Déduction automatique en logique du premier ordre classique

David Delahaye

Faculté des Sciences
David.Delahaye@lirmm.fr

Master M2 2018-2019

Méthode des tableaux

Un peu d'histoire

- Méthode plus ancienne que la résolution ;
- Introduite par les pionniers Hintikka et Beth (années 50) ;
- Perfectionnée ensuite par Smullyan et Fitting ;
- À partir du calcul des séquents de Gentzen sans coupure.

Principe

- Par réfutation sur la proposition initiale et par cas ;
- Avec ou sans variables libres (métavariables) ;
- Avec skolémisation ou ϵ-termes.

Méthode des tableaux

Règles de clôture et règles analytiques

$$\frac{\bot}{\odot}\ \odot_{\bot} \qquad \frac{\neg\top}{\odot}\ \odot_{\neg\top} \qquad \frac{P \qquad \neg P}{\odot}\ \odot$$

$$\frac{\neg\neg P}{P}\ \alpha_{\neg\neg} \qquad \frac{P \Leftrightarrow Q}{\neg P, \neg Q \mid P, Q}\ \beta_{\Leftrightarrow} \qquad \frac{\neg(P \Leftrightarrow Q)}{\neg P, Q \mid P, \neg Q}\ \beta_{\neg\Leftrightarrow}$$

$$\frac{P \wedge Q}{P, Q}\ \alpha_{\wedge} \qquad \frac{\neg(P \vee Q)}{\neg P, \neg Q}\ \alpha_{\neg\vee} \qquad \frac{\neg(P \Rightarrow Q)}{P, \neg Q}\ \alpha_{\neg\Rightarrow}$$

$$\frac{P \vee Q}{P \mid Q}\ \beta_{\vee} \qquad \frac{\neg(P \wedge Q)}{\neg P \mid \neg Q}\ \beta_{\neg\wedge} \qquad \frac{P \Rightarrow Q}{\neg P \mid Q}\ \beta_{\Rightarrow}$$

Méthode des tableaux

δ/γ-règles

$$\frac{\exists x.P(x)}{P(\epsilon(x).P(x))}\,\delta_{\exists} \qquad \frac{\neg\forall x.P(x)}{\neg P(\epsilon(x).\neg P(x))}\,\delta_{\neg\forall}$$

$$\frac{\forall x.P(x)}{P(X)}\,\gamma_{\forall M} \qquad \frac{\neg\exists x.P(x)}{\neg P(X)}\,\gamma_{\neg\exists M}$$

$$\frac{\forall x.P(x)}{P(t)}\,\gamma_{\forall \mathrm{inst}} \qquad \frac{\neg\exists x.P(x)}{\neg P(t)}\,\gamma_{\neg\exists \mathrm{inst}}$$

Méthode des tableaux

Exemple

- Preuve de : $(\forall x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow P(a) \vee Q(a)$;
- Réfutation : $\neg((\forall x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow P(a) \vee Q(a))$;
- Premières règles $(\alpha_{\neg\Rightarrow}, \alpha_{\neg\vee})$: $\forall x.P(x) \vee Q(x)$, $\neg P(a)$, $\neg Q(a)$.

Méthode des tableaux

Exemple

$$\frac{\forall x\ (P(x) \vee Q(x))\ ,\ \ \neg P(a)\ ,\ \ \neg Q(a)}{}$$

Méthode des tableaux

Exemple

$$\frac{\forall x\ (P(x) \vee Q(x))\ ,\ \ \neg P(a)\ ,\ \ \neg Q(a)}{P(X) \vee Q(X)}\ \gamma_{\forall M}$$

Méthode des tableaux

Exemple

$$\cfrac{\forall x\ (P(x) \vee Q(x))\ ,\quad \neg P(a)\ ,\quad \neg Q(a)}{\cfrac{P(X) \vee Q(X)}{P(X) \qquad\qquad Q(X)}\ \beta_{\vee}}\ \gamma_{\forall M}$$

Méthode des tableaux

Exemple

$$\dfrac{\dfrac{\forall x\ (P(x) \vee Q(x))\ ,\ \ \neg P(a)\ ,\ \ \neg Q(a)}{P(X) \vee Q(X)}\ \gamma_{\forall M}}{P(X) \qquad\qquad Q(X)}\ \beta_{\vee}$$

Méthode des tableaux

Exemple

$$\cfrac{\forall x\,(P(x) \lor Q(x))\ ,\quad \neg P(a)\ ,\quad \neg Q(a)}{\cfrac{P(X) \lor Q(X)}{\cfrac{P(X)}{P(a) \lor Q(a)}\,\gamma_{\forall\text{inst}} \qquad Q(X)}\,\beta_{\lor}}\,\gamma_{\forall M}$$

Méthode des tableaux

Exemple

$$\dfrac{\forall x\ (P(x) \vee Q(x))\ ,\ \ \neg P(a)\ ,\ \ \neg Q(a)}{\dfrac{P(X) \vee Q(X)}{\dfrac{\dfrac{P(X)}{\dfrac{P(a) \vee Q(a)}{\color{red}{P(a) \qquad Q(a)}}\ {\color{red}{\beta_\vee}}}\ \gamma_{\forall \mathrm{inst}} \qquad\qquad Q(X)}{}}\ \beta_\vee}\ \gamma_{\forall M}$$

Méthode des tableaux

Exemple

$$
\dfrac{\forall x\,(P(x) \vee Q(x))\ ,\ \ \neg P(a)\ ,\ \ \neg Q(a)}{\dfrac{P(X) \vee Q(X)}{\dfrac{P(X)}{\dfrac{P(a) \vee Q(a)}{\dfrac{P(a)}{\odot}\quad \odot \quad \dfrac{Q(a)}{}}\,\beta_{\vee}}\,\gamma_{\forall \mathrm{inst}} \qquad Q(X)}\,\beta_{\vee}}\,\gamma_{\forall M}
$$

Méthode des tableaux

Exemple

$$\dfrac{\forall x\ (P(x) \lor Q(x))\ ,\quad \neg P(a)\ ,\quad \neg Q(a)}{\dfrac{P(X) \lor Q(X)}{\dfrac{P(X)}{\dfrac{P(a) \lor Q(a)}{\dfrac{P(a)}{\odot}\ \odot \qquad \dfrac{Q(a)}{\odot}\ \odot}\ \beta_{\lor}}\ \gamma_{\forall\mathrm{inst}} \qquad Q(X)}\ \beta_{\lor}}\ \gamma_{\forall M}$$

Méthode des tableaux

Exemple

$$
\cfrac{\forall x \; (P(x) \lor Q(x)) \; , \quad \neg P(a) \; , \quad \neg Q(a)}{\cfrac{\color{red}{P(X) \lor Q(X)}}{\cfrac{\color{red}{P(X)}}{\cfrac{P(a) \lor Q(a)}{\cfrac{P(a)}{\odot}\,\odot \qquad \cfrac{Q(a)}{\odot}\,\odot}\;\beta_{\lor}}\;\gamma_{\forall\mathrm{inst}} \qquad \color{red}{Q(X)}}\;\beta_{\lor}}\;\gamma_{\forall M}
$$

Méthode des tableaux

Exemple

$$\cfrac{\forall x\ (P(x) \vee Q(x))\ ,\quad \neg P(a)\ ,\quad \neg Q(a)}{\cfrac{P(a) \vee Q(a)}{\cfrac{P(a)}{\odot}\ \odot \qquad \cfrac{Q(a)}{\odot}\ \odot}\ \beta_\vee}\ \gamma_{\forall \mathrm{inst}}$$

Exercice

Appliquer la méthode des tableaux sur les propositions suivantes

1. $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$
2. $\forall x.P(x) \Rightarrow \exists y.P(y) \vee Q(y)$
3. $(\exists x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))$
4. $(\forall x.P(x)) \wedge (\forall x.Q(x)) \Rightarrow \forall x.P(x) \wedge Q(x)$
5. $(\forall x.P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\forall x.P(x)) \wedge (\forall x.Q(x))$
6. $(\forall x.\neg P(x)) \Rightarrow \neg(\exists x.P(x))$
7. $\neg(\forall x.P(x)) \Rightarrow \exists x.\neg P(x)$

Résolution

Principe

- Par réfutation ;
- Nécessité de clausifier ;
- Obtention d'une formule universelle (skolémisation) ;
- Variables universelles $\equiv$ métavariables (unification).

Skolémisation

Formule existentielle/universelle

- Formule existentielle : $\exists x_1.\ldots.\exists x_n.P(x_1,\ldots,x_n)$;
- Formule universelle : $\forall x_1.\ldots.\forall x_n.P(x_1,\ldots,x_n)$.

Théorème de Herbrand-Skolem

Pour toute formule Φ :

- Il existe une formule existentielle Φ' t.q. Φ' est valide ssi Φ est valide (Φ' est une forme de Herbrand de Φ) ;
- Il existe une formule universelle Φ' t.q. Φ' est insatisfiable ssi Φ est insatisfiable (Φ' est une forme de Skolem de Φ).

Skolémisation

Fonctions de skolémisation et herbrandisation

- Si Φ est atomique, $s(\Phi) = h(\Phi) = \Phi$;
- $s(\Phi \wedge \Phi') = s(\Phi) \wedge s(\Phi')$, $h(\Phi \wedge \Phi') = h(\Phi) \wedge h(\Phi')$;
- $s(\Phi \vee \Phi') = s(\Phi) \vee s(\Phi')$, $h(\Phi \vee \Phi') = h(\Phi) \vee h(\Phi')$;
- $s(\neg\Phi) = \neg h(\Phi)$, $h(\neg\Phi) = \neg s(\Phi)$;
- $s(\Phi \Rightarrow \Phi') = h(\Phi) \Rightarrow s(\Phi')$, $h(\Phi \Rightarrow \Phi') = s(\Phi) \Rightarrow h(\Phi')$;
- $s(\forall x.\Phi) = s(\Phi)$, $h(\forall x.\Phi) = s(\Phi)[f(x_1, \ldots, x_n)/x]$, où $x_1, \ldots, x_n$ sont les variables libres de $\forall x.\Phi$;
- $s(\exists x.\Phi) = s(\Phi)[f(x_1, \ldots, x_n)/x]$, où $x_1, \ldots, x_n$ sont les variables libres de $\exists x.\Phi$, $h(\exists x.\Phi) = h(\Phi)$.
- Ensuite, une fois le calcul terminé :
  - Skolémisation : $\forall x_1. \ldots .\forall x_n.s(\Phi)$, où $x_1, \ldots, x_n$ sont les variables libres de $s(\Phi)$;
  - Herbrandisation : $\exists x_1. \ldots .\forall x_n.h(\Phi)$, où $x_1, \ldots, x_n$ sont les variables libres de $s(\Phi)$.

Skolémisation

Exemple

- Skolémisation de $\forall x.\exists y.\forall z.P(x,y,z)$;
- $s(\forall x.\exists y.\forall z.P(x,y,z)) =$
  $s(\exists y.\forall z.P(x,y,z)) =$
  $s(\forall z.P(x,y,z))[f(x)/y] =$
  $s(P(x,y,z))[f(x)/y] =$
  $P(x,y,z)[f(x)/y] =$
  $P(x,f(x),z)$;
- On obtient donc : $\forall x.\forall z.P(x,f(x),z)$.

Clausification

Principe

- On skolémise : on obtient une formule universelle $\forall \vec{x}.\Phi$;
- On élimine les quantificateurs, puis on met Φ en cnf.

Exemple

- $s(\neg((\forall x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow P(a) \vee Q(a))) =$
  $\neg(h((\forall x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow P(a) \vee Q(a))) =$
  $\neg(s(\forall x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow h(P(a) \vee Q(a))) =$
  $\neg(P(x) \vee Q(x) \Rightarrow P(a) \vee Q(a))$;
- $\neg(P(x) \vee Q(x) \Rightarrow P(a) \vee Q(a)) =$
  $\neg(\neg(P(x) \vee Q(x)) \vee P(a) \vee Q(a)) =$
  $\neg(\neg(P(x) \vee Q(x))) \wedge \neg P(a) \wedge \neg Q(a)) =$
  $(P(x) \vee Q(x)) \wedge \neg P(a) \wedge \neg Q(a))$;
- $S = \{P(x) \vee Q(x), \neg P(a), \neg Q(a)\}$.

Résolution et factorisations binaires

Résolution binaire

$$\frac{A \vee C \qquad \neg B \vee D}{\sigma(C) \vee \sigma(D)}\ \text{res}$$

où $\sigma(A) = \sigma(B)$.

Factorisations binaires

$$\frac{A \vee B \vee C}{\sigma(B) \vee \sigma(C)}\ \text{fact}^{+} \qquad \frac{\neg A \vee \neg B \vee C}{\neg\sigma(B) \vee \sigma(C)}\ \text{fact}^{-}$$

où $\sigma(A) = \sigma(B)$.

Résolution

Exemple

- Preuve de : $(\forall x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow P(a) \vee Q(a)$;
- Clausification de $\neg((\forall x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow P(a) \vee Q(a))$:
  $S = \{P(x) \vee Q(x), \neg P(a), \neg Q(a)\}$;
- Résolution entre $P(x) \vee Q(x)$ et $\neg P(a)$, $\sigma = [a/x]$: $Q(a)$;
- Résolution entre $Q(a)$ et $\neg Q(a)$: $\Box$.

Exercice

Appliquer la méthode de résolution sur les propositions suivantes

1. $\exists x.P(x) \Rightarrow P(a) \wedge P(b)$
2. $\forall x.P(x) \Rightarrow \exists y.P(y) \vee Q(y)$
3. $(\exists x.P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow (\exists x.P(x)) \vee (\exists x.Q(x))$
4. $(\forall x.P(x)) \wedge (\forall x.Q(x)) \Rightarrow \forall x.P(x) \wedge Q(x)$
5. $(\forall x.P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow (\forall x.P(x)) \wedge (\forall x.Q(x))$
6. $(\forall x.\neg P(x)) \Rightarrow \neg(\exists x.P(x))$
7. $\neg(\forall x.P(x)) \Rightarrow \exists x.\neg P(x)$