Université de Montpellier - 2020/2021 L2 EEA - HLMA306

Devoir surveillé n° 3 du 30/11/2020 - Durée : 1h10

NOM, Prénom : CORRIGÉ, rapide

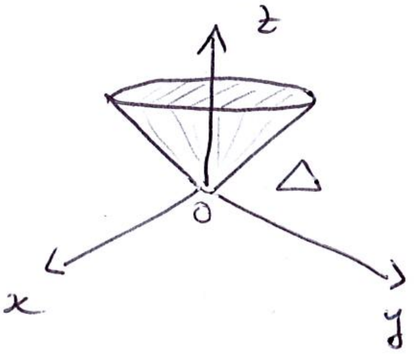
- Documents et calculatrices non autorisés. Barème indicatif
- **Toutes les réponses doivent être justifiées et les résultats soulignés.**

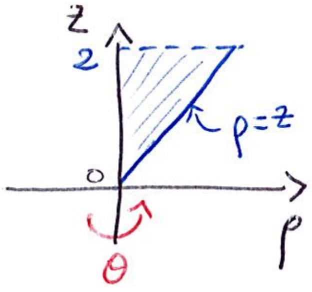
Répondez **uniquement dans les cases** de cet énoncé. Si vous manquez de place, continuez au verso.

Exercice 1. (3 pts) Calculer le volume du cône de $\boldsymbol{R}^3$, d'origine $\boldsymbol{O}$, d'axe de révolution $\mathbf{0z}$, d'angle d'ouverture $\pi/4$ par rapport à cet axe, et de hauteur $\mathbf{2}$.

En coordonnées cylindriques, le cône Δ s'écrit $\Delta = \{(\rho, \theta, z) \mid \theta \in [0, 2\pi[\,, 0 \leq z \leq 2, 0 \leq \rho \leq z\}$

(on a $0 \leq \rho \leq z \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = z$)





Ainsi, $V := \iiint_{\Delta} dx\,dy\,dz$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dz \left(\int_0^z \underline{\rho}\, d\rho \right)$$

$$= 2\pi \int_0^2 \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^z dz = \pi \int_0^2 z^2\, dz$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left[z^3\right]_0^2 = \underline{\frac{8\pi}{3}}$$

Exercice 2. (5 pts) On considère le domaine $\boldsymbol{\Delta} = \{(x, y, z) \in \boldsymbol{R}^3, \quad x^2+y^2 \leq z, \quad 0 \leq z \leq 1\}$.

a) Caractériser géométriquement $\boldsymbol{\Delta}$, et le dessiner.

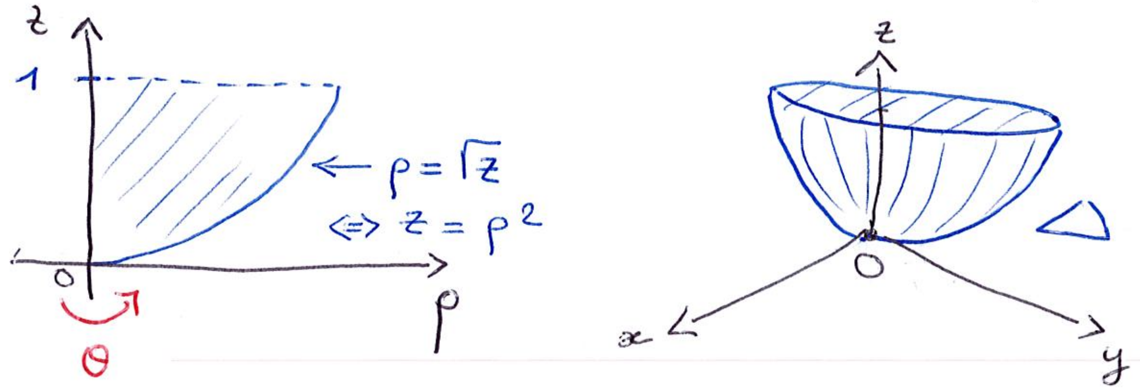
b) Calculer son volume $\boldsymbol{V}$.

c) Calculer la hauteur z_G de son centre de gravité $\boldsymbol{G}$ sur l'axe $\boldsymbol{0z}$, donnée par la formule : $z_G = \frac{1}{V} \iiint_{\Delta} z\, dx\, dy\, dz$.

(a) En coordonnées cylindriques, avec $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, Δ s'écrit :

$$\Delta = \left\{(\rho, \theta, z) \mid \theta \in [0, 2\pi[\ ,\ 0 \leq z \leq 1,\ \rho \leq \sqrt{z}\right\}$$

On peut donc le dessiner en "coupe ρ, z" :



C'est une paraboloïde, un "bol".

(b) $$V := \iiint_{\Delta} dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dz \left[\int_0^{\sqrt{z}} \underline{\rho}\, d\rho\right]$$

$$= 2\pi \int_0^1 \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{z}} = \frac{2\pi}{2} \int_0^1 z\, dz = \frac{\pi}{2}$$

(c) $$z_G := \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dz\, (z) \left[\int_0^{\sqrt{z}} \underline{\rho}\, d\rho\right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \times 2\pi \times \int_0^1 \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{z}} z\, dz = 2 \int_0^1 z^2 dz = \underline{\frac{2}{3}}$$

Exercice 3. (4 pts)

On considère le domaine $\boldsymbol{\Delta} = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2 \leq \mathbf{36}\,,\ x \geq \mathbf{0}\,, y \geq \mathbf{0}\,, z \geq \mathbf{0}\Big\}$.

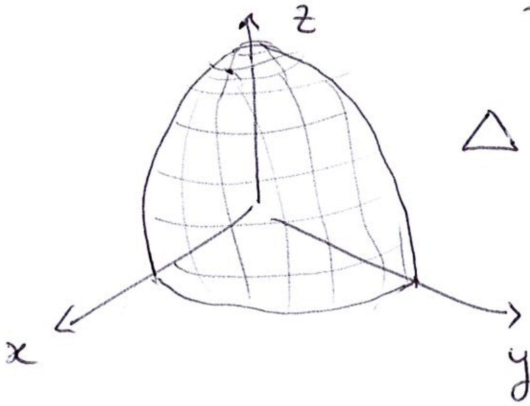
a) Caractériser géométriquement $\boldsymbol{\Delta}$, et le dessiner.

b) Calculer son volume $\boldsymbol{V}$ en utilisant les coordonnées sphériques .

NB : On rappelle au que l'élément d'intégration est $\boldsymbol{r^2 \cos(\varphi)\, dr d\theta d\varphi}$.

(a) $x^2+y^2+z^2 \leq 6^2$ est l'équation de la boule de centre O et de rayon 6.

On a ainsi, dans le quadrant $\{x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$, un huitième de boule



Δ

- La longitude θ va de 0 à $\frac{\pi}{2}$
- La latitude φ va de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

(b) $V := \iiint_\Delta dx\,dy\,dz$. En sphériques,

$$V = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^6 \underline{r^2 \cos\varphi}\; dr$$

$$= \frac{\pi}{2} \times \Big[\sin\varphi\Big]_0^{\pi/2} \times \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^6 = \dots = \underline{36\pi}$$

<u>Rem</u> : $V = \frac{1}{8} \times \frac{4}{3}\pi 6^3$ (géométriquement)

$= 36\pi$

Exercice 4. (4 pts)
Résoudre l' équation différentielle avec condition initiale : $y'(x) + y(x) = e^{-x}x^5$, et $y(0) = 1$.

* Solution de l'équation homogène :

$$y_H(x) = \lambda e^{-\int 1\,dx} = \boxed{\lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

** Solution particulière :

Avec la méthode de Lagrange, on pose

$y_0(x) = \lambda(x)e^{-x}$.

En remplaçant dans (E), cela donne :

$$\lambda'(x)e^{-x} + \{\underbrace{\lambda(x)e^{-x}(-1) + \lambda(x)e^{-x}}_{0}\} = e^{-x}x^5$$

D'où $\lambda'(x) = x^5$ (en divisant par $e^{-x} > 0$)

et ainsi $\lambda(x) = \frac{x^6}{6}$, puis $\boxed{y_0(x) = \frac{x^6}{6}e^{-x}}$

*** La solution générale est donc

$$y(x) = y_H(x) + y_0(x) = \boxed{\lambda e^{-x} + \frac{x^6}{6}e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}}$$

*** Avec la condition initiale $y(0) = 1$,

on a $\lambda + 0 = 1$, d'où $\lambda = 1$ et

$$\boxed{y(x) = e^{-x}(1 + x^6/6)}$$

Exercice 5. (4 pts) Résoudre l' équation différentielle : $y'' - 5y' + 4y = 8x + 6$.

* Pour la solution de l'équation homogène, on résout d'abord l'équation caractéristique :

$$(C)\quad r^2 - 5r + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (r-1)(r-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \text{ou} \\ r = 4 \end{cases}$$

D'où $\boxed{y_H(x) = \lambda e^{x} + \mu e^{4x} \ ; \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$

** Pour la solution particulière, on la cherche sous la forme $y_0(x) = ax + b$.

En remplaçant dans (E) :

$$\{0\} - 5\{a\} + 4\{ax+b\} = 8x+6$$

$$\Leftrightarrow [4ax] + [-5a+4b] = 8x+6$$

En identifiant, on a donc le système :

$$\begin{cases} 4a = 8 \\ -5a+4b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y_0(x) = 2x+4}$$

*** La solution générale est donc

$$y(x) = y_H(x) + y_0(x) = \boxed{\lambda e^{x} + \mu e^{4x} + (2x+4)}$$

$(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$