

Licence L2- Techniques mathématiques EEA

Devoir surveillé n° 1 – 5/10/2015 – Durée : 1h 30

Exercice 1

(4 points) Déterminer, si elle existe, la limite en  $a$  de la fonction  $f$  dans chacun des cas suivants :

(a)  $f(x) = \frac{1-\cos x}{x}$ ;  $a = 0$                       (b)  $f(x) = \sqrt{4x^2 + 2x - 1} - 2x + 3$ ;  $a = +\infty$   
(c)  $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ ;  $a = 0$ .

Exercice 2

(5 points) Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

(a)  $f(x) = x(x + \sqrt{1 + x^2})$ ;    (b)  $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$ ;

(c)  $f(x) = \ln^3 \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$ ;    (d)  $f(x) = x 2^x$ .

Exercice 3

(3 points) Sans utiliser de développement limité, calculer

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/3} - 1}{x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x} - 2}{x - 1}$

Exercice 4

(3 points) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de  $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$ .

Exercice 5

(5 points)

1. Redonner la formule de Taylor permettant de calculer le développement limité d'ordre  $n$  d'une fonction  $f$  en un point  $x = a$ .
2. Retrouver ainsi les développements limités suivants de  $\sin x$  et  $\cos x$  en  $x = 0$  :

(a)  $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$ ;    (b)  $\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^4)$ .

3. Calculer les limites de  $f$  et  $g$  en 0 :

(a)  $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ ;    (b)  $g(x) = \frac{e^x - \sin x - \cos x}{x^2}$ .