UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **Année 2019-2020**
FACULTÉ DES SCIENCES

L2 - Techniques mathématiques EEA - HLMA306

Devoir surveillé n° 1 – 7/10/2019 – Corrigé **rapide**

Exercice 1
(8 points) Calculer de **deux manières** : **avec et sans** développement limité.

(a) La limite en $x = 0$ de la fonction $f(x) = \dfrac{(1+x)^{1/5} - 1}{x}$

- Sans DL : $\lim_{x \mapsto 0} f(x) := ((1+x)^{1/5})'(0) = \dfrac{1}{5}((1+x)^{-4/5})(0) = \dfrac{1}{5}$

- Avec DL : $f(x) = \dfrac{(1 + 1/5x + o(x)) - 1}{x} = \dfrac{1}{5} + o(1) \longrightarrow \dfrac{1}{5}$

(b) La limite en $x = -2$ de la fonction $g(x) = \dfrac{\sqrt{11+x} - 3}{x+2}$

- $l = \lim_{x \mapsto -2} \dfrac{(11+x) - 3}{(x+2)(\sqrt{11+x}+3)} = \lim_{x \mapsto -2} \dfrac{1}{\sqrt{11+x}+3} = \dfrac{1}{6}$ (Ou par dérivée, ou par l'Hôpital.)

- Avec DL : $g(x) = \dfrac{\sqrt{9+(x+2)} - 3}{x+2} = \dfrac{3\sqrt{1+(x+2)/9} - 3}{x+2} = \dfrac{3(1 + 1/2(x+2)/9 + o(x+2)) - 3}{x+2} = \dfrac{3}{18} + o(1) \longrightarrow \dfrac{1}{6}$

(c) La limite en $x = 0$ de la fonction $h(x) = \dfrac{\ln(1-x) + \sin x}{x^2}$

- En appliquant deux fois la règle de l'Hôpital on obtient :

$\lim_{x \mapsto 0} h(x) = \lim_{x \mapsto 0} \dfrac{-\frac{1}{1-x} + \cos x}{2x} = \lim_{x \mapsto 0} \dfrac{\frac{-1}{(1-x)^2} - \sin x}{2} = -\dfrac{1}{2}$

- Avec DL : $h(x) = \dfrac{(-x - x^2/2 + o(x^2)) + (x + o(x^2))}{x^2} = \dfrac{-1/2}{1} + o(1) \longrightarrow -\dfrac{1}{2}$

(d) La limite en $x = 0$ de la fonction $k(x) = \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{\sin^2 x}$

- En appliquant l'Hôpital et en utilisant $\lim_{x \mapsto 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ on a :

$\lim_{x \mapsto 0} k(x) = \lim_{x \mapsto 0} \dfrac{2xe^{x^2} + \sin x}{2\cos x \sin x} = \lim_{x \mapsto 0} \dfrac{e^{x^2}}{\cos x}\dfrac{x}{\sin x} + \dfrac{1}{2\cos x} = \dfrac{1}{1}(1)^{-1} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

- Avec DL : $k(x) = \dfrac{(1 + x^2 + o(x^2)) - (1 - x^2/2 + o(x^2))}{(x + o(x))^2} = \dfrac{3/2x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \dfrac{3/2 + o(1)}{1 + o(1)} \longrightarrow \dfrac{3}{2}$

Exercice 2
(4 points) Calculer les dérivées des fonctions suivantes à l'ordre indiqué :

(a) $f(x) = \tan(e^{x^2+1})$, à l'ordre 1

$f'(x) = \left(e^{x^2+1}\right)' \left(1 + \tan^2(e^{x^2+1})\right) = 2xe^{x^2+1}\left(1 + \tan^2(e^{x^2+1})\right)$

(b) $g(x) = 3^{2^x}$, à l'ordre 1

$g'(x) = \left(e^{2^x \ln 3}\right)' = (2^x \ln 3)'\, e^{2^x \ln 3} = \ln 3 \left(e^{x \ln 2}\right)' 3^{2^x} = \ln 3\, \ln 2\, e^{x \ln 2}\, 3^{2^x} = \ln 3\, \ln 2\, 2^x\, 3^{2^x}$

(c) $h(x) = \ln x$, à l'ordre 5

$h'(x) = x^{-1}$; $h''(x) = (-1)x^{-2}$; $h'''(x) = (-1)(-2)x^{-3}$; $h^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)x^{-4}$.
Ainsi, on obtient $h^{(5)}(x) = (-1)(-2)(-3)(-4)x^{-5} = 24/x^5$

Exercice 3

(3 points)

(a) Calculer la dérivée de $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ pour $x > 0$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \left(\frac{1}{x}\right)' \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$$

(b) En déduire la valeur de $f(x)$ pour $x > 0$.

$f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = cte$. Ainsi, pour tout $x > 0$, $f(x) = f(1) = 2\arctan 1 = \pi/2$.

Exercice 4

(5 points) Déterminer les développements limités suivants :

(a) $DL_2(0)$ de $f(x) = \dfrac{1}{2+e^x}$

$$f(x) = \frac{1}{2+1+x+x^2/2+o(x^2)} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{(1+x/3+x^2/6+o(x^2))}$$
$$= \frac{1}{3}\left(1-(x/3+x^2/6)+(x/3+x^2/6)^2+o(x^2)\right) = \frac{1}{3}\left(1-x/3-x^2/6+x^2/9+o(x^2)\right)$$
$$= 1/3 - x/9 - x^2/54 + o(x^2)$$

(b) $DL_4(0)$ de $g(x) = \cos(\sin x)$

$$g(x) = \cos(x - x^3/6 + o(x^4)) = 1 - (x-x^3/6)^2/2 + (x-x^3/6)^4/24 + o(x^4)$$
$$= 1 - (x^2 - x^4/3)/2 + x^4/24 + o(x^4) = 1 - x^2/2 + 5x^4/24 + o(x^4)$$