

Licence L2 - Techniques mathématiques EEA

Rattrapage du contrôle continu - 2 Mars 2018 - Durée : 2h  
Documents interdits. Calculatrice non programmable autorisée.

Devoir noté sur 40 points

*Les calculs et les méthodes utilisés devront être clairement justifiés.*

*Une importance particulière sera apportée à la présentation.*

*Les exercices devront être faits dans l'ordre, les étapes séparées, et les résultats soulignés.*

Exercice 1

(3 points) Calculer les limites suivantes :

(a)  $l_1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x} - 2}{x-1}$       (b)  $l_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

Exercice 2

(7 points)

1. Calculer les dérivées successives de la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \ln(1-x)$ .
2. Rappeler la formule de Taylor permettant de calculer le développement limité d'ordre  $n$  d'une fonction  $F$  au point  $x = 0$ .
3. En déduire le développement limité de  $f$  en 0 :  $f(x) = -x - x^2/2 - x^3/3 - \dots - x^n/n + o(x^n)$ .

Exercice 3

(6 points) Déterminer les primitives suivantes :

(a)  $\int \frac{1}{x(1+\ln^2(x))} dx$       (b)  $\int \frac{x^3}{x^2-4} dx$

Exercice 4

(6 points) Calculer de *deux manières différentes* les intégrales suivantes :

$I = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cos x \, dx$     et     $J = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x \, dx$ .

Exercice 5

(4 points) Calculer la surface de la partie  $\Delta$  du plan délimitée par les portions de courbes d'équations  $\{x^2 - y = 0\}$  et  $\{(x-1)^2 + y^2 = 1\}$ , pour  $x \in [0, 1]$  et  $y \geq 0$ .

Exercice 6

(3 points) Calculer  $\iint_{[1,2] \times [0,1]} y^x \, dx$ .

Exercice 7

(4 points) Soit  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx$ . Calculer  $I^2$  au moyen d'une intégrale double et en déduire  $I$ .

Exercice 8

(3 points) Résoudre l'équation différentielle :  $y' - 2y = 4$ , avec  $y(0) = 0$ .

Exercice 9

(4 points) Pour  $a, b, c \in \mathbb{R}$  donner les solutions possibles de l'équation différentielle :  $ay'' + by' + cy = 0$ .