Université de Montpellier - 2019/2020 **L2 EEA - HLMA306**

Devoir surveillé n° 3 du 25/11/2019 - Durée : 1h15

NOM, Prénom : CORRIGE RAPIDE

- Documents et calculatrices non autorisés. Barème indicatif
- **Toutes les réponses doivent être justifiées et les résultats soulignés.**

Répondez **uniquement dans les cases** de cet énoncé. Si vous manquez de place, continuez au verso.

Exercice 1. (3 pts) Calculer le volume du cône de $\mathbb{R}^3$, d'origine $\boldsymbol{O}$, d'axe de révolution $\mathbf{0}\boldsymbol{z}$, d'angle d'ouverture $\boldsymbol{\pi/6}$ par rapport à cet axe, et de hauteur $\mathbf{1}$.

En coordonnés cylindriques (après avoir fait un dessin et détaillé les paramètres du cône $\boldsymbol{\Delta}$), on a

$$\boldsymbol{Volume(\Delta) = \iiint_{\Delta} dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dz \int_0^{z\tan\pi/6} \rho d\rho = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2}(z/\sqrt{3})^2 dz = \pi/9}$$

Exercice 2. (5 pts) On considère le domaine $\boldsymbol{\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^2+y^2 \leq z^4, \quad 0 \leq z \leq 1\}}$.
a) Dessiner et caractériser géométriquement $\boldsymbol{\Delta}$.
b) Calculer son volume $\boldsymbol{V}$.
c) Calculer la hauteur $\boldsymbol{z_G}$ de son centre de gravité $\boldsymbol{G}$ sur l'axe $\boldsymbol{0z}$, donnée par la formule :
$\boldsymbol{z_G = \frac{1}{V} \iiint_\Delta z\, dx\, dy\, dz}$.

a) En coordonnés cylindriques, on détaille les paramètres de $\boldsymbol{\Delta}$:
$\boldsymbol{\Delta = \{(\rho,\theta,z); \quad \theta \in [0,2\pi[, \quad \rho \leq z^2, \quad 0 \leq z \leq 1\}}$.
Ce domaine ressemble donc à une toupie de révolution autour de $\boldsymbol{Oz}$.

b) On a donc

$$\boldsymbol{V = \iiint_\Delta dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dz \int_0^{z^2} \rho d\rho = 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} z^4 dz = \pi/5}$$

c) Par calcul direct

$$\boldsymbol{z_G = \frac{1}{\pi/5} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 z dz \int_0^{z^2} \rho d\rho = \frac{5}{\pi} 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} z^5 dz = 5/6}$$

Exercice 3. (4 pts)
Pour $R > 0$, on considère le domaine $\Delta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, \quad z \geq 0\}$.
a) Dessiner et caractériser géométriquement Δ.
b) Donner son volume V sans faire obligatoirement de calcul.
c) Calculer la hauteur z_G de son centre de gravité G sur l'axe $0z$, donnée par la formule :
$z_G = \frac{1}{V} \iiint_\Delta z\, dx\, dy\, dz$. (On rappellera au tableau les éléments d'intégration.)

a) C'est bien sûr la demi-boule supérieure $B(O, R)$ ("hémisphère nord").

b) $V = \dfrac{1}{2}\dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{2}{3}\pi R^3$ est une formule bien connue (que l'on retrouve directement avec les coordonnées sphériques).

c) Avec les coordonnées sphériques, sachant que $z = r \sin\varphi$, et que le Jacobien est $r^2 \cos\varphi$ on obtient :

$$z_G = \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{3}{2\pi R^3} \frac{2\pi R^4}{4} \frac{1}{2} [\sin^2\varphi]_0^{\pi/2} = \frac{3R}{8}.$$

Exercice 4. (4 pts)
Résoudre l' équation différentielle avec condition initiale : $\boldsymbol{y'(x) - 2\,y(x) = e^{2x}x^2}$, et $\boldsymbol{y(0) = 0}$.

Voir TD.

Exercice 5. (4 pts) Résoudre l' équation différentielle : $\boldsymbol{y'' - 3y' + y = x}$.

Voir TD.