UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **Année 2019-2020**
FACULTÉ DES SCIENCES

L2 - Techniques mathématiques EEA - HLMA306

Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 2 – 4/11/2019 – Corrigé *rapide*

Exercice 1

(4 points) Déterminer les primitives suivantes :

1. $F(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{x \ln |x|}$
2. $G(x) = \displaystyle\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$
3. $H(x) = \displaystyle\int x^2 \ln |x| dx$
4. $I(x) = \displaystyle\int \frac{dx}{16 + x^2}$

Comme en TD, on obtient (à une constante près) :

1. Par dérivée remarquable (DR), $F(x) = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln |x|} dx = \ln |\ln |x||$.

2. Par DR, $G(x) = \int \frac{(\sin x)'}{1+\sin^2 x} dx = \arctan(\sin x)$.

3. Par IPP, $H(x) = \frac{x^3}{3} \ln(|x|) - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln(|x|) - \frac{x^3}{9}$.

4. Par DR (ou CV), $I(x) = \frac{1}{16} \int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{4}\right)^2} = \frac{1}{4} \arctan\left(\frac{x}{4}\right)$.

Exercice 2

(4 points) Calculer l'intégrale J suivante :

1. En utilisant uniquement des changements de variable.
2. En utilisant directement une interprétation géométrique.

$$J = \int_0^5 \sqrt{25 - x^2}\, dx$$

1. $J = 5 \int_0^5 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{5}\right)^2}\, dx = 25 \int_0^1 \sqrt{1 - y^2}\, dy$, en posant $y = \frac{x}{5}$. En posant ensuite (comme en TD), $y = \sin t$, on obtient $J = \cdots = 25 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \cdots = 25 \frac{\pi}{4}$.
(On peut poser directement $x = 5 \sin t$.)

2. Le cercle de centre O et de rayon 5 a pour équation $x^2 + y^2 = 5^2$. Ce qui donne, pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$, $y = \sqrt{25 - x^2}$. I est ainsi l'aire située sous cette courbe et délimitée par $x = 0$ et $x = 5$ (faire un dessin). Elle vaut l'aire du quart de disque correspondant : $I = \frac{1}{4}\pi 5^2 = \frac{25\pi}{4}$.

Exercice 3

(3 points) Calculer l'intégrale suivante :

$$K = \int_0^\pi \cos^2 x \ \sin^2 x\, dx$$

Comme $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, on obtient $K = \int_0^\pi \frac{1}{4} \sin^2 2x\, dx$. Sachant que $2 \sin^2 t = 1 - \cos 2t$, on obtient $K = \frac{1}{4} \int_0^\pi \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)\, dx = \frac{1}{8} [x]_0^\pi \ dx - \frac{1}{8} \left[\frac{\sin 4x}{4}\right]_0^\pi = \frac{1}{8}\pi + 0 = \frac{\pi}{8}$. (cf. TD.)

Exercice 4
(5 points) Déterminer une primitive $L(x)$ de la fraction rationnelle $l(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 9}$

(cf. TD.)

(i). Une division euclidienne donne tout de suite $l(x) = \frac{(x^2-9)+9}{x^2-9} = 1 + \frac{9}{x^2-9}$.

(ii). On a la factorisation immédiate $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$.

(iii). Par la méthode du cache (ou une autre), on a la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{6}\frac{1}{x-3} - \frac{1}{6}\frac{1}{x+3}$$

(iv). La primitive est donc $L(x) = x + \frac{9}{6}(\ln|x-3| - \ln|x+3|) = x + \frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|$.

Exercice 5
(4 points) Calculer $M = \displaystyle\iint_{D(O,R)} \frac{1}{x^2+y^2+R^2}\, dx\, dy$, où $D(O,R)$ est le disque de centre O et de rayon R.

En passant en coordonnés polaires, on obtient : $M = \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{1}{r^2+R^2}\, r\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^R \frac{r}{r^2+R^2}\, dr$.

Par dérivée remarquable on a alors $M = 2\pi \left[\dfrac{1}{2}\ln(r^2+R^2)\right]_{r=0}^{r=R} = \pi\left(\ln(2R^2) - \ln(R^2)\right) = \pi \ln 2$.