
Outils mathématiques 1 : DS — Novembre 2017

Durée : 1h30. Merci de répondre directement et uniquement sur cette liasse.

Toutes les questions sont indépendantes. Calculatrice et formulaire A4 recto-verso manuscrit autorisés.

NOM :

GROUPE :

NOTE :

/20

1. Géométrie et nombres complexes

1.1 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère le point $A(2; 2; 1)$ et la droite \mathcal{D} passant par le point $B(1; 2; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (3; 1; 0)$. Calculer la distance d entre le point A et la droite \mathcal{D} . (1,5 pt)

1.2 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, on considère :

— \mathcal{D} la droite d'équation complexe $z(t) = 2t - 1 + j(-t + 1)$, $t \in \mathbb{R}$;

— et la transformation T associée à la fonction complexe $f(z) = -jz + 1$.

(a) Déterminer l'équation cartésienne de \mathcal{D} . (1 pt)

(b) Déterminer la nature de la transformation T . (1 pt)

(c) Déterminer une équation complexe de \mathcal{D}' , image de \mathcal{D} par T . (1 pt)

2. Fonctions numériques

2.1 Déterminer la période de $\cos^2(2x)$ et celle de $\tan(x/6)$. (1 pt)

2.2 Déterminer le domaine de définition de la fonction : $g(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{2x^2 + 2x + 1}{x^2 + 4}\right)}$. (1,5 pt)

2.3 Étudier les branches infinies (ensembles de définition, limites, asymptotes et positions relatives) :

(a) de la fonction $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 7}{2x^2 + 1}$; (2,5 pt)

(b) de la fonction $g(x) = x - 2 \sin(x)$; (1 pt)

(c) et enfin de la fonction $h(x) = \frac{x^2 - x \ln(x)}{x^2 - 1}$. (2 pt)

2.4 Soit $f(x) = \frac{\cos(x - \pi)}{x + 1}$ et son graphe \mathcal{C}_f . Déterminer l'équation de T , tangente à \mathcal{C}_f en $x = 0$. (1,5 pt)

2.5 Soit la fonction $g(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$. Donner le domaine de définition de g et étudier son prolongement par continuité en 0. (2 pt)

2.6 Étudier la continuité et la dérivabilité en 0 de $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ (2 pt)

2.7 Dériver les fonctions suivantes (on simplifiera les dérivées pour rendre possible une étude de signe, mais on ne fera pas l'étude de signe) :

(a) $f(x) = \frac{-x + 1}{(2x - 1)^2}$ (1 pt)

(b) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ (1 pt)