Outils mathématiques 2 : DS — Janvier 2018

Durée : 1h30. Merci de répondre directement et uniquement sur cette liasse.

Toutes les questions sont indépendantes. Calculatrice IUT et formulaire A4 recto-verso manuscrit autorisés.

NOM : GROUPE : NOTE : /20

1. Effectuer la division euclidienne de $x^4 - x^3 + 3x^2 + 1$ par $x^2 + 3x + 1$. *(1 pt)*

$$\begin{array}{r|l} x^4 - x^3 + 3x^2 + 1 & x^2+3x+1 \\ -(x^4 + 3x^3 + x^2) & \overline{x^2 - 4x + 14} \\ \hline 0 \; -4x^3 + 2x^2 + 1 & \\ -(-4x^3 - 12x^2 - 4x) & \\ \hline 0 \; + 14x^2 + 4x + 1 & \\ -(14x^2 + 42x + 14) & \\ \hline 38x - 13 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x^4 - x^3 + 3x^2 + 1}{x^2+3x+1} = x^2 - 4x + 14 + \frac{38x - 13}{x^2+3x+1}$$

2. Déterminer l'ensemble des racines de $P_1(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$ sachant qu'il admet une racine triple. *(2 pt)*

Soit a la racine triple. Alors $P_1(a) = P_1'(a) = P_1''(a)$

avec $P_1'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x + 4$

$P_1''(x) = 12x^2 - 30x + 12 = 6(2x^2 - 5x + 2)$.

Cherchons a : $\Delta = 25 - 4 \times 2 \times 2 = 9 = 3^2 \Rightarrow a_1 = \frac{5+3}{4} = 2$

$a_2 = \frac{5-3}{4} = 1/2$.

On remarque que $P_1'(2) = 0 \Rightarrow a = 2$ est racine triple

Il faut déterminer une seconde racine b, qui est simple, avec $P_1(x) = (x-a)^3(x-b)$.

Or $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x \;\; 8$

$$\Rightarrow \begin{array}{r|l} x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8 & x^3 - 6x^2 + 12x \;\; 8 \\ -(x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 8x) & \overline{x + 1} \\ \hline x^3 - 6x^2 + 12x - 8 & \\ -(x^3 - 6x + 12x - 8) & \\ \hline 0. & \end{array}$$

-1 est racine simple

Les racines sont donc :

$2(3)$ et $-1(1)$.

3. $P_2(x)$ est un polynôme **réel** de degré 4 admettant j pour racine simple et 2 pour racine double. Écrire P_2. *(1 pt)*

Si P_2 est un polynôme réel alors $-j$ est la quatrième racine (car conjugué de j)

$$\Rightarrow P_2(x) = (x+j)(x-j)(x-2)^2 = (x^2+1)(x-2)^2 = (x^2+1)(x^2-4x+2)$$

$$= x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x^2 - 4x + 2$$

$$\boxed{P_2(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 4x + 2}$$

4. Donner l'ensemble des primitives de la fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x(x^2+1)}$. *(2 pt)*

Comme $\deg N = \deg D$ alors j'effectue une division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} x^3+1 & x^3+x \\ \underline{-(x^3+x)} & \overline{1} \\ -x+1 & \end{array} \Rightarrow f(x) = 1 + \underbrace{\frac{-x+1}{x(x^2+1)}}_{g(x)}$$

$g(x) \to$ je décompose $g(x)$

Pôles : $0\,(1) \in \mathbb{R}$, un couple $(1) \in \mathbb{C}$ $\to g(x) = \dfrac{A}{x} + \dfrac{Bx+C}{x^2+1}$

avec $A = \lim_0 x g(x) = \lim_0 \dfrac{x^3+1}{x^2+1} = 1 = A$.

$\lim_{+\infty} x g(x) = 0 = A + B \Rightarrow B = -1$.

Enfin $g(1) = 0 = A + \dfrac{B}{2} + \dfrac{C}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{C}{2} \Rightarrow C = -1$

$\to f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{-x}{x^2+1} + \dfrac{-1}{x^2+1}$

Finalement $\boxed{F(x) = K + x + \ln|x| - \dfrac{1}{2}\ln|x^2+1| - \arctan(x)}$

5. Calculer les intégrales suivantes :

(a) $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ *(1 pt)*

Il s'agit d'une forme usuelle : $u = x^2+1 \to u' = 2x$, $n = -1/2$ $\Rightarrow u'u^n = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \longrightarrow 2\sqrt{x^2+1}$

$I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2} u' u^n \, dx = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \boxed{\sqrt{2} - 1 = I_1}$

(b) $I_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/3} \tan(x) dx$ *(1 pt)*

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = -\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = \cos x \Rightarrow \tan x = \left(-\ln|\cos x|\right)'$

$\Rightarrow I_2 = \left[-\ln|\cos x|\right]_0^{\pi/3} = -\ln\left(\cos\dfrac{\pi}{3}\right) = -\ln\dfrac{1}{2} = \boxed{\ln 2 = I_2}$

(c) $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx$ *(1 pt)*

$I_3 = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = [x]_0^1 - [\arctan x]_0^1$

$= 1 - \arctan 1 = \boxed{1 - \dfrac{\pi}{4} = I_3}$

(d) $I_4 = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$ *(2 pt)*

Il faut faire une IPP. $u'(x) = \frac{1}{x^2} \longrightarrow u(x) = -\frac{1}{x}$

$v'(x) = \frac{1}{x} \longleftarrow v(x) = \ln x$

$$I_4 = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x^2} dx = -\frac{\ln e}{e} + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^e = -\frac{\ln e}{e} - \frac{1}{e} + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{I_4 = 1 - \frac{2}{e}}$$

(e) $I_5 = \int_0^{\pi} x \sin(x) dx$ *(1 pt)*

On fait une IPP. $u'(x) = \sin x \longrightarrow u(x) = -\cos x$

$v'(x) = 1 \longleftarrow v(x) = x$

$$I_5 = [-x\cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, dx = -\pi \cos \pi + [\sin x]_0^{\pi} = \boxed{\pi = I_5}$$

(f) $I_6 = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x} + x} dx$ en posant $u = \sqrt{x}$ *(2 pt)*

1. $\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \quad dx = 2\sqrt{x}\, du = 2u\, du$

2. $\frac{1}{\sqrt{x} + x} = \frac{1}{u + u^2}$

3. x va de 1 à 4 alors u va de 1 à 2.

4. $$I_6 = \int_1^2 \frac{2u}{u + u^2} du = 2\int_1^2 \frac{1}{1+u} du = 2\left[\ln|1+u|\right]_1^2$$
$$= 2\ln 3 - 2\ln 2$$
$$= \boxed{2\ln\left(\frac{3}{2}\right) = I_6}$$

6. Résoudre l'équation différentielle $y' - \sqrt{y} = 0$ avec $y(0) = 1$. *(1 pt)*

Elle est non-linéaire : on sépare les variables.

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{y}} = dx \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{y}} dy = \int dx + k \Rightarrow 2\sqrt{y} = x + k$$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{x}{2} + \frac{k}{2}\right)^2 \qquad y(0) = 1 = \left(\frac{k}{2}\right)^2 \Rightarrow k^2 = 4. \Rightarrow k = \pm 2$$

Finalement $y(x) = \left(\frac{x}{2} + 1\right)^2$ ou bien $y(x) = \left(\frac{x}{2} - 1\right)^2$

7. Résoudre l'équation différentielle $y' + 4y = \sin(2x)$. *(2 pt)*

C'est une ED1LNC → On superpose $\qquad y' + 4y = 0 \Rightarrow y_H(x) = Ke^{-4x}$

On cherche $y_p = A\cos(2x) + B\sin(2x)$ (Méthode du tableau)

$$\Rightarrow y_p' = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)$$

$$\Rightarrow y_p' + 4y_p = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) + 4A\cos(2x) + 4B\sin(2x)$$

$$= (-2A+4B)\sin(2x) + (4A+2B)\cos(2x) = \sin(2x)$$

On identifie : $\left.\begin{array}{l} -2A+4B = 1 \\ 4A+2B = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 4B = -8A \\ -2A-8A = -10A = 1 \end{array} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A = -1/10 \\ B = 1/5 \end{array}\right.$

$$\Rightarrow y_p(x) = -\frac{\cos(2x)}{10} + \frac{\sin(2x)}{5} \Rightarrow \boxed{y_N(x) = Ke^{-4x} - \frac{\cos(2x)}{10} + \frac{\sin(2x)}{5}}$$

8. Résoudre l'équation différentielle $(1+x^2)y' + 2xy = e^x$ avec $y(0) = 0$. *(3 pt)*

C'est une ED1LNV. On superpose. $\qquad (1+x^2)y' + 2xy = 0 \ (H)$

$$\Rightarrow y(x) = Ke^{A(x)} \text{ avec } A(x) = \int -\frac{2x}{1+x^2}\,dx$$

$$= -\ln|1+x^2| = \ln\frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{K}{1+x^2}$$

Je cherche y_p avec Lagrange. Je pose $y_p(x) = \frac{f(x)}{1+x^2}$.

$$y_p'(x) = \frac{f'(x)(1+x^2) - f(x)\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{f'(x)}{1+x^2} - 2x\frac{f(x)}{(1+x^2)^2}.$$

On injecte $(1+x^2)y_p' + 2xy_p = f'(x) \cancel{- \frac{2x}{1+x^2}f(x)} + \cancel{2x\frac{f(x)}{1+x^2}} = f'(x) = e^x$

$$\Rightarrow f(x) = e^x.$$

Finalement $y_p(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$ et $y_N(x) = \frac{K+e^x}{1+x^2}$.

Enfin $y(0) = 0 \Rightarrow 0 = K+1 \Rightarrow K = -1$.

et donc $\boxed{y(x) = \frac{-1+e^x}{1+x^2}}$