DS2 - 2021 / Corrigé

Ex1

(1) $F(x) \overset{(DR)}{=} \underline{\arctan(\ln|x|)}$

(2) $G(x) \overset{(DR)}{=} \underline{\arctan(\sin x)}$

("DR" = dérivée remarquable.)

Ex2

$$H \overset{(IPP)}{=} \left[x^2 \frac{e^{-x}}{-1}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{\infty} 2x \left(\frac{e^{-x}}{-1}\right) dx$$

("IPP" = intégration par parties)

$$\overset{(*)}{=} \underline{0} + 2\int_0^{+\infty} x\, e^{-x}\, dx$$

(*) (croissance comparée)

$$\overset{(IPP)}{=} 2\left\{\left[x\, \frac{e^{-x}}{-1}\right]_0^{\infty} - \int_0^{+\infty} 1 \cdot \left(\frac{e^{-x}}{-1}\right) dx\right.$$

$$\overset{(*)}{=} 2\left\{\underline{0} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx\right\} = 2\left[\frac{e^{-x}}{-1}\right]_0^{\infty} = 2(0-(-1))$$

$$= \underline{2}$$

(le résultat doit être >0 !)

Ex3

* $x^4 = (x^2+4)\,x^2 - 4x^2$

$= (x^2+4)\,x^2 - 4\,(x^2+4) + 16$

$$\Rightarrow \frac{x^4}{x^2+4} = \left[x^2-4\right] + \frac{16}{x^2+4} \quad \text{(division euclidienne)}$$

(ou dire : $x^4 = x^4 - 16 + 16 = (x^2-4)(x^2+4) + 16 \ldots$)

** $I(x) = \dfrac{x^3}{3} - 4x + \dfrac{16}{4}\displaystyle\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}$

$$\overset{(DR)}{=} \frac{x^3}{3} - 4x + 4\times\left[2\times \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)\right] \quad \left(\text{ou poser } y = \frac{x}{2}\right)$$

$$= \underline{\frac{x^3}{3} - 4x + 8\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Ex 4 $J \overset{(DR)}{=} \left[-\frac{1}{3}\cos^3 x\right]_0^{\pi/3} = \frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right] = \boxed{\frac{7}{24}}$

(C'est une dérivée remarquable)

Ex 5 $K = \int_1^2 (2x)\,dx \int_{-4}^{4} dy + 5\int_1^2 dx \int_{-4}^{4} y^5\,dy$ $\left\{\begin{array}{l}\text{linéarité}\\ +\\ \text{intégrale sur un rectangle}\\ +\\ \text{variables séparées}\end{array}\right.$

$= \left[x^2\right]_1^2 \times 8 + 5\times 0 = 3\times 8 = \boxed{24}$

(Car $\int_{-4}^{4} dy = 4-(-4) = 8$, et $y \to y^5$ est impaire)

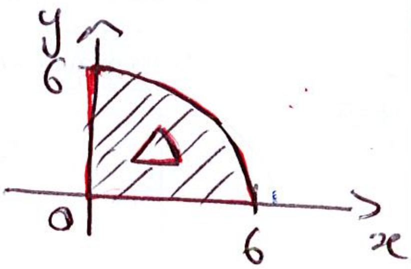
Ex6 $L = \int_1^2 dx\left(\int_0^1 y^x\,dy\right) = \int_1^2 \left[\frac{y^{x+1}}{x+1}\right]_{y=0}^{y=1} dx$

$= \int_1^2 \frac{1}{x+1}\,dx = \left[\ln(x+1)\right]_1^2 = \boxed{\ln\frac{3}{2}}$

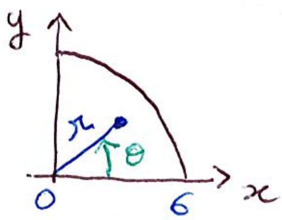
Rem : intégrale sur un rectangle. A intégrer d'abord % y !

Ex7 1. $x^2+y^2 \leq 6^2$ est l'équation du disque de centre $(0,0) = O$, et de rayon $R = 6$.

Δ est donc le quart de disque du quadrant $\{x \geq 0,\ y \geq 0\}$



2. $\text{Aire}(\Delta) := \iint_\Delta dx\,dy \overset{(Pol.)}{=} \int_0^{\pi/2}\int_0^6 r\,dr\,d\theta$



$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^6 = \boxed{9\pi}$ $\left(= \frac{1}{4}\times\pi 6^2\right.$ géométriquement$\left.\right)$.

$(0 \leq \theta \leq \pi/2$ et $0 \leq r \leq 6)$