 \Rightarrow I = \frac{h}{2}\left[f(0) + 2f(2) + f(4)\right] = 12142.23 \qquad \varepsilon = -132.75\%$$

$$\begin{aligned} n = 4, h = 1 \Rightarrow I = \frac{h}{2}\big[&f(0) + 2f(1) + 2f(2) \\ &+ 2f(3) + f(4)\big] = 7288.79 \end{aligned} \qquad \varepsilon = -39.71\%$$

$$\begin{aligned} n = 8, h = 0.5 \Rightarrow I = \frac{h}{2}\big[&f(0) + 2f(0.5) + 2f(1) \\ &+ 2f(1.5) + 2f(2) + 2f(2.5) + 2f(3) \\ &+ 2f(3.5) + f(4)\big] = 5764.76 \end{aligned} \qquad \varepsilon = -10.50\%$$

$$\begin{aligned} n = 16, h = 0.25 \Rightarrow I = \frac{h}{2}\big[&f(0) + 2f(0.25) + 2f(0.5) + \cdots \\ &+ 2f(3.5) + 2f(3.75) + f(4)\big] \\ &= 5355.95 \end{aligned} \qquad \varepsilon = -2.66\%$$

Evaluation de l'erreur pour la méthode des trapèzes (Tn):

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, alors on a, pour tout entier naturel n non nul

$$|T_n - \int_a^b f(t)\,dt| \leq (b-a)^3 \frac{M_2}{12n^2}.$$

Majorant de la dérivée seconde sur [a; b]

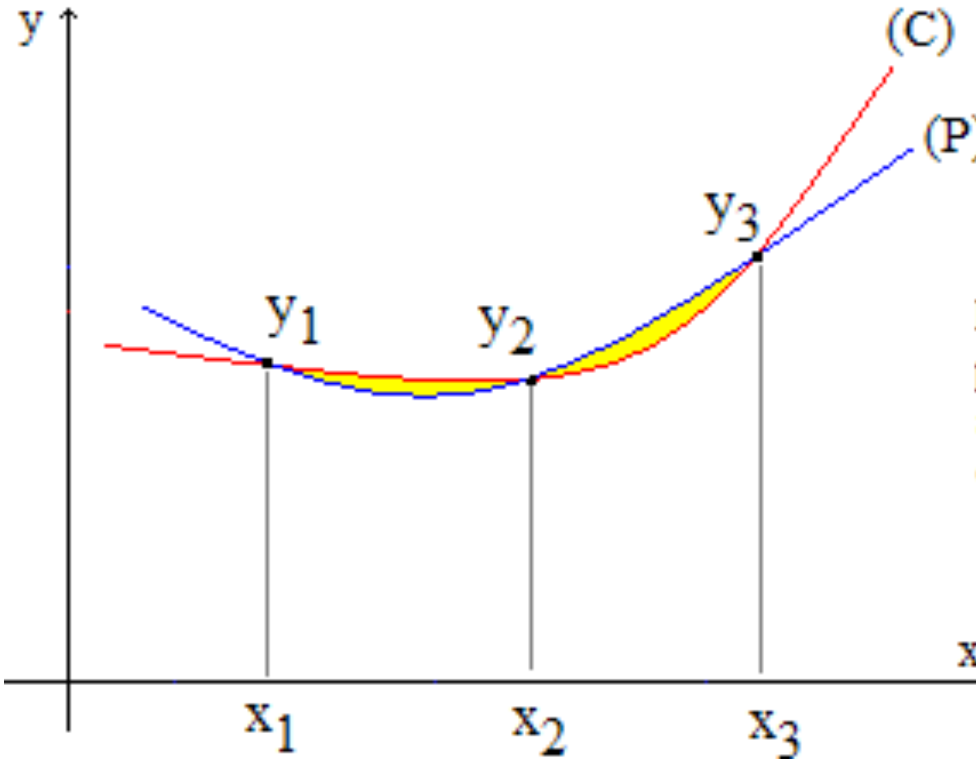
On en déduit que (T_n) converge vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

Objectif:

Calculer l'intégrale d'une fonction échantillonnée

- Méthode des rectangle
- Méthode des trapèzes
- Méthode de Simpson
- Méthode de Newton-Cotes

Principe : faire passer un arc de parabole par les points x_{i-1}, x_i et x_{i+1}



$$y(x) = mx^2 + px + q$$

Il suffit alors d'intégrer cette parabole entre x_{i-1} et x_{i+1}

Intégrons entre x_{i-1} et x_{i+1} : $y(x) = mx^2 + px + q$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx \approx \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (mx^2 + px + q)dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}mx^3 + \frac{1}{2}px^2 + qx\right]_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}$$

$$= \frac{1}{3}m\left(x_{i+1}^3 - x_{i-1}^3\right) + \frac{1}{2}p\left(x_{i+1}^2 - x_{i-1}^2\right) + q\left(x_{i+1} - x_{i-1}\right)$$

Avec:
$$\begin{cases} x_{i+1} - x_{i-1} = 2.h \\ a^2 - b^2 = (a-b).(a+b) \\ a^3 - b^3 = (a-b).\left(a^2 + 2ab + b^2\right) \end{cases}$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[2m\left(x_{i+1}^2 + x_{i+1}x_{i-1} + x_{i-1}^2\right) + 3p\left(x_{i+1} - x_{i-1}\right) + 6q\right]$$

__Remarque :__ il n'est pas nécessaire de calculer m, p et q car il est possible de les faire disparaître à l'aide des expressions de y_{i-1}, y_i, y_{i+1}

Nous posons: $\begin{cases} x_{i-1} = x_i - h \\ x_{i+1} = x_i + h \end{cases}$

On trouve alors :

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}\right]$$

Si on a n+1 points (n pair), on peut alors écrire :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{3}\left[y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}\right]$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[y_a + 4\sum_{i\,impair} y_i + 2\sum_{i\,pair} y_i + y_b\right]}$$

Exemple : Evaluer l'intégrale $I = \int_0^4 xe^{2x}dx$

- Using n = 2, h = 2

$$I = \frac{h}{3}\left[f(0) + 4f(2) + f(4)\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[0 + 4(2e^4) + 4e^8\right] = 8240.411 \quad \Rightarrow \varepsilon = -57.96\%$$

- Using n = 4, h = 1

$$I = \frac{h}{3}\left[f(0) + 4f(1) + 2f(2) + 4f(3) + f(4)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[0 + 4(e^2) + 2(2e^4) + 4(3e^6) + 4e^8\right]$$

$$= 5670.975 \quad \Rightarrow \varepsilon = -8.70\%$$

Evaluation de l'erreur pour la méthode de Simpson (Sn):

Si f est de classe $\mathcal{C}^4$ sur I, alors, pour tout entier naturel n non nul, on a

$$|S_n - \int_a^b f(t)\,dt| \leq (b-a)^5 \frac{M_4}{2880 n^4}.$$

Majorant de la dérivée quatrième sur [a; b]

EXTRAPOLATION DE RICHARDSON

But : améliorer la précision de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a)+f(b)+4\sum_{i\,impair} f(x_i)+2\sum_{i\,pair} f(x_i)\right]+\underline{\underline{o(h^4)}}$$

Posons : $$S(h)=\frac{h}{3}\left[f(a)+f(b)+4\sum_{i\,impair} f(x_i)+2\sum_{i\,pair} f(x_i)\right]$$

Avec un pas h, on peut écrire : $$\int_a^b f(x)dx = S(h)+ah^4+o(h^5) \qquad (1)$$

Avec un pas h/2, on peut écrire : $$\int_a^b f(x)dx = S\left(\frac{h}{2}\right)+a\left(\frac{h}{2}\right)^4 o(h^5) \qquad (2)$$

« 16x(2)-(1) »/15

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \frac{16S\left(\frac{h}{2}\right)-S(h)}{15}+\underline{\underline{o(h^5)}}}$$

Objectif:

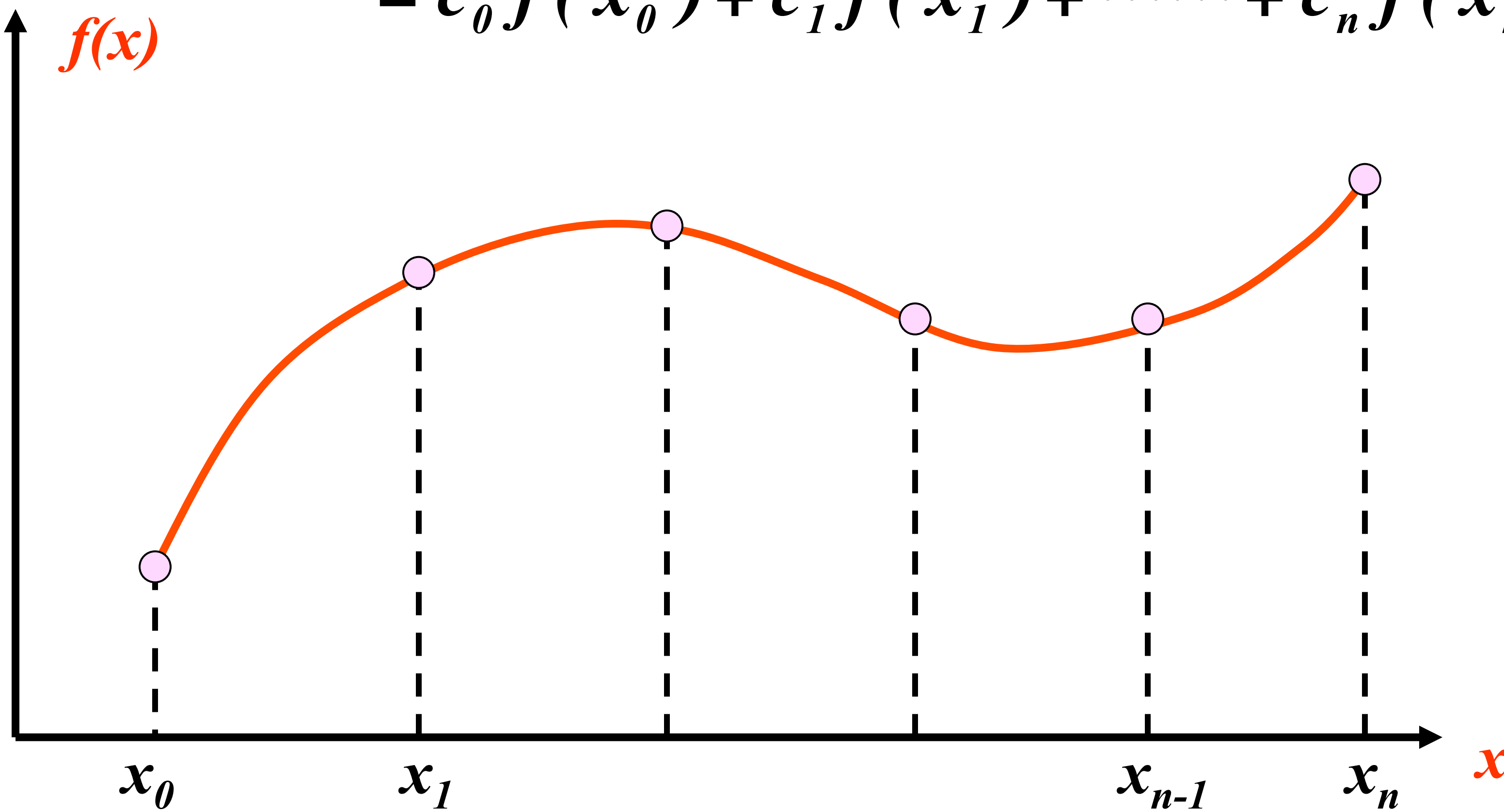
Calculer l'intégrale d'une fonction échantillonnée

- Méthode des rectangle
- Méthode des trapèzes
- Méthode de Simpson
- Méthode de Newton-Cotes

Principe : approximation de l'intégrale par une somme pondérée des valeurs de la fonction

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} c_i f(x_i)$$

$$= c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + \cdots\cdots + c_n f(x_n)$$



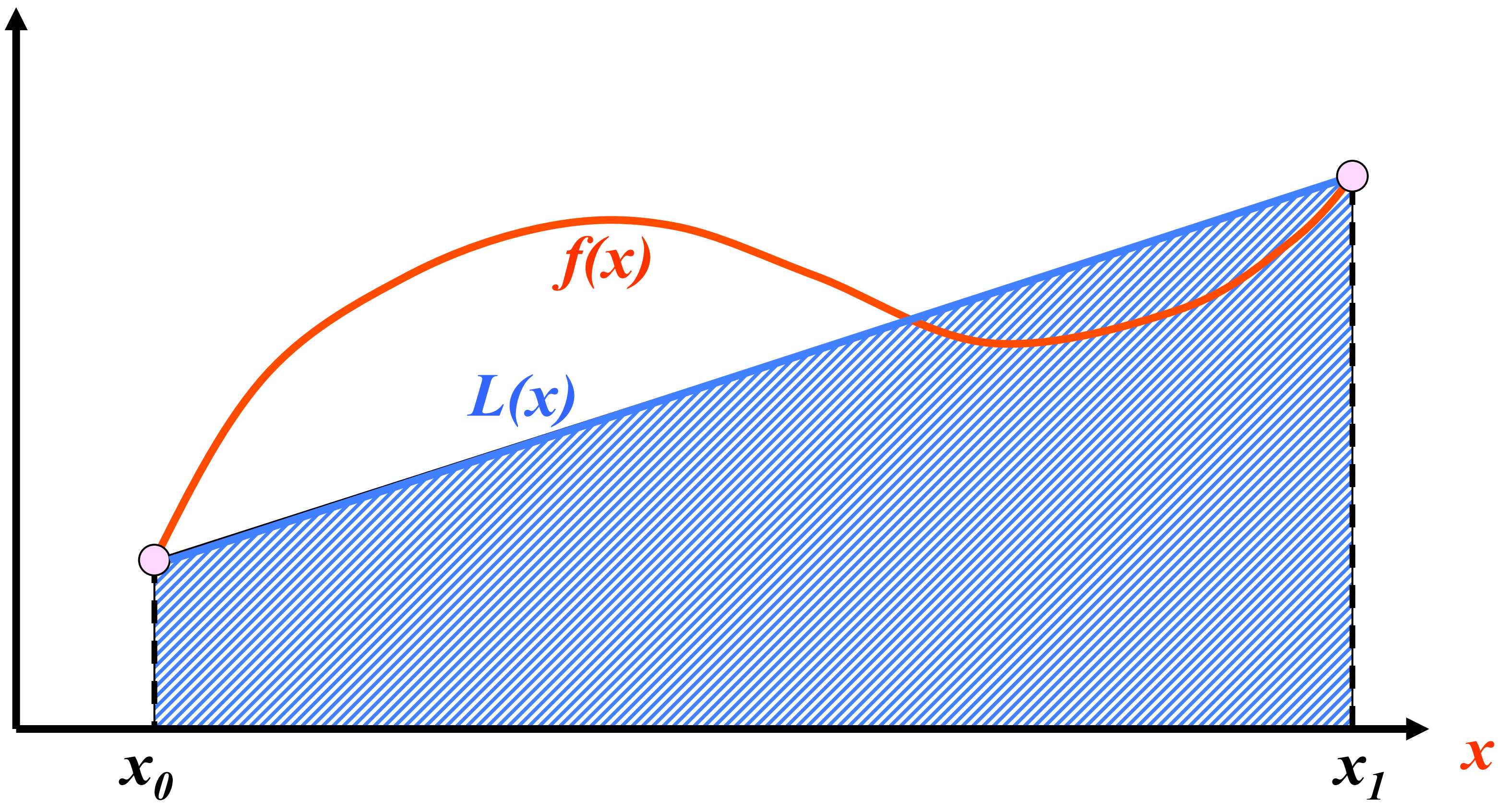
- Les poids sont obtenus à partir des polynômes de Lagrange $L(x)$.
  Ils dépendent seulement des x_i.
  Différentes méthodes sont utilisées pour obtenir les c_i.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$$

- La méthode de Newton-Cotes est la méthode <u>générale</u>:
  - Trapèze: n=1
  - Simpson's 1/3 : n=2
  - Simpson's 3/8 : n=3
  - …

TRAPÈZES N=1

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{1} c_i f(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1)$$



RAPPEL : INTERPOLATION POLYNÔMIALE DE LAGRANGE

On appelle polynômes interpolateurs de Lagrange aux abscisses $x_0, x_1, \ldots x_{n-1}$ les n polynômes L_0, $L_1 \ldots L_{n-1}$ définis par :

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

Exemple : les 3 polynômes associés aux 3 abscisses $x_0=2$, $x_1=4$ et $x_2=5$ sont :

$$L_0(x) = \frac{x-4}{2-4} \times \frac{x-5}{2-5} \quad L_1(x) = \frac{x-2}{4-2} \times \frac{x-5}{4-5} \quad L_2(x) = \frac{x-2}{5-2} \times \frac{x-4}{5-4}$$

Pour n=1 (trapèzes), calcul de c_i :

- Polynômes de Lagrange

$$L(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

$$let \quad \mathrm{a} = \mathrm{x}_0, \ \mathrm{b} = \mathrm{x}_1, \quad \xi = \frac{x-a}{b-a}, \quad \mathrm{d}\xi = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{h}}; \quad h = b - a$$

$$\left.\begin{cases} x = a & \Rightarrow \xi = 0 \\ x = b & \Rightarrow \xi = 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow L(\xi) = (1-\xi) f(a) + (\xi) f(b)$$

- Nous intégros

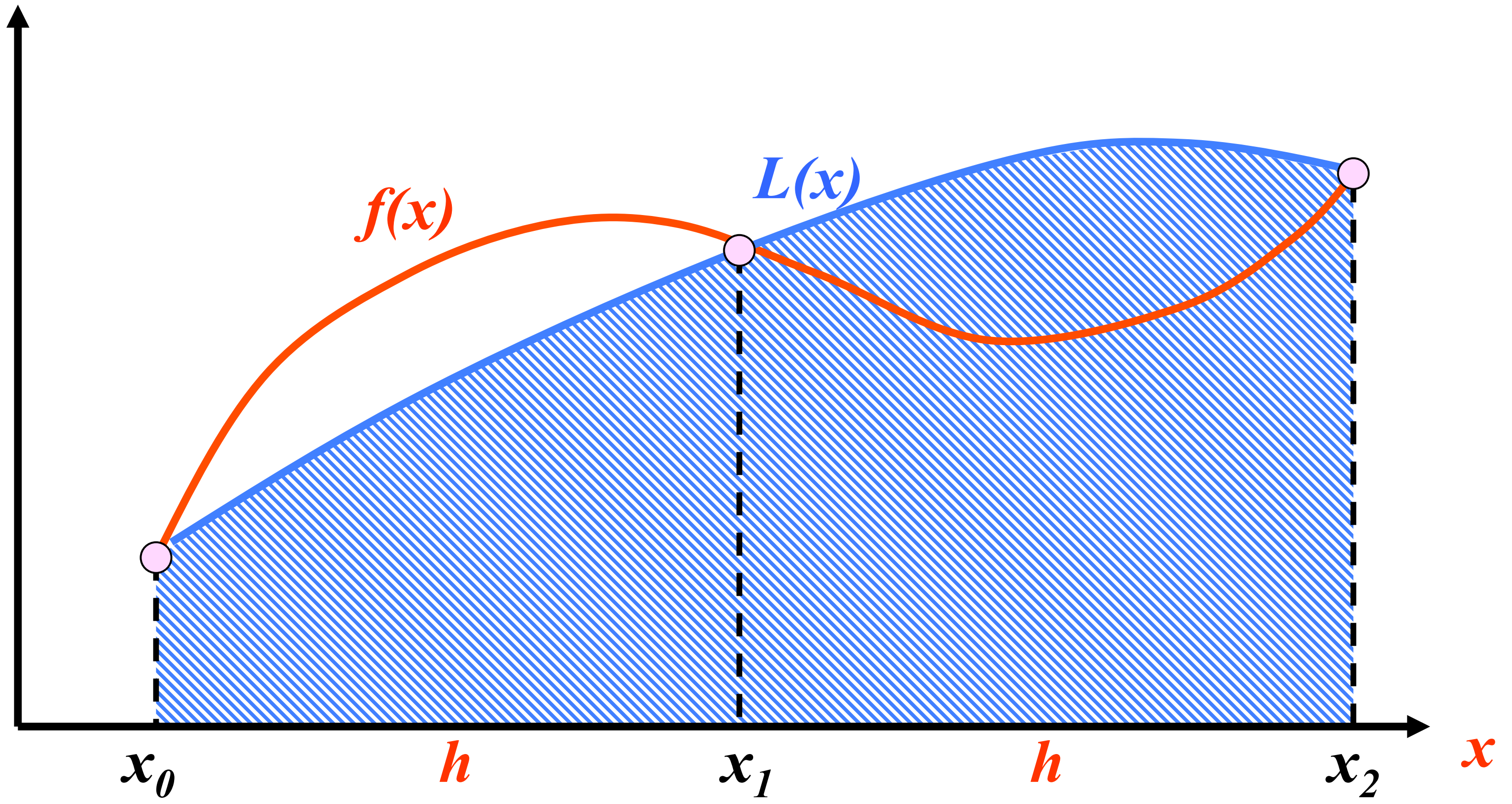
$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L(x)dx = h\int_0^1 L(\xi)d\xi$$

$$= f(a)h\int_0^1 (1-\xi)d\xi + f(b)h\int_0^1 \xi d\xi$$

$$= f(a)h(\xi - \frac{\xi^2}{2})\Big|_0^1 + f(b)h\frac{\xi^2}{2}\Big|_0^1 = \boxed{\frac{h}{2}\ f(a) + f(b)}$$

SIMPSON 1/3 N=2

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{2} c_i f(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$



Pour n=2 (Simpson 1/3), calcul de c_i :

- Polynômes de Lagrange

$$L(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

$$let \quad x_0=a,\ x_2=b,\ x_1=\frac{a+b}{2}$$

$$h=\frac{b-a}{2},\ \xi=\frac{x-x_1}{h},\ d\xi=\frac{dx}{h}$$

$$\begin{cases} x=x_0 \Rightarrow \xi=-1 \\ x=x_1 \Rightarrow \xi=0 \\ x=x_2 \Rightarrow \xi=1 \end{cases}$$

$$\boxed{L(\xi)=\frac{\xi(\xi-1)}{2}f(x_0)+(1-\xi^2)f(x_1)+\frac{\xi(\xi+1)}{2}f(x_2)}$$

- Nous intégrons

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\int_{-1}^{1} L(\xi)d\xi = f(x_0)\frac{h}{2}\int_{-1}^{1}\xi(\xi-1)d\xi$$

$$+ f(x_1)h\int_0^1(1-\xi^2)d\xi + f(x_2)\frac{h}{2}\int_{-1}^{1}\xi(\xi+1)d\xi$$

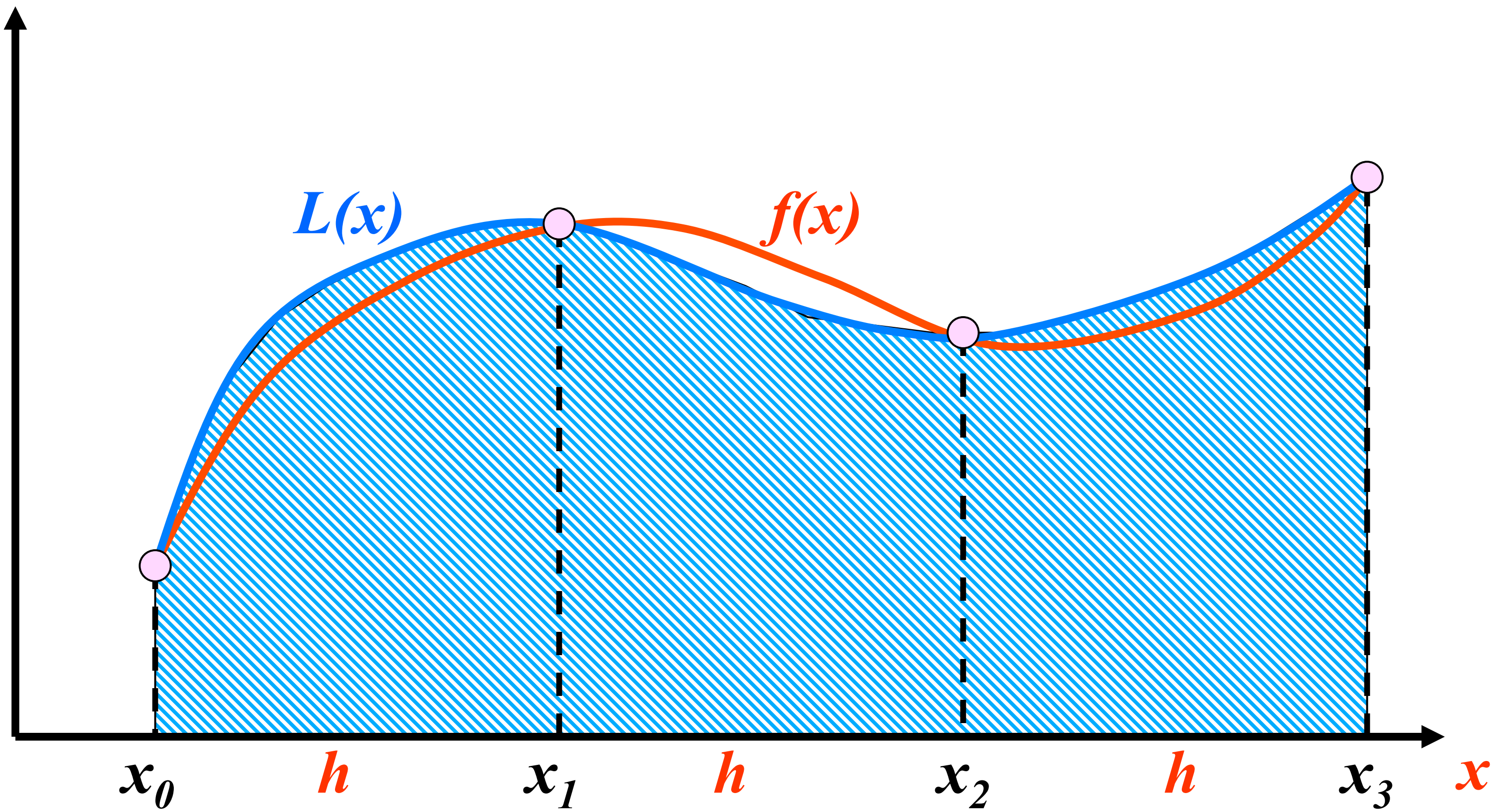
$$= f(x_0)\frac{h}{2}\left(\frac{\xi^3}{3}-\frac{\xi^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} + f(x_1)h\left(\xi-\frac{\xi^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$+ f(x_2)\frac{h}{2}\left(\frac{\xi^3}{3}+\frac{\xi^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right]}$$

SIMPSON 3/8 N=3

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{3} c_i f(x_i) = c_0 f(x_0) + c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$



Pour n=3 (Simpson 3/8), calcul de c_i :

- Polynômes de Lagrange

$$L(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} f(x_0)$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} f(x_1)$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} f(x_2)$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} f(x_3)$$

- Nous intégrons

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L(x)dx \ ; \quad h = \frac{b-a}{3}$$

$$= \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]$$

MÉTHODES NUMÉRIQUES

Alain Foucaran

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : PLAN DU COURS

- Développement de TAYLOR
- Racines d'Equations
- Résolution de Système d'Equations
- Moindres Carrés et Interpolation
- Dérivée – Extrapolation
- Intégration
- Equations Différentielles

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : PLAN DU COURS

- Développement de TAYLOR
- Racines d'Equations
- Résolution de Système d'Equations
- Moindres Carrés et Interpolation
- Dérivée – Extrapolation
- Intégration
- <u>Equations Différentielles</u>

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

On appelle équation différentielle d'ordre n une équation du type :

$$f\left(x, y(x), y'(x), y''(x), y^{(3)}(x), \ldots y^{(n)}(x)\right) = 0$$

Où y est une fonction de x et f une fonction quelconque.

Équations différentielles linéaires du premier ordre

On écrit généralement ce type d'équation sous la forme :

$$a(x)\frac{dy(x)}{dx}+b(x)y(x)=c(x)$$

Cette équation peut se résoudre analytiquement si a(x) ne s'annule pas sur l'intervalle étudié. On cherche d'abord la solution de l'équation sans second membre (ESSM) :

$$a(x)\frac{dy(x)}{dx}+b(x)y(x)=0 \Rightarrow y_{ESSM}(x)=e^{-\int\frac{b(x)}{a(x)}dx}$$

Le calcul de la primitive fait intervenir une constante d'intégration généralement notée K. Si on connaît une solution particulière y_{part} de l'équation générale, la solution recherchée est alors:

$$y(x)=y_{part}(x)+y_{ESSM}(x)$$

Si on ne connaît pas de solution particulière, on utilise la méthode de la variation de la constante (K-> K(x))

Équations différentielles linéaires du second ordre

On écrit généralement ce type d'équation sous la forme :

$$a(x)\frac{d^2y(x)}{dx^2}+b(x)\frac{dy(x)}{dx}+c(x)y(x)=d(x)$$

Cette équation peut se résoudre analytiquement sous certaines conditions :

- a(x), b(x) et c(x) constantes
- d(x) de la forme : $$d(x)=P(x)e^{\alpha x}$$

Où P(x) est un polynôme et α un nombre complexe

Dans ces conditions, on cherche une solution particulière et on résout l'équation sans second membre. La solution recherchée est alors:

$$y(x)=y_{part}(x)+y_{ESSM}(x)$$

Les autres équations différentielles ?

Que faire lorsque l'on a :

- une équation différentielle non linéaire ?
- une équation du second ordre à coefficients non constants ?
- une équation du second ordre avec un second membre « exotique » ?
- une équation d'ordre supérieur à 2 ?
- un système d'équations différentielles ?

$\Rightarrow$ Méthode numérique !

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Objectif:

Calculer les solutions d'une équation différentielle

- Méthode d'Euler
- Méthode de Runge Kutta à l'ordre 2
- Méthode de Runge Kutta à l'ordre 4

LES MÉTHODES NUMÉRIQUES : EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Objectif:

Calculer les solutions d'une équation différentielle

- Méthode d'Euler
- Méthode de Runge Kutta à l'ordre 2
- Méthode de Runge Kutta à l'ordre 4

La méthode d'Euler

On considère une équation du 1er ordre sous la forme : $$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x))$$

Physiquement, cette équation possède une condition initiale : $$y(x_0) = y_0$$

En ce point initial, il est alors possible de calculer la dérivée de *y* : $$\left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x_0, y_0} = f(x_0, y_0)$$

La dérivée peut être approximée par : $$\frac{dy(x)}{dx} \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

D'où : $$\boxed{y(x+h) \approx y(x) + h \times f(x_0, y_0)}$$

Il est donc possible de construire point par point la fonction *y*.

Exemple 1 : Résolution par Euler : $\frac{dy(x)}{dx} = -2xy$

Condition initiale : y(0)=1

Calculer la solution analytique et la solution par la méthode d'Euler ?

Exemple 1 : Résolution par Euler : $\frac{dy(x)}{dx} = -2xy$

Condition initiale : y(0)=1

La solution analytique est : $y = \exp\left(-x^2\right)$

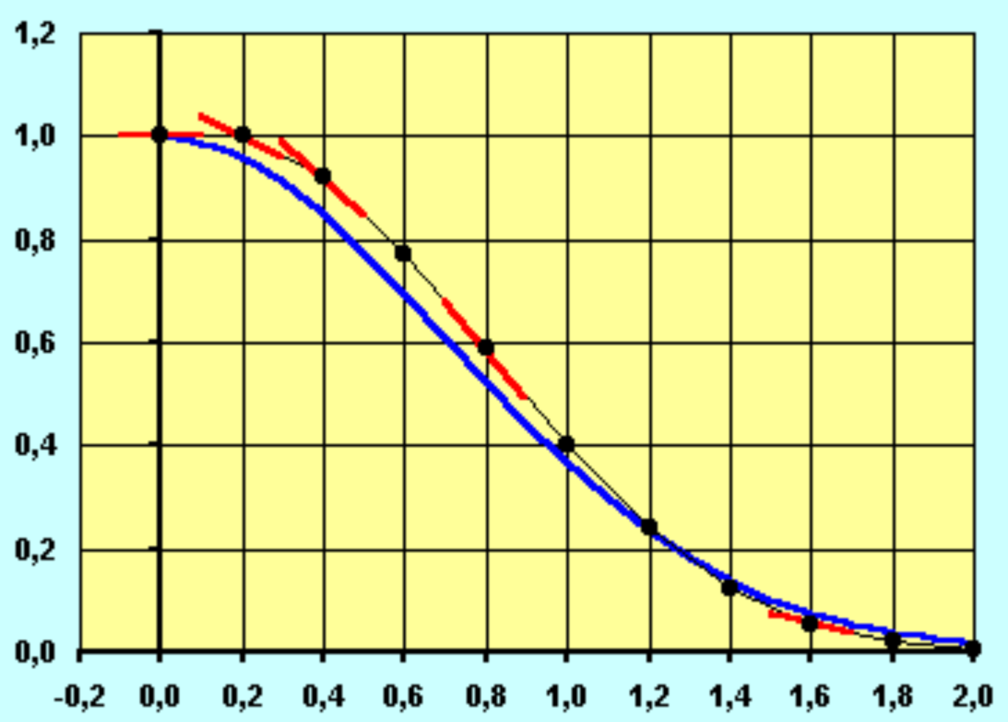
i	x_i	$y = \exp\left(-x^2\right)$
0	0	1
1	0,1	0,9900
2	0,2	0,9608
3	0,3	0,9139
4	0,4	0,8521
5	0,5	0,7788

Exemple 1 : Résolution par Euler : $\frac{dy(x)}{dx} = -2xy$

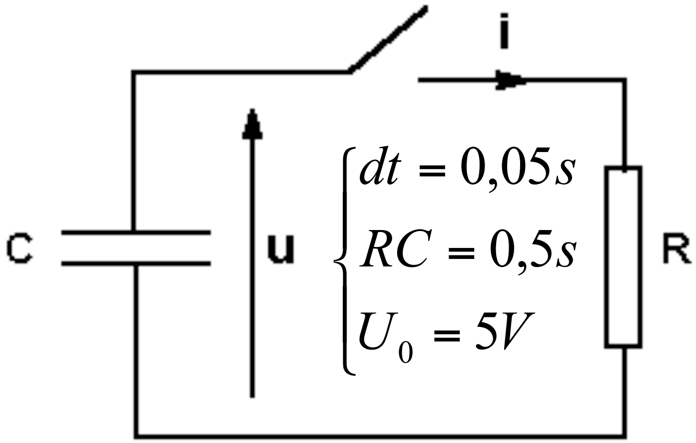
Condition initiale : y(0)=1

i	x_i	y_i	$Dy = -2 \cdot x_i \cdot y_i \cdot Dx$	$Y_{i+1} = y_i + Dy$
0	0	1	-2 . 0 . 1 . 0,2 = 0	1
1	0,2	1	-2 . 0,2 . 1 . 0,2 = - 0,08	0,92
2	0,4	0,92	-2 . 0,4 . 0,92 . 0,2 = - 0,15	0,77
3	0,6	0,77		
4	0,8			
5	1,0			

$$y(x+h) \approx y(x) + h \times f(x_0, y_0)$$



Exemple 2 : Résolution par Euler : Décharge d'un condensateur dans une résistance.

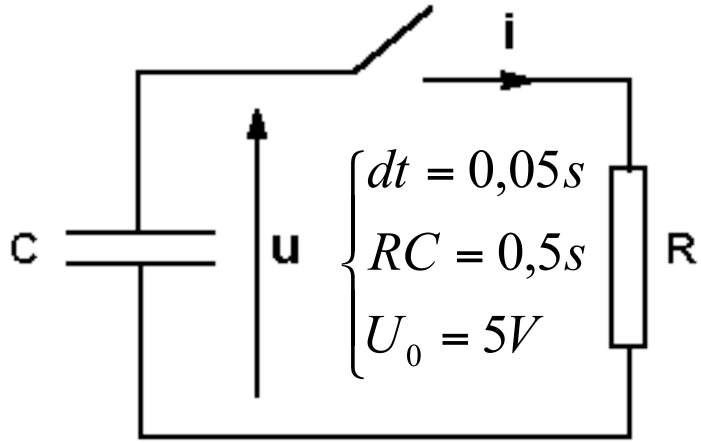


$$\begin{cases} dt = 0{,}05s \\ RC = 0{,}5s \\ U_0 = 5V \end{cases}$$

Condition initiale :
u(0)=5 (Volts)

Donner l'équation différentielle régissant le système et la résoudre ?

Exemple 2 : Résolution par Euler : Décharge d'un condensateur dans une résistance.



$$\begin{cases} dt = 0{,}05s \\ RC = 0{,}5s \\ U_0 = 5V \end{cases}$$

$$u = Ri = -R\frac{dq}{dt} = -RC\frac{du}{dt}$$

Donc: $\boxed{\frac{du}{dt} = -\frac{1}{RC}u}$

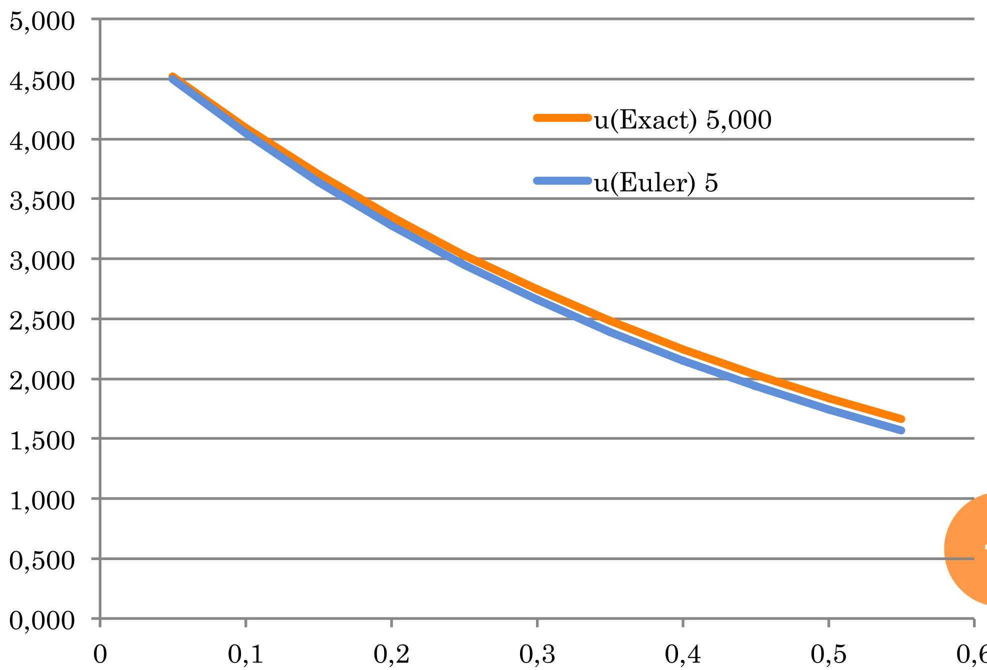
La solution analytique est : $u_t = U_0 \exp\left[-\frac{1}{RC}t\right]$

La solution par Euler est : $u_{i+1} = u_i + \Delta u_i = u_i + \frac{-1}{RC}u_i \times \Delta t$

$$y(x+h) \approx y(x) + h \times f(x_0, y_0)$$

Exemple 2 : Résolution par Euler : Décharge d'un condensateur dans une résistance.

t	u(Exact)	u(Euler)
0	5,000	5
0,05	4,524	4,500
0,1	4,094	4,050
0,15	3,704	3,645
0,2	3,352	3,281
0,25	3,033	2,952
0,3	2,744	2,657
0,35	2,483	2,391
0,4	2,247	2,152
0,45	2,033	1,937
0,5	1,839	1,743
0,55	1,664	1,569
0,6	1,506	1,412



Objectif:

Calculer les solutions d'une équation différentielle

- Méthode d'Euler
- <u>Méthode de Runge Kutta à l'ordre 2</u>
- Méthode de Runge Kutta à l'ordre 4

Méthode de Runge Kutta d'ordre 2 (RK2)

On écrit la série de Taylor de y(t+h) :

$$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2} y''(t) + o(h^3)$$

Sachant que : $y'(t) = f(t, y(t))$ (c'est l'équation différentielle !)

On peut écrire : $y''(t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot f(t, y)$

Donc : $\boxed{y(t+h) = y(t) + hf(t, y) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f(t, y)\right] + o(h^3)}$

Principe de la méthode : Peut-on écrire y(t+h) sous la forme :

$$y(t+h) = y(t) + Ahf_0 + Bhf_1 + o(h^3)$$

Avec : $\begin{cases} f_0 = f(t, y(t)) \\ f_1 = f(t + Ph, y(t) + Qhf_0) \end{cases}$

?

Où A, B, P et Q sont à déterminer.

La réponse est « oui » car cette forme peut se ramener à l'expression montré précédemment :

$$\boxed{y(t+h) = y(t) + hf(t,y) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f(t,y)\right] + o(h^3)}$$

Démonstration:

$$y(t+h) = y(t) + Ahf_0 + Bhf_1 + o(h^3) \qquad \begin{cases} f_0 = f(t, y(t)) \\ f_1 = f(t+Ph, y(t) + Qhf_0) \end{cases}$$

On écrit f_1 sous la forme :

$$f_1 = f(t+Ph, y(t)+Qhf_0) = f(t, y(t)) + Ph\frac{\partial f}{\partial t} + Qhf_0\frac{\partial f}{\partial y} + o(h^2)$$

Que l'on réinjecte dans y(t+h) :

$$y(t+h) = y(t) + Ahf_0 + Bh\left[f(t, y(t)) + Ph\frac{\partial f}{\partial t} + Qhf_0\frac{\partial f}{\partial y} + o(h^2)\right] + o(h^3)$$

Qui s'écrit aussi :

$$\boxed{y(t+h) = y(t) + h[A+B]f(t, y(t)) + h^2\left[BP\frac{\partial f}{\partial t} + BQ\frac{\partial f}{\partial y}\right] + o(h^3)}$$

La comparaison des 2 expressions :

$$\boxed{y(t+h) = y(t) + hf(t,y) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} f(t,y)\right] + o(h^3)}$$

$$\boxed{y(t+h) = y(t) + h[A+B]f(t,y(t)) + h^2\left[BP\frac{\partial f}{\partial t} + BQ\frac{\partial f}{\partial y}\right] + o(h^3)}$$

nous permet d'écrire : $\begin{cases} A+B=1 \\ BP=1/2 \\ BQ=1/2 \end{cases}$

Nous avons donc un système de 3 équations à 4 inconnues : on peut en fixer une !

<u>Si on fixe B=1/2 :</u> $\begin{cases} A=1/2 \\ P=1 \\ Q=1 \end{cases}$

C'est la méthode de HEUN

<u>Si on fixe B=1 :</u> $\begin{cases} A=0 \\ P=1/2 \\ Q=1/2 \end{cases}$

C'est la méthode d'EULER améliorée

Méthode de Runge Kutta d'ordre 2 (RK2)

En résumé :

$$y(t+h) = y(t) + Ahf_0 + Bhf_1 + o(h^3) \qquad \begin{cases} k_0 = h.f_0 \\ k_1 = h.f_1 \end{cases}$$

$$= y(t) + Ak_0 + Bk_1$$

Méthode de HEUN

$$\begin{cases} A = 1/2 \\ B = 1/2 \\ P = 1 \\ Q = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y(t+h) &= y(t) + \frac{h}{2} f(t, y(t)) + \frac{h}{2} f\left(t+h, y(t) + \frac{h}{2} f(t, y(t))\right) \\ &= y(t) + \frac{1}{2}[k_0 + k_1] \end{aligned}}$$

Méthode d'EULER améliorée

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = 1 \\ P = 1/2 \\ Q = 1/2 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} y(t+h) &= y(t) + hf\left(t + \frac{h}{2}, y(t) + \frac{h}{2} f(t, y(t))\right) \\ &= y(t) + hf\left(t + \frac{h}{2}, y(t) + \frac{k_0}{2}\right) = y(t) + k_1 \end{aligned}}$$

Exemple 1 : Résolution par Euler : $\dfrac{dy(x)}{dx} = -2xy$

Condition initiale : y(0)=1

Exemple 1 : Résolution par Euler : $\dfrac{dy(x)}{dx} = -2xy$

Condition initiale : y(0)=1

$$\begin{cases} k_0 = h.f_0 \\ k_1 = h.f_1 \end{cases}$$

$$y(t+h) = y(t) + hf\left(t + \frac{h}{2}, y(t) + \frac{h}{2} f\big(t, y(t)\big)\right)$$

$$= y(t) + hf\left(t + \frac{h}{2}, y(t) + \frac{k_0}{2}\right) = y(t) + k_1$$

Exemple 1 : Résolution par Euler : $\frac{dy(x)}{dx} = -2xy$

Condition initiale : y(0)=1

Methode RK2 (EULER améliorée):

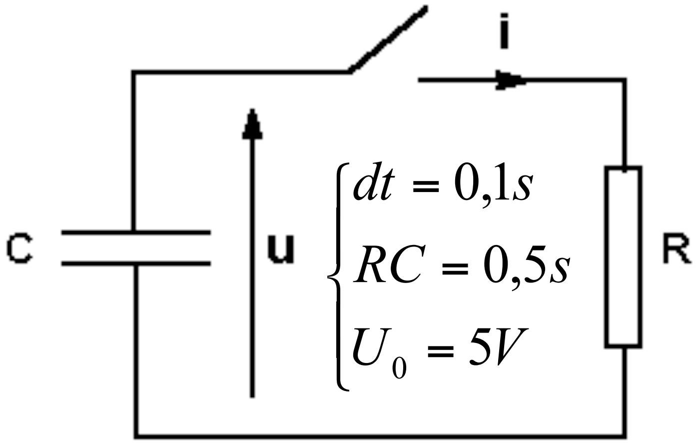
i	x_i	y_i	$k_0=-2 \times x_i \times y_i \times \Delta x$	$k_1 = -2 \times (x_i+\Delta x/2)\times(y_i + k_0/2)\times\Delta x$
0	0	1	$-2\times0\times1\times0{,}1=0$	$-2\times0{,}05\times1\times0{,}1=-0{,}01$
1	0,1	0,99	$-2\times0{,}1\times1\times0{,}1=-0{,}02$	$-2\times0{,}15\times0{,}98\times0{,}1=-0{,}03$
2	0,2	0,96	$-2\times0{,}2\times0{,}96\times0{,}1=-0{,}04$	$-2\times0{,}25\times0{,}94\times0{,}1=-0{,}05$
3	0,3	0,91	$-2\times0{,}3\times0{,}91\times0{,}1=-0{,}055$	$-2\times0{,}35\times0{,}88\times0{,}1=-0{,}06$
4	0,4	0,85	$-2\times0{,}4\times0{,}85\times0{,}1=-0{,}07$	$-2\times0{,}45\times0{,}81\times0{,}1=-0{,}07$
5	0,5	0,78		

$$\begin{cases} k_0 = h.f_0 \\ k_1 = h.f_1 \end{cases}$$

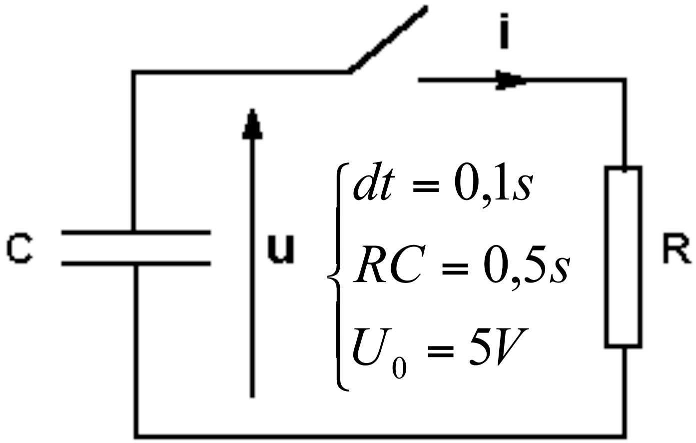
$$y(t+h) = y(t) + hf\left(t+\frac{h}{2}, y(t) + \frac{h}{2} f\left(t, y(t)\right)\right)$$

$$= y(t) + hf\left(t+\frac{h}{2}, y(t) + \frac{k_0}{2}\right) = y(t) + k_1$$

Exemple 2 : Résolution par RK2 : Décharge d'un condensateur dans une résistance.



Exemple 2 : Résolution par RK2 : Décharge d’un condensateur dans une résistance.



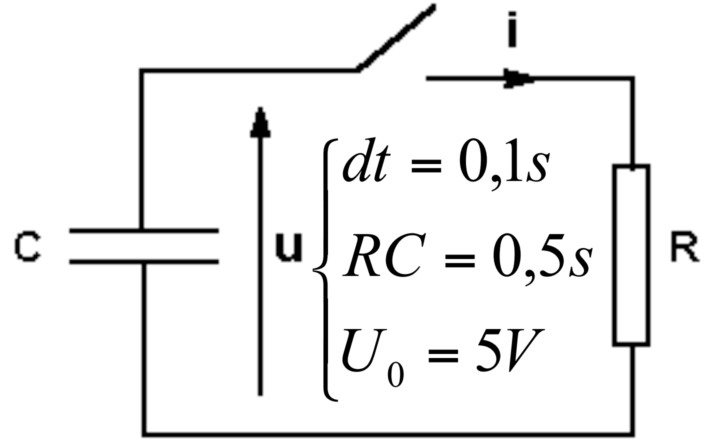
$$\begin{cases} dt = 0{,}1s \\ RC = 0{,}5s \\ U_0 = 5V \end{cases}$$

$$u = Ri = -R\frac{dq}{dt} = -RC\frac{du}{dt}$$

Donc: $$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{RC}u$$

Exemple 2 : Résolution par RK2 : Décharge d'un condensateur dans une résistance.

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{RC}u$$

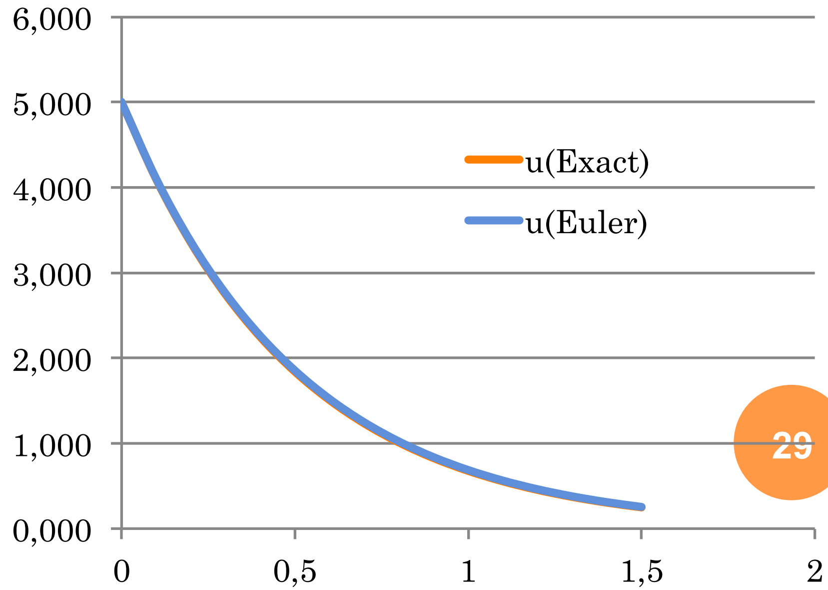


$$\begin{cases} k_0 = -\dfrac{1}{RC}.u_t.dt \\ k_1 = -\dfrac{1}{RC}.\left(u_t + \dfrac{k_0}{2}\right).dt \end{cases}$$

$$y(t+h) = y(t) + hf\left(t + \frac{h}{2}, y(t) + \frac{k_0}{2}\right) = y(t) + k_1$$

Exemple 2 : Résolution par RK2 : Décharge d'un condensateur dans une résistance.

t	u(Exact)	u(Euler)	K0	K1
0	5,000	5,000	-1,000	-0,900
0,1	4,094	4,100	-0,820	-0,738
0,2	3,352	3,362	-0,672	-0,605
0,3	2,744	2,757	-0,551	-0,496
0,4	2,247	2,261	-0,452	-0,407
0,5	1,839	1,854	-0,371	-0,334
0,6	1,506	1,520	-0,304	-0,274



Objectif:

Calculer les solutions d'une équation différentielle

- Méthode d'Euler
- Méthode de Runge Kutta à l'ordre 2
- Méthode de Runge Kutta à l'ordre 4

Méthode de Runge Kutta d'ordre 4 (RK4)

Principe de la méthode RK2 : on écrit y(t+h) sous la forme :

$$y(t+h) = y(t) + Ahf_0 + Bhf_1 + o(h^3)$$

Principe de la méthode RK4 : on écrit y(t+h) sous la forme :

$$y(t+h) = y(t) + Ahf_1 + Bhf_2 + Chf_3 + Bhf_4 + o(h^5)$$

C'est le même type de calcul (mais c'est long).

Méthode de Runge Kutta d'ordre 4 (RK4)

On montre que :

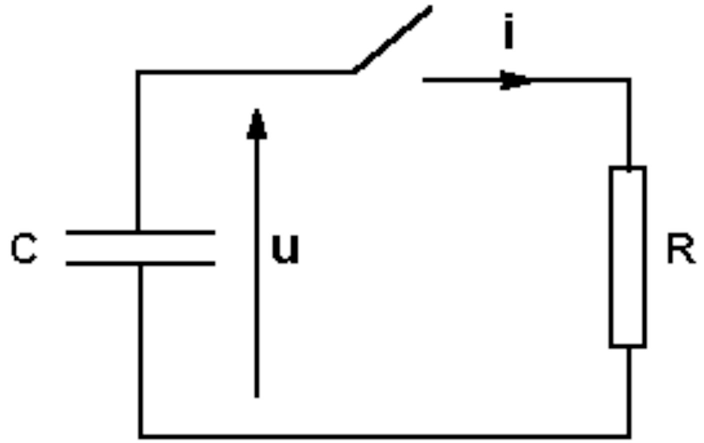
$$\boxed{y(t+h) = y(t) + \frac{h}{6}\left(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4\right) + o\left(h^5\right)}$$

Avec:

$$\begin{cases} f_1 = f(t, y) \\ f_2 = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f_1\right) \\ f_3 = f\left(t + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f_2\right) \\ f_4 = f\left(t + h, y + h f_3\right) \end{cases}$$

On doit évaluer la fonction en 4 points différents.

Exemple 2 : Résolution par RK4 : Décharge d'un condensateur dans une résistance.



$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{RC}u$$

Donner les expression des f_i permettant de résoudre le système par RK4 ?

Exemple 2 : Résolution par RK4 : Décharge d'un condensateur dans une résistance.

$$\begin{cases} k_1 = -\dfrac{1}{RC}.u_t.dt \\ k_2 = -\dfrac{1}{RC}.\left(u_t + \dfrac{k_1}{2}\right).dt \\ k_3 = -\dfrac{1}{RC}.\left(u_t + \dfrac{k_2}{2}\right).dt \\ k_4 = -\dfrac{1}{RC}.\left(u_t + k_3\right).dt \end{cases}$$

$$\begin{cases} k_1 = h.f_1 \\ k_2 = h.f_2 \\ k_3 = h.f_3 \\ k_4 = h.f_4 \end{cases}$$

Pour résoudre le système par RK4 :

$$y(t+h) = y(t) + \frac{h}{6}\left(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4\right) + o\left(h^5\right)$$

Amélioration de la précision

La méthode RK4 est d'ordre 4, on peut donc écrire :

$$y(t+h) = y(t) + \frac{h}{6}F(t,h) + \alpha h^5 + \beta h^6 + o(h^7) \qquad \textbf{(1)}$$

Pour calculer y(t+h), on peut aussi appliquer 2 fois RK4 avec un pas h/2 :

$$y\left(t+\frac{h}{2}\right) = y(t) + \frac{1}{2}\frac{h}{6}F\left(t,\frac{h}{2}\right) + \alpha\left(\frac{h}{2}\right)^5 + \beta\left(\frac{h}{2}\right)^6 + o(h^7)$$

$$y\left(\left(t+\frac{h}{2}\right)+\frac{h}{2}\right) = y\left(t+\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{h}{6}F\left(t+\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right) + \alpha\left(\frac{h}{2}\right)^5 + \beta\left(\frac{h}{2}\right)^6 + o(h^7)$$

$$\Rightarrow \quad y(t+h) = y(t) + \frac{1}{2}\frac{h}{6}\left[F\left(t+\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right) + F\left(t,\frac{h}{2}\right)\right] + 2\alpha\left(\frac{h}{2}\right)^5 + 2\beta\left(\frac{h}{2}\right)^6 + o(h^7) \qquad \textbf{(2)}$$

$$\boxed{y(t+h) = y(t) + \frac{h}{90}\left[8F\left(t+\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right) + 8F\left(t,\frac{h}{2}\right) - F(t,h)\right] + o(h^6)}$$

« 16x(2)-(1) »

Objectif:

Calculer les solutions d'une équation différentielle

- Méthode d'Euler
- Méthode de Runge Kutta à l'ordre 2
- Méthode de Runge Kutta à l'ordre 4

- Généralisation

EQUATIONS DU SECOND ORDRE

$$a(t)\frac{d^2y}{dt^2}+b(t)\frac{dy}{dt}+c(t)y=f(t)$$

Cette équation peut toujours s'écrire sous la forme d'un système d'équations différentielles du premier ordre :

$$\left|\begin{aligned}&\frac{dy}{dt}=z(t)\\&\frac{dz}{dt}=\frac{1}{a(t)}\left[-b(t)z(t)-c(t)y(t)+f(t)\right]\end{aligned}\right.$$

Ce système peut se résoudre par les méthodes exposées précédemment, la fonction inconnue étant maintenant un vecteur.

La méthode est également utilisable pour des équations d'ordres supérieurs.

Exemple : Circuit RLC série par Euler.

On considère un circuit RLC série alimenté par une fem e(t). La tension aux bornes du condensateur obéit à l'équation différentielle suivante:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = \frac{e(t)}{LC}$$

Pour une résolution numérique, on écrit :

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{du}{dt} = z(t) \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{e(t)}{LC} - \dfrac{R}{L}z(t) - \dfrac{1}{LC}u(t) \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = z(t) \\ \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{e(t)}{LC} - \dfrac{R}{L} z(t) - \dfrac{1}{LC} u(t) \end{cases}$$

La méthode d'EULER permet de calculer les valeurs des fonctions au « point suivant » à l'aide des valeurs des fonctions au « point courant »:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u(t_{n+1}) = u(t_n + h) = u(t_n) + h \times z(t_n, z_n) \\ z_{n+1} = z(t_{n+1}) = z(t_n + h) = z(t_n) + h \times \left[\dfrac{e(t_n)}{LC} - \dfrac{R}{L} z_n - \dfrac{1}{LC} u_n \right] \end{cases}$$

On peut donc construire point par point les fonctions u et z.