UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **Année 2018-2019**
FACULTÉ DES SCIENCES

L2 - Techniques mathématiques EEA - HLMA306

Devoir surveillé n° 3 – 26/11/2018 – **Corrigé rapide**

Exercice 1

(2 pts) Calculer $I = \iint_{[a,b]\times[c,d]} (x+y)\, dx\, dy$.

$$I = \iint_{[a,b]\times[c,d]} x\, dx\, dy + \iint_{[a,b]\times[c,d]} y\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_a^b x\, dx\right) dy + \int_a^b \left(\int_c^d y\, dy\right) dx$$

$$= (d-c)\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b + (b-a)\left[\frac{y^2}{2}\right]_c^d = \frac{1}{2}(d-c)(b^2-a^2) + \frac{1}{2}(b-a)(d^2-c^2).$$

Exercice 2

(3 points) Calculer la surface S de la partie Δ du plan délimité par les portions de courbes d'équations $\{x^4 - y = 0\}$ et $\{x - y^4 = 0\}$.

Le domaine Δ est délimité par les portions de courbes d'équations $\{y = x^4\}$ et $\{y = x^{1/4}\}$ qui se coupent en $(0,0)$ et $(1,1)$ - faire un dessin. La surface S est donc donnée par l'intégrale suivante (découpage par tranches verticales) :

$$S = \iint_\Delta dxdy = \int_0^1 \left(\int_{x^4}^{x^{1/4}} dy\right) dx = \int_0^1 (x^{1/4} - x^4)\, dx = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

Exercice 3

(4 pts) On considère le domaine $\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad 0 \le z \le \pi, \quad x^2 + y^2 \le \sin^2(z)\}$.

a) Dessiner Δ.

Voir TD. On peut dessiner Δ en coupe, avec les coordonnés cylindriques : $\Delta = \{(\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi[\times \mathbb{R},\ 0 \le z \le \pi,\ \rho \le \sin(z)\}$ correspond à un solide de révolution autour de l'axe Oz ayant pour section une arche de sinusoide.

b) Calculer son volume V.

$$V = \iiint_\Delta dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi dz \left(\int_0^{\sin z} \rho d\rho\right) = 2\pi \int_0^\pi \frac{\sin^2 z}{2} dz = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi (1 - \cos 2z)\, dz = \frac{\pi^2}{2}.$$

Exercice 4

(4 pts) Résoudre l' équation différentielle : $y' - 2y = 4$, avec $y(0) = 0$.

La solution de l' équation homogène est $y_H(x) = \lambda e^{2x}$; $\lambda \in \mathbb{R}$.
Une solution particulière évidente est $y_0(x) = -2$.
L'ensemble des solutions est donc $y(x) = \lambda e^{2x} - 2$; $\lambda \in \mathbb{R}$.
Avec la condition initiale $y(0) = 0$ on trouve $\lambda = 2$, et donc $y(x) = 2e^{2x} - 2$.

Exercice 5

(4 pts) Résoudre l' équation différentielle : $y'' - 3y' + y = x$.

Identique au TD.

La solution de l' équation homogène est $y_H(x) = \lambda e^{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)x} + \mu e^{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)x}$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Une solution particulière est $y_0(x) = x + 3$. On la trouve en cherchant y_0 sous la forme $y_0(x) = ax + b$.

L'ensemble des solutions est donc $\lambda e^{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)x} + \mu e^{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)x} + (x+3)$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercice 6

(3 pts) Résoudre l' équation différentielle : $y' - y^2 \cos x = \cos x$.

L'équation est à variables séparés car on peut l'écrire $\dfrac{y'}{1+y^2} = \cos x$.
En intégrant de part et d'autre, on obtient : $\arctan y(x) = \sin x + C$; $C \in \mathbb{R}$.
D'où la solution : $y(x) = \tan(\sin x + C)$; $C \in \mathbb{R}$.