Outils mathématiques 1 : DS — Novembre 2017

Durée : 1h30. Merci de répondre directement et uniquement sur cette liasse.

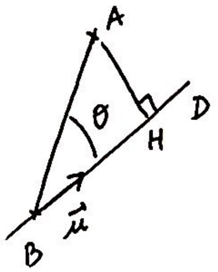
Toutes les questions sont indépendantes. Calculatrice et formulaire A4 recto-verso manuscrit autorisés.

NOM :	GROUPE :	NOTE :	/20

1. Géométrie et nombres complexes

1.1 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère le point $A(2;2;1)$ et la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $B(1;2;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (3;1;0)$. Calculer la distance d entre le point A et la droite $\mathcal{D}$. *(1,5 pt)*

$$d = AH = BA \sin\theta = \frac{\|\vec{BA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \quad \text{avec} \quad \|\vec{u}\| = \sqrt{10}$$



$$\text{et } \vec{BA} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \|\vec{BA} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{11}$$

$$\text{Ainsi } d = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{11}{10}} \rightarrow \boxed{d \simeq 1{,}05\,u}$$

1.2 Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, on considère :

— $\mathcal{D}$ la droite d'équation complexe $z(t) = 2t - 1 + j(-t+1)$, $t \in \mathbb{R}$;

— et la transformation T associée à la fonction complexe $f(z) = -jz + 1$.

(a) Déterminer l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$. *(1 pt)*

$$z = \underbrace{2t-1}_{x} + j\underbrace{(-t+1)}_{y} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2t-1 \\ y = -t+1 \end{cases} \Rightarrow -t = \frac{-x}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{D : y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{D : \quad x + 2y - 1 = 0}$$

(b) Déterminer la nature de la transformation T. *(1 pt)*

$$z \longrightarrow -jz \longrightarrow (-jz+1)$$

T est la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ $\left(-j = e^{-j\pi/2}\right)$ suivie de la translation de $\vec{i}$.

$$\boxed{T = T_{\vec{i}} \circ R(O; -\pi/2).}$$

(c) Déterminer une équation complexe de $\mathcal{D}'$, image de $\mathcal{D}$ par T. *(1 pt)*

$D' = \{M'(z') \,/\, z' = f(z)\}$ avec $z = 2t-1+j(-t+1)$

et $f(z) = -jz+1$

$\Rightarrow z' = -j(2t-1) \underbrace{-j\cdot j}_{+1}(-t+1)+1 = -t+1-j(2t-1)+1$

$\Rightarrow \boxed{z' = -t+2-j(2t-1).}$

2. Fonctions numériques

2.1 Déterminer la période de $\cos^2(2x)$ et celle de $\tan(x/6)$. *(1 pt)*

$\cos^2(2x) = \dfrac{1+\cos(4x)}{2}$ a pour période $\dfrac{2\pi}{4} = \boxed{\dfrac{\pi}{2} = T}$ 0,50

$\tan\left(\dfrac{x}{6}\right)$ a pour période $\dfrac{\pi}{1/6} = \boxed{6\pi = T}$ 0,50

2.2 Déterminer le domaine de définition de la fonction : $g(x) = \sqrt{\ln\left(\dfrac{2x^2+2x+1}{x^2+4}\right)}$. *(1,5 pt)*

g est définie $\Leftrightarrow \dfrac{2x^2+2x+1}{x^2+4} \geqslant 1$ car $\ln X \geqslant 0 \Leftrightarrow X \geqslant 1$

et $\sqrt{X}$ définie pour $X \geqslant 0$.

$\Rightarrow \dfrac{2x^2+2x+1-x^2-4}{x^2+4} \geqslant 0$ On cherche donc x tel que

toujours positif

$x^2+2x-3 \geqslant 0$.

$\Delta = 4-(-3)\times 4\times 1 = 16 = 4^2$.

Ainsi les racines du polynôme sont $\begin{cases} x_1 = \dfrac{-2-4}{2} = -3 \\ x_2 = \dfrac{-2+4}{2} = 1 \end{cases}$

Le trinôme est du signe de $1(x^2)$ à l'<u>extérieur</u> de ses racines.

Ainsi $\boxed{D_g =]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[}$

2.3 Étudier les branches infinies (ensembles de définition, limites, asymptotes et positions relatives) :

(a) de la fonction $f(x) = \dfrac{x^3+x^2+7}{2x^2+1}$; *(2,5 pt)*

$\mathcal{D}f = \mathbb{R}$ car $2x^2+1 \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$* \lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^3+x^2+7}{2x^2+1} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^3}{2x^2} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty \rightarrow$ peut-être une asymptote oblique ?

$m = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \boxed{\dfrac{1}{2} = m} \rightarrow$ direction asymptotique.

$p = \lim\limits_{+\infty} f(x) - \dfrac{x}{2} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\cancel{x^3}+x^2+7-\cancel{x^3}-\frac{x}{2}}{2x^2+1} = \boxed{\dfrac{1}{2} = p} \rightarrow$ asymptote $y = \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2}$ en $+\infty$.

Position relative : $\lim\limits_{+\infty} f(x) - \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\cancel{x^3}+\cancel{x^2}+7-\cancel{x^3}-x/2-\cancel{x^2}-1/2}{2x^2+1}$

$= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{-x+13}{2(2x^2+1)} = 0^-$

$\boxed{D : y = \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2} \text{ est asymptote oblique à } \mathcal{C}f \text{ en } +\infty \text{ et } D \text{ est au-dessus de } \mathcal{C}f.}$

$* \lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{2}$. De plus $p = \lim\limits_{-\infty} f(x) - \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}$.

En effet, les calculs sont les mêmes.

En revanche $\lim\limits_{-\infty} f(x) - \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2} = \lim\limits_{-\infty} \dfrac{-x+13}{2(2x^2+1)} = 0^+$.

$\boxed{D : y = \dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2} \text{ est asymptote oblique à } \mathcal{C}f \text{ en } -\infty \text{ et } \mathcal{C}f \text{ est au-dessus de } D.}$

(b) de la fonction $g(x) = x - 2\sin(x)$; *(1 pt)*

$\mathcal{D}g = \mathbb{R}$

$\lim\limits_{+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 1 = m$.

En revanche $\lim\limits_{+\infty} g(x) - x = \lim\limits_{+\infty} -2\sin x$ n'existe pas.

Il en va de même en $-\infty$ où $\lim\limits_{-\infty} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{g(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{-\infty} g(x) - x$ n'existe pas.

$\boxed{\text{Ainsi } \mathcal{C}g \text{ a une direction asymptotique } m = 1 \text{ en } \pm\infty \text{ ou } y = x}$

(c) et enfin de la fonction $h(x) = \dfrac{x^2 - x\ln(x)}{x^2-1}$. *(2 pt)*

$\mathcal{D}h = \mathbb{R}^{+*} \setminus \{1\} =]0;1[\cup]1;+\infty[$.

$* \lim\limits_{0} h(x) = \lim\limits_{0} \dfrac{x^2 - \underbrace{x\ln x}_{\to 0}}{x^2-1} = 0 \to$ $\boxed{\text{pas de branche infinie en } 0.}$

$* \lim\limits_{+\infty} h(x) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2\left(1 - \underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\to 0}\right)}{x^2\left(1-\underbrace{1/x^2}_{\to 0}\right)} = 1^{-}$

En $+\infty$: $* \ln x > 1 \Rightarrow \dfrac{\ln x}{x} > \dfrac{1}{x^2}$

$* \dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{x^2}$

$\Rightarrow 1 - \dfrac{\ln x}{x} < 1 - \dfrac{1}{x^2}$

$\boxed{\text{D: } y=1 \text{ est asymptote horizontale à } \mathcal{C}h \text{ en } +\infty. \text{ De plus D est au dessus de } \mathcal{C}h.}$

$* \lim\limits_{1} h(x) = \lim\limits_{1} \dfrac{\overbrace{x^2 - x\ln x}^{\to 1}}{\underbrace{x^2-1}_{\infty}}$ Il faut étudier en 1^- et en 1^+.

$\lim\limits_{1^+} h(x) = \lim\limits_{1^+} \dfrac{x^2 - x\ln x}{\underbrace{x^2-1}_{\to 0^+}} = +\infty$

et $\lim\limits_{1^-} h(x) = -\infty$

$\boxed{\text{D}': x=1 \text{ est asymptote verticale à } \mathcal{C}h.}$

2.4 Soit $f(x) = \dfrac{\cos(x-\pi)}{x+1}$ et son graphe $\mathcal{C}_f$. Déterminer l'équation de T, tangente à $\mathcal{C}_f$ en $x=0$. *(1,5 pt)*

$T: \quad y = f'(0)(x-0) + f(0)$ avec $f(0) = \cos(-\pi) = -1$

$f'(x) = \dfrac{-\sin(x-\pi)(x+1) - \cos(x-\pi).1}{x+1} \Rightarrow f'(0) = \dfrac{-1 \overbrace{\sin(-\pi)}^{0} - \cos(-\pi)}{1} = 1.$

Finalement $T: y = 1(x) - 1 = x - 1.$

$\boxed{T: y = x-1}$

2.5 Soit la fonction $g(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$. Donner le domaine de définition de g et étudier son prolongement par continuité en 0. *(2 pt)*

$\mathcal{D}g = \mathbb{R} \setminus \{k\pi ;\ k \in \mathbb{Z}\}$.

$\lim\limits_{0} g(x) = \lim\limits_{0} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \lim\limits_{0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = « \frac{0}{0} » \rightarrow$ L'Hospital

$= \lim\limits_{0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = « \frac{0}{0} » \rightarrow$ L'Hospital

$= \lim\limits_{0} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0$.

g est prolongeable en 0. Soit $\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq k\pi \ k \in \mathbb{Z}. \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

2.6 Étudier la continuité et la dérivabilité en 0 de $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ *(2 pt)*

Continuité : $\lim\limits_{0} f(x) = \lim\limits_{0} \underbrace{x^2}_{0} \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{bornée}} = 0 = f(0)$

Donc f est continue en 0.

Dérivabilité : $\lim\limits_{0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) - 0}{x - 0}$

$= \lim\limits_{0} \underbrace{x}_{0} \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{bornée}} = 0$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

2.7 Dériver les fonctions suivantes (on simplifiera les dérivées pour rendre possible une étude de signe, mais on ne fera pas l'étude de signe) :

(a) $f(x) = \dfrac{-x+1}{(2x-1)^2}$ *(1 pt)*

$$f'(x) = \frac{-1(2x-1)^2 - (-x+1)\cdot 2\cdot(2x-1)\cdot 2}{(2x-1)^4}$$

$$= \frac{-1(4x^2-4x+1) - 4(-2x^2+x+2x-1)}{(2x-1)^4}$$

$$= \frac{-4x^2+4x-1+8x^2-12x+4}{(2x-1)^4}$$

$$= \boxed{\frac{4x^2-8x+3}{(2x-1)^4} = f'(x)} \quad \text{ou bien} \quad \boxed{f'(x) = \frac{2x-3}{(2x-1)^3}}$$

(b) $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ *(1 pt)*

$f = u \circ v \circ w(x)$ avec $u(x) = \ln x \longrightarrow u'(x) = \dfrac{1}{x}$

$v(x) = \sqrt{x} \longrightarrow v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$w(x) = \dfrac{1+x}{1-x} \Rightarrow w'(x) = \dfrac{2}{(1-x)^2}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2\cdot\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \boxed{\frac{1}{1-x^2} = f'(x)}$$

$\boxed{\text{ou bien}}$ $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{2}{(1-x)^2}\,\dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{1}{(1-x)(1+x)}$

$$= \frac{1}{1-x^2} = f'(x).$$