UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER **Année 2018-2019**
FACULTÉ DES SCIENCES

Licence L2 - Techniques mathématiques EEA (HLMA306)

Devoir surveillé n° 1 – 8/10/2018 – Corrigé **rapide**

Exercice 1
(3 points)
(a) Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

$\lim_{x\mapsto+\infty} \sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x\mapsto+\infty} \dfrac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\mapsto+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0.$

(b) Calculer la limite en $-\infty$ de la fonction $g(x) = \sqrt{x^2+1} + x$.

$\lim_{x\mapsto-\infty} \sqrt{x^2+1} + x \overset{(y=-x)}{=} \lim_{y\mapsto+\infty} \sqrt{y^2+1} - y = 0$, grâce à la question précédente.

Exercice 2
(3 points)
(a) Calculer la limite en $x=0$ de la fonction $f(x) = \frac{e^x - \cos x}{x}$

$\lim_{x\mapsto 0} f(x) := (e^x - \cos x)'(0) = (e^x + \sin x)(0) = 1$

(b) Calculer la limite en $x=0$ de la fonction $g(x) = \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x^2}$
En appliquant deux fois la règle de l'Hôpital on obtient :

$\lim_{x\mapsto 0} g(x) = \lim_{x\mapsto 0} \dfrac{\frac{1}{1+x} - \cos x}{2x} = \lim_{x\mapsto 0} \dfrac{\frac{-1}{(1+x)^2} + \sin x}{2} = -\dfrac{1}{2}$

Ces deux calculs sont également très rapides en utilisant les développements limités

Exercice 3
(4 points) Calculer les dérivées des fonctions suivantes :
(a) $f(x) = \tan\sqrt{x^2+1}$

$f'(x) = (\sqrt{x^2+1})' \left(1 + \tan^2\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \left(1 + \tan^2\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)$

(b) $g(x) = \ln|\cos x|$

$g'(x) = \dfrac{\cos' x}{\cos x} = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

(c) $h(x) = e^{2^x}$

$h'(x) = \left(e^{e^{x\ln 2}}\right)' = \left(e^{x\ln 2}\right)' e^{e^{x\ln 2}} = \ln 2\, e^{x\ln 2}\, e^{e^{x\ln 2}} = \ln 2\, 2^x\, e^{2^x}$

Exercice 4
(4 points) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 1 de $f(x) = \sqrt{4+x}$:
(a) En utilisant la formule de Taylor.

$f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x) = 2 + \dfrac{1}{4}x + o(x)$

(b) En se ramenant à la formule d'un développement limité usuel.

$f(x) = \sqrt{4(1+x/4)} = 2\sqrt{1+x/4} = 2(1 + 1/2(x/4) + o(x)) = 2 + \dfrac{1}{4}x + o(x)$

Exercice 5

(6 points) Déterminer les développement limités suivants :

(a) $DL_3(0)$ de $f(x) = \tan x$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - x^3/6 + o(x^3)}{1 - x^2/2 + o(x^3)} = (x - x^3/6 + o(x^3))(1 + x^2/2 + o(x^3))$$
$$= x + x^3/2 - x^3/6 + o(x^3) = x + x^3/3 + o(x^3)$$

(b) $DL_7(0)$ de $g(x) = \arctan x$

On a $g'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + o(x^6)$.

D'où $g(x) = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + o(x^7)$

(d) $DL_1(0)$ de $h(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+1+x+o(x)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(1+x/2+o(x))} = \frac{1}{2}(1 - x/2 + o(x)) = 1/2 - x/4 + o(x).$$