Module d'outil mathématique 2 : Devoir Surveillé

Merci de répondre **directement et uniquement** sur le sujet. Durée : 1h30.
Calculatrice IUT autorisée. Formulaire A4 recto-verso manuscrit autorisé.

NOM :	GROUPE :	NOTE :	/20

Important : Le sujet comporte 4 pages. Toutes les questions de ce sujet sont indépendantes.

1 Développements limités *(9 pt)*

Notation : On note $\mathrm{DL}_n(x_0)$ le développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0. Ainsi un $\mathrm{DL}_4(0)$ est un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 (x proche de 0).

1. Donner le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ et en déduire $\lim_{x\to 0} f(x)$. *(2 pt)*

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{reste}(5)$

$\Rightarrow \frac{\ln(1+x)}{x} \overset{0}{\simeq} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}$

(ou bien le DL4 :

$f(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \text{reste}(4)$

1pt

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \text{reste}(4)$

$= \boxed{1 = \lim_{0} f(x)}$

1pt

2. Donner le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $f(x) = \dfrac{3}{2-3x}$. *(2 pt)*

On utilise $f(u) = \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + \text{reste}(3)$

avec $u = -\frac{3}{2}x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

1pt

$\Rightarrow f(x) = 3 \cdot \frac{1}{2(1-\frac{3}{2}x)} = \frac{3}{2} \frac{1}{1-\frac{3}{2}x}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{2}\left[1 - \left(-\frac{3}{2}x\right) + \left(\frac{3}{2}x\right)^2\right]$

$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{2} + \frac{9}{4}x + \frac{27}{8}x^2 + \text{reste}(3)$

ou

$f(x) \overset{0}{\simeq} \frac{3}{2} + \frac{9x}{4} + \frac{27x^2}{8}$

1pt

3. En faisant un DL_2 au numérateur et au dénominateur, déterminer l'équation de la tangente T du graphe $\mathcal{C}$ de la fonction $f(x) = \dfrac{\cos(2x)-1}{\sin x}$ en $x = 0$. *(2 pt)*

$\cos(u) = 1 - \frac{u^2}{2} + \text{reste}(4)$

$\Rightarrow \cos(2x) = 1 - 2x^2 + \text{reste}(4)$

et $\sin(x) = x + \text{reste}(3)$

1pt

$\Rightarrow f(x) \overset{0}{\simeq} \frac{1 - 2x^2 - 1}{x} \overset{0}{\simeq} -2x$

Puisque $f(x) \overset{0}{\simeq} -2x$ alors $\mathcal{C}_f$ admet pour tangente en $x=0$

$T : y = -2x$

1pt

4. Déterminer l'asymptote oblique en $+\infty$ du graphe de $f(x) = \sqrt{2x^2 - x + 1}$. On remarquera qu'un DL_1 est suffisant. *(3 pt)*

On cherche à décrire le comportement de $\mathcal{C}_f$ quand $x \to +\infty$. On fait donc un DL(∞) de $f(x)$ (1pt)

On a $f(x) = \sqrt{2x^2\left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2}\right)}$

$= \sqrt{2} \cdot x \sqrt{1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2}}$

car $x > 0$

Je pose $u = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$

et j'utilise le DL_1 de $\sqrt{1+u}$.

$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} + \text{reste}\ (2)$ (1pt)

$\Rightarrow f(x) = x\sqrt{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2} + \text{reste}\right)$

Ainsi

$f(x) \underset{\infty}{\simeq} \sqrt{2}\, x - \frac{\sqrt{2}}{4} + \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{4x} + \text{reste}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{C}_f$ admet en $+\infty$ une asymptote oblique $\mathcal{D}$ d'équation $y = \sqrt{2}\left(x - \frac{1}{4}\right)$

(1pt)

2 Intégrales *(9 pt)*

1. Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction $f(x) = \dfrac{2x^3 + 1}{x(x+1)^2}$. ~~(3 pt)~~ (4pt)

Puisque deg N < deg D, je commence par une division Euclidienne.

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 \quad + 1 & x^3 + 2x^2 + x \\ \hline -(2x^3 + 4x^2 + 2x) & 2 \\ \hline -4x^2 - 2x + 1 & \end{array}$$

$\Rightarrow f(x) = 2 + \underbrace{\frac{-4x^2 - 2x + 1}{x(x+1)^2}}_{g(x)}$ (1pt)

Je décompose $g(x)$ en éléments simples

Pôles : $0\ (1)$ et $-1\ (2)$

$\Rightarrow g(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$ (1pt)

avec $A = \lim_{0} x g(x) = 1$

$C = \lim_{-1} (x+1)^2 g(x) = 1$

et $\lim_{+\infty} x f(x) = \lim_{+\infty} \frac{(-4x^2 - 2x + 1)}{x^2 + 2x + 1} = -4$

$= A + B \Rightarrow B = -5$

$\Rightarrow f(x) = 2 + \frac{1}{x} - \frac{5}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$ (1pt)

$\Rightarrow \boxed{F(x) = K + 2x + \ln|x| - 5\ln|x+1| - \frac{1}{x+1} \quad K \in \mathbb{R}}$

important !

(1pt)

2. Calculer $I_1 = \int_0^1 \frac{4x}{(x^2+1)^2}dx$ et $I_2 = \int_0^\pi \sin\left(\frac{x-\pi}{2}\right) dx$. *(2 pt)*

$4x(x^2+1)^{-2} = 2u'u^{-2}$ avec $u = (x^2+1)$

On "primitive" en $2\frac{u^{-1}}{-1} = \frac{-2}{x^2+1}$

$\Rightarrow I_1 = \left[\frac{-2}{x^2+1}\right]_0^1$

$= \frac{-2}{2} + \frac{2}{1} = \boxed{1 = I_1}$

1pt

$\sin\left(\frac{x-\pi}{2}\right) = 2v'(x) \times u' \circ v(x)$

avec $u'(x) = \sin x \Rightarrow u(x) = -\cos x$

$v(x) = \frac{x-\pi}{2} \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{2}$

On "primitive" cette expression en :

$2u \circ v(x) = -2\cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow I_2 = -2\left[\cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right)\right]_0^\pi$

$= -2[1-0] = \boxed{-2 = I_2}$

1pt

3. Calculer $I_3 = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$ en posant $u = e^x$. *(2 pt)*

1 On pose $u = e^x$. On remplace l'élément

$\frac{du}{dx} = e^x = u \Rightarrow dx = \frac{du}{u}$

2 Expression : $\frac{e^{2x}}{1+e^x} = \frac{(e^x)^2}{1+e^x}$

$= \frac{u^2}{1+u}$

3 Bornes : x va de 0 à 1

$\Rightarrow u$ va de 1 à e.

4 Ré-écriture :

$I_3 = \int_1^e \frac{u^2}{1+u} \frac{du}{u} = \int_1^e \frac{u}{1+u} du$

1pt

On remarque que $\frac{u}{1+u}$ est une fraction rationnelle en u, et que

$\frac{u}{1+u} = \frac{1+u-1}{1+u} = 1 - \frac{1}{1+u}$

$\Rightarrow I_3 = \int_1^e 1\,du - \int_1^e \frac{1}{1+u} du$

$= [u]_1^e - [\ln|1+u|]_1^e$

$= e - 1 - \ln(1+e) + \ln(2)$

$\Rightarrow \boxed{I_3 = e - 1 - \ln(1+e) + \ln 2}$

1pt

ou bien

$I_3 = e - 1 + \ln\frac{2}{1+e}$

4. Calculer $I_4 = \int_0^1 x\ln(x+1)dx$ à l'aide d'une intégration par parties. *(2 pt)*

Je pose $u'(x) = x \longrightarrow u(x) = \frac{x^2}{2}$

$v'(x) = \frac{1}{x+1} \longleftarrow v(x) = \ln(x+1)$

$$\Rightarrow I_4 = \left[\frac{x^2}{2}\ln(x+1)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2(x+1)}dx$$

$$= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx}_{J}$$

1pt

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x+1 \\ \cline{2-2} -(x^2+x) & x-1 \\ \hline -x & \\ (-x-1) & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$J = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$J = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[x\right]_0^1 + \left[\ln|x+1|\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} - 1 + \ln(2).$$

$$\Rightarrow I_4 = \cancel{\frac{\ln 2}{2}} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \cancel{\frac{\ln 2}{2}}$$

$$= \boxed{\frac{1}{4} = I_4}$$

1pt

3 Équation différentielle *(2 pt)*

Résoudre l'équation différentielle $y' - (\cos x)y = 0$. *(2 pt)*

Il s'agit d'une ED1LHV 0,5

$\Rightarrow$ On sépare les variables

$$\frac{dy}{dx} - (\cos x)y = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \cos x \, dx$$

0,5

$$\Rightarrow \ln|y| = \sin x + k$$

$$\Rightarrow |y| = Ce^{\sin x} \text{ avec } C \in \mathbb{R}^{*+}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = ke^{\sin x} \text{ avec } k \in \mathbb{R}}$$

1pt