Module d'outils mathématiques 2 : Devoir Surveillé 2

Merci de répondre **directement et uniquement** sur le sujet. Durée : 1h30.
Calculatrice IUT autorisée. Formulaire A4 recto-verso manuscrit autorisé.

NOM : **GROUPE :** **NOTE :** /**20**

1. En éliminant le paramètre pour chacune des courbes suivantes, établir la relation liant x et y, et reconnaître alors la courbe considérée :

$$\mathcal{C}_1 : \begin{cases} x(t) = t^4 \\ y(t) = t^2 \end{cases} \quad \mathcal{C}_2 : \begin{cases} x(t) = 2\cos(2t) \\ y(t) = 2\sin(2t) \end{cases} \quad \mathcal{C}_3 : \begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{t} \\ y(t) = \dfrac{1+t}{t} \end{cases}$$

2. On considère la courbe paramétrée C_2 : $\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \dfrac{\sin t}{2+\cos t} \end{cases}$

   (a) Déterminer I, l'intervalle d'étude de la courbe, et préciser les symétries.

   (b) Calculer les dérivées et étudier leurs signes. Mettre en évidence et indiquer les tangentes horizontales et/ou verticales.

(c) Remplir le tableau de variations suivant :

t	
$x'(t)$	
$x(t)$	
$y'(t)$	
$y(t)$	

N.B. : On ne demande pas de tracer la courbe.

3. Soit la courbe paramétrée $\mathcal{C}_1$: $\begin{cases} x(t) = 2t + t^2 \\ y(t) = 2t - \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$

   Montrer qu'il existe un point singulier : préciser la valeur de t et la nature du point.

4. Soit la matrice carrée d'ordre 3, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

   (a) montrer que A est inversible ;

   (b) déterminer A^{-1}, la matrice inverse de A ;

(c) puis utiliser A pour résoudre de façon matricielle le système d'équations $\left\{\begin{array}{l} y=-x \\ y+z=1 \\ x+z=3 \end{array}\right.$

5. Soit le point A de coordonnées $(2;5)$ dans le plan. En précisant les matrices utilisées, déterminer les images de A par :

   (a) la rotation de centre O et d'angle 36,87° suivie de la symétrie d'axe (Oy) ;

   (b) la symétrie d'axe (Ox) suivie de l'homothétie de centre O et de rapport 3.

6. À quelles conditions le système $\left\{\begin{array}{l} x+my=1 \\ mx+y=n \end{array}\right.$ n'admet aucune solution ?

7. Calculer $I = \iint\limits_D (x^2 + 2xy)dxdy$ où D est un rectangle de défini par les points O, $A(2;0)$; $B(2;1)$ et $C(0;1)$.

8. Calculer $I = \iint\limits_D (2x^2 + y)dxdy$ où D est le domaine défini par $\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \end{array} \right.$

9. Calculer $I = \iint\limits_D \frac{1}{2 - x^2 - y^2} dxdy$ où D est le disque de centre O et de rayon 1.