Outils mathématiques 1 - DS mi-semestre - Octobre 17

Merci de répondre directement et uniquement sur cette feuille. Durée : 40 min.
Calculatrice et formulaire A4 recto-verso manuscrit autorisés.

NOM : **GROUPE :** **NOTE :** /8

---

1. Calculer $(-1+j\sqrt{3})^7$.

$z = -1 + j\sqrt{3}$ $\quad |z| = 2 \quad \theta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow z = 2e^{j2\pi/3}$

Donc $z^7 = 2^7 e^{j14\pi/3} = 128\, e^{j2\pi/3}$

1

2. On place une masse de 2 kg en $A(1;-1)$, $B(2;-2)$ et $C(3;0)$. Déterminer les coordonnées du point D où doit être placée une masse de 3 kg pour que le barycentre de $ABCD$ soit en O.

Je cherche D / $2\vec{OA} + 2\vec{OB} + 2\vec{OC} + 3\vec{OD} = 0$

1 $\quad \Rightarrow \vec{OD} = -\frac{1}{3}(2\vec{OA} + 2\vec{OB} + 2\vec{OC}) \Rightarrow \vec{OD} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(2+4+6) \\ -\frac{1}{3}(-2-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\rightarrow D\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Déterminer une équation cartésienne du plan Π passant par $A(1;2;1)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u} = (1;1;1)$ et $\vec{v} = (0;2;-1)$.

$\Pi = \{ M(x;y;z) / \vec{AM}, \vec{u}, \vec{v}$ soient coplanaires $\}$. Je cherche donc $M / [\vec{AM}; \vec{u}; \vec{v}] = 0$.

1 $\quad 0 = \vec{AM} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$ avec $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{AM} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix} = 0 = -3x + 3 + y - 2 + 2z - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{-3x + y + 2z - 1 = 0}$

4. Soient les points $A(1;2;1)$, $B(2;1;1)$ et $C(0;1;0)$.

(a) Calculer l'aire du triangle ABC.

0,50 $\quad \mathcal{A} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{6} \simeq \boxed{1{,}22\,u^2 \simeq \mathcal{A}}$

(b) Calculer le volume du parallélépipède construit par les vecteurs $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ et $\vec{OC}$.

$V = |[\vec{OA}, \vec{OB}; \vec{OC}]| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \right| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = -1 + 2 = 1u^3$

0,50

$\boxed{V = 1u^3}$

(c) Déterminer un vecteur $\vec{n}$ qui soit normal au plan formé par le triangle et unitaire.

On prend $\vec{n} = \cancel{k}. \dfrac{\vec{AB}\wedge\vec{AC}}{\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \to \vec{n} = \begin{pmatrix}\sqrt{6}/6\\ \sqrt{6}/6\\ -\sqrt{6}/3\end{pmatrix}$

0,50

(d) Déterminer des équations paramétriques de la droite (AB).

0,50

$x = (1-t)\,x_A + t x_B = (1-t).1 + t.2 = \boxed{t+1 = x}$

$y = (1-t)\,2 + t.1 = \boxed{-t+2 = y}$

$z = (1-t)\,1 + t.1 = \boxed{1 = z}$

5. Soit $f(x) = x^3 - 3x - 2$ et son graphe C_f. Déterminer les coordonnées du centre de symétrie de C_f.

1

Je cherche $\Omega(\alpha;\beta)$ avec $f(x) = 2\beta - f(2\alpha - x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$f(2\alpha - x) = (2\alpha - x)^3 - 3(2\alpha - x) - 2 = 8\alpha^3 - 12\alpha^2 x + 6\alpha x^2 - x^3 - 6\alpha + 3x - 2$

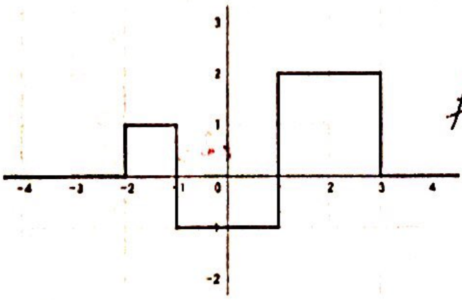
$= -x^3 + 6\alpha x^2 + (3 - 12\alpha^2)x + 8\alpha^3 - 6\alpha - 2$

$\Rightarrow 2\beta - f(2\alpha - x) = x^3 - 6\alpha x^2 + (12\alpha^2 - 3)x + (2 + 6\alpha - 8\alpha^3 + 2\beta) = x^3 - 3x - 2$.

$\Rightarrow \begin{cases} -6\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0. \\ 12\alpha^2 - 3 = 3 \to \alpha = 0 \\ 2 + 6\alpha - 8\alpha^3 + 2\beta = -2 \end{cases} \Rightarrow \beta = -2 \Rightarrow \Omega(0;-2)$

6. En utilisant la fonction de Heaviside, établir l'équation du graphe reporté ci-dessous.

1



$f(x) = \theta(x+2) + (-2)\theta(x+1) + 3\,\theta(x-1) + (-2)\theta(x-3)$

$f(x) = \theta(x+2) - 2\theta(x+1) + 3\theta(x-1) - 2\theta(x-3)$.

7. On considère les fonctions :

1

$\boxed{\dfrac{x^2+4}{x^3+x}}$; $\cancel{x^2+\dfrac{1}{x}}$; $x^2+\dfrac{1}{x^2}$; $\boxed{x^3+\dfrac{1}{x}}$; $\cancel{\dfrac{x^3+x}{x-1}}$

$\dfrac{x^2-1}{x^4+1}$; $\boxed{\dfrac{\sin(3x)}{1+x^2}}$; $\dfrac{\sin(x^2)}{1+x^2}$; $\cancel{\dfrac{\sin(x)}{1+x}}$; $\boxed{x\exp(x^2)}$

(a) Entourer (avec un ovale) les fonctions paires *(0,5 pt, −0,25 pt par fonction manquante)*.

(b) Encadrer (avec un rectangle) les fonctions impaires *(0,5 pt, −0,25 pt par fonction manquante)*.