Module d'outil mathématique 1 : Devoir Surveillé

Merci de répondre **directement et uniquement** sur le sujet. Durée : 1h30min.
Calculatrice IUT autorisée. Formulaire A4 recto-verso manuscrit autorisé.

NOM : PALERMO. GROUPE : NOTE : /20

1 Questionnaire à Choix Multiples *(6 pt)*

Chaque question est notée sur 0,5 pt et comporte cinq propositions de réponse. Les dix premières questions portent exclusivement sur le cours. Il y a au moins une proposition correcte parmi les cinq (il peut donc y en avoir plusieurs). Le barème est le suivant :

- 0,5 pt si aucune erreur n'est commise ;
- 0,3 pt si une erreur est commise ;
- 0,1 pt si deux erreurs sont commises ;
- 0 pt si trois erreurs ou plus sont commises.

Il n'y a pas de pénalité (points négatifs) pour une réponse fausse. Une erreur est définie par une proposition exacte non-cochée ou une proposition fausse cochée.

1.1 Soit la fonction $f(x) = \arccos x$ définie sur $\mathcal{D}$:

A☐ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ B☒ f est décroissante C☐ $f : \mathcal{D} \to [-\pi/2; \pi/2]$ D☒ $f : \mathcal{D} \to [0; \pi]$ E☐ $f : \mathcal{D} \to [-1; 1]$

01010

1.2 Cocher, parmi les propositions, les conditions nécessaires pour que l'égalité $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ soit vraie.

A☒ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ B☐ x_0 a une valeur finie C☐ $x_0 = 0$ D☒ $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) \in \mathbb{R}$ E☒ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$

10011

1.3 Cocher, parmi les propositions, les conditions nécessaires pour que l'équation $f(x) = 0$ admette une solution unique sur l'intervalle $I = [a; b]$.

A☐ $f(a) \cdot f(b) > 0$ B☒ $f(a) \cdot f(b) < 0$ C☐ f est monotone sur I ; D☒ f est strictement monotone sur I E☒ f est continue sur I

01011

1.4 Soit une fonction f définie en x_0.

A☐ f est continue en $x_0 \iff \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe, est finie et a une valeur quelconque.
B☒ f est continue en $x_0 \iff \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe, est finie, et est égale à $f(x_0)$.
C☒ f est continue en x_0 si elle est dérivable en x_0.
D☐ f est dérivable en x_0 si elle est continue en x_0.
E☒ f est dérivable en $x_0 \iff \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.

01101

1.5 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$:

A☐ si et seulement si ($\iff$) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$.
B☒ si et seulement si ($\iff$) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$.
C☒ si f est continue en x_0.
D☒ si et seulement si ($\iff$) on peut s'approcher d'aussi près que l'on veut de $f(x) = L$ à condition de s'approcher suffisamment de $x = x_0$.
E☐ si et seulement si ($\iff$) on peut s'approcher d'aussi près que l'on veut de $x = x_0$ à condition de s'approcher suffisamment de $f(x) = L$.

01110

1.6 Soit f définie sur $\mathcal{D}$.

A☐ f est décroissante $\iff x < x' \implies f(x) \leq f(x')$
B☒ f est croissante $\iff x < x' \implies f(x) \leq f(x')$
C☒ f est croissante si $f'(x) > 0$
D☐ f admet un minimum local si $f'(x) = 0$ et $f''(x) < 0$
E☒ f admet un maximum local si $f'(x) = 0$ et $f''(x) < 0$

01101

1.7 Soit une fonction f définie sur $\mathcal{D}$ et représentée par $\mathcal{C}_f$. Si f est paire :

A☒ $\mathcal{D}$ est un intervalle centré en 0 et symétrique.
B☒ $f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathcal{D}$
C☐ $f(x) = -f(-x)\ \forall x \in \mathcal{D}$
D☒ $\mathcal{C}_f$ admet l'axe $x = 0$ comme axe de symétrie et son étude peut être restreinte sur $\mathbb{R}^+$.
E☐ $\mathcal{C}_f$ admet l'origine du repère O comme centre de symétrie et son étude peut être restreinte sur $\mathbb{R}^+$.

11010

1.8 Parmi les propositions de limites suivantes, cocher celles qui sont exactes.

A☐ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = 0$ B☒ $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ C☒ $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+4}{x^2+1} = 3$ D☐ $\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+4}{x^2+1} = 3$ E☐ $\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x} = 0$

01100

1.9 Parmi les propositions de limites suivantes, cocher celles qui sont exactes.

A☒ Si $\lim_{x\to 4} f(x) = +\infty$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 4$.
B☐ Si $\lim_{x\to 4} f(x) = 4$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 4$.
C☒ Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 4$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 4$.
D☐ Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\mathcal{C}_f$ admet obligatoirement une asymptote oblique en $+\infty$.
E☒ Le graphe $\mathcal{C}_f$ de $f(x) = \frac{x^3+x^2+1}{x^2}$ admet la droite D d'équation $y = x+1$ comme asymptote oblique.

~~100~~ 10101

1.10 Soit $f : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ une fonction croissante admettant une fonction réciproque $f^{-1} : \mathcal{A} \to D$.

A☒ f et f^{-1} sont des fonctions bijectives.
B☐ f^{-1} est une fonction décroissante sur $\mathcal{A}$.
C☐ Les graphes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
D☐ Les graphes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
E☒ Les graphes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite D d'équation $y = x$.

10001

1.11 Parmi les fonctions suivantes, cocher celles qui sont paires.

A☐ $\frac{x^2+1}{x+1}$ B☐ $\frac{x^3+x}{x^2+1}$ C☒ $\frac{\sin^2(x)}{x^2}$ D☐ $\frac{\tan^2(x)}{\sin(2x)}$ E☒ $x^4\ln(x^2+1)$

00101

1.12 Parmi les fonctions suivantes, cocher celles qui sont impaires.

A☐ $\frac{x^2+1}{x+1}$ B☒ $\frac{x^3+x}{x^2+1}$ C☐ $\frac{\sin^2(x)}{x^2}$ D☒ $\frac{\tan^2(x)}{\sin(2x)}$ E☐ $x^4\ln(x^2+1)$

01010.

2 Exercices

Chacune des questions ci-après est notée sur 1 point. Les réponses doivent être brièvement justifiées.

2.1 Nombres complexes *7 pt*

2.1.1 Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $z^4 = -8$.

$z^4 = -8$

On pose $z = re^{j\theta}$ avec $\begin{cases} r > 0 \\ \theta \in [0; 2\pi] \end{cases}$.

Alors $r^4 e^{j4\theta} = 8e^{j\pi}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r^4 = 8 \\ 4\theta = \pi\ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[4]{8} \\ \theta = \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

Finalement,

$z_1 = \sqrt[4]{8}\, e^{j\pi/4}$

$z_2 = \sqrt[4]{8}\, e^{j3\pi/4}$

$z_3 = \sqrt[4]{8}\, e^{j5\pi/4} = \sqrt[4]{8}\, e^{-j3\pi/4} = \overline{z_2}$

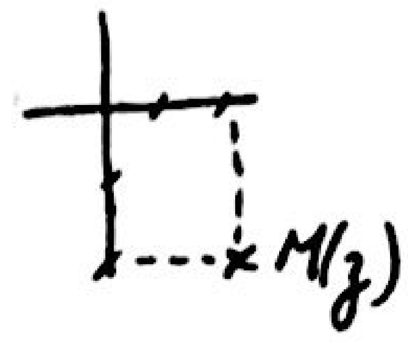
$z_4 = \sqrt[4]{8}\, e^{j7\pi/4} = \sqrt[4]{8}\, e^{-j\pi/4} = \overline{z_1}$

2.1.2 Ecrire sous forme exponentielle les nombres $z = 2 - 2j$, $z' = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{j}{2}$.

$|z| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\arg(z) = -\frac{\pi}{4}$

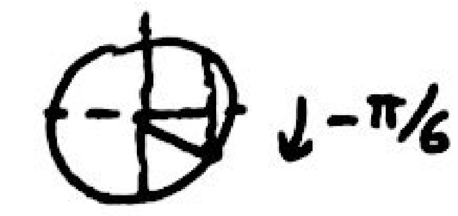
$\rightarrow z = 2\sqrt{2}\, e^{-j\pi/4}$



$|z'| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1.$

$\arg(z') = -\pi/6$

$\Rightarrow z' = e^{-j\pi/6}.$



2.1.3 On donne $z = 2 - 2j$ et $z' = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{j}{2}$, écrire zz' sous formes exponentielle~~s~~ et algébrique~~s~~.

$zz' = 2\sqrt{2}\, e^{-j\pi/4} \cdot e^{-j\pi/6}$

$= 2\sqrt{2}\, e^{-j\left(\frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{12}\right)} = 2\sqrt{2}\, e^{-j5\pi/12}.$

Forme algébrique:

$zz' = (1-j)(\sqrt{3} - j) \cdot \cancel{\frac{2}{2}}$

$= \sqrt{3} - j - j\sqrt{3} - 1$

$= (\sqrt{3} - 1) - j(\sqrt{3} + 1) = zz'.$

2.1.4 Déterminer la nature des transformations géométriques associées aux fonctions complexes $f(z) = -2jz$, $g(z) = e^{\pi/3}z$ et $h(z) = jz + 2$.

$f(z) = -2jz \rightarrow |-2j| = 2$

$\arg(-2j) = -\pi/2.$

$\rightarrow$ Similitude de centre 0, de rapport 2 et d'angle $-\pi/2$.

$g(z) = e^{\pi/3} z.$

$|e^{\pi/3}| = e^{\pi/3}$ et $\arg(e^{\pi/3}) = 0.$

$\rightarrow$ Homothétie de centre 0 et de rapport $e^{\pi/3}$.

$h(z) = jz + 2$

$\rightarrow$ Rotation de centre 0 et d'angle $\frac{\pi}{2}$ suivie d'une translation de $(2;0) = \vec{u}$.

2.1.5 Donner les équations cartésienne et complexe du cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(1;-2)$ et de rayon 2.

$\mathcal{C} = \{ M(z) \,/\, z = 1 - 2j + 2e^{j\theta}$ avec $\theta \in [0; 2\pi] \}$

$= \{ M(x;y) \,/\, (x-1)^2 + (y+2)^2 = 4 \}.$

2.1.6 Décrire $\mathcal{C}'$, l'image du cercle $\mathcal{C}$ de la question précédente, par la transformation associée à la fonction $f(z) = 2jz$.

$\mathcal{C}' = \{ M'(z') \,/\, z' = 2j(1 - 2j) + 2e^{j\theta}$ $\theta \in [0; 2\pi] \}.$

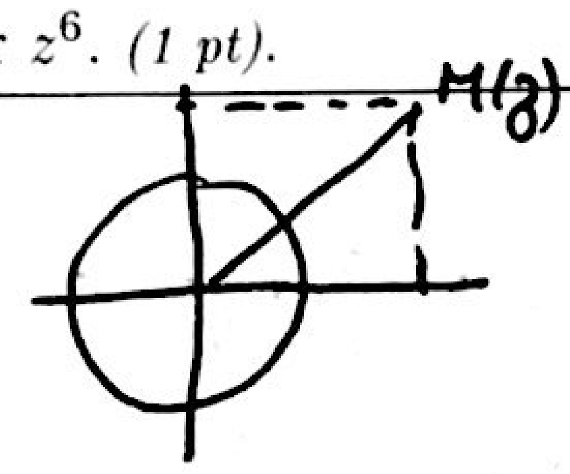
$z' = 2j + 4 + 4e^{j(\theta + \pi/2)}$

$= 4 + 2j + 4e^{j(\theta + \pi/2)}.$

$\mathcal{C}'$ est le cercle de centre $(4;2)$ et de rayon 4.

2.1.7 Soit $z = 2 + 2j$. Calculer z^6. *(1 pt)*.

$z = 2\sqrt{2}\, e^{j\pi/4}$



$z^6 = 2^6 . \sqrt{2}^6\, e^{j6\pi/4}$

$= 64 \times 8 \times e^{j3\pi/2} \quad = 512\, e^{j3\pi/2}$

$z^6 = 512\, e^{j3\pi/2}$.

2.2 Fonctions d'une variable réelle *7 pt*

2.2.1 Soit $f(x) = \ln(1 - x^2)$ définie sur $\mathcal{D}$. Déterminer $\mathcal{D}$ ainsi que les variations de f sur $\mathcal{D}$.

$D = \{x /\ 1 - x^2 > 0\}$

$1 - x^2 = (1-x)(1+x) . = g(x)$

0		-1		1	
$1-x$	+		+	0	−
$1+x$	−	0	+		+
$g(x)$	−	0	+	0	−

$\Rightarrow \quad D =]-1 ; 1[$

0,5 pt

Variations $f'(x) = \dfrac{-2x}{1-x^2}$

sur D $sg(f'(x)) = sg(-x)$.

	-1		0		1
$f(x)$	‖	↗		↘	‖

0,5 pt

2.2.2 Étudier les branches infinies de la fonction $f(x) = x - 1 + \ln(x - 1)$.

$Df = \{x / x - 1 > 0\} \Leftrightarrow Df =]1 ; +\infty[$.

$\lim\limits_{x \to 1^+} x - 1 + \ln(x-1) = -\infty$.

On a une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

0,25

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \rightarrow$ On recherche une asymptote oblique.

$\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} 1 - \dfrac{1}{x} + \underbrace{\dfrac{\ln(x-1)}{x}}_{\to 0} = 1 = m$

$p = \lim\limits_{+\infty} -1 + \ln(x-1) = +\infty$.

$\rightarrow$ Il n'y a pas d'asymptote oblique en $+\infty$ mais une direction asymptotique $y = x$.

0,5

2.2.3 Déterminer l'asymptote oblique D en $+\infty$ de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 2}$ et préciser leurs positions relatives.

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x} = 1 = m$.

$p = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 2} - x$

$= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{x^2 + x + 1 - x^2 + 2x}{x - 2}$

$= \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\cancel{x^2} - \cancel{x^2} + 3x + 1}{x - 2} = 3$.

$D : y = x + 3$.

0,5 pt

$\lim\limits_{+\infty} f(x) - (x + 3) = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{\cancel{x^2} + \cancel{x} + 1 - \cancel{x^2} + \cancel{2x} + \cancel{3x} + 6}{x - 2}$

$= \dfrac{7}{x-2} = 0^+$

$\mathcal{C}_f$ est au-dessus de D

D est au dessous de $\mathcal{C}_f$.

0,5 pt

2.2.4 Soit $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$. Prolonger f par continuité en $\tilde{f}$ sur $I = [-\pi/2 ; \pi/2]$ (il s'agit de prolonger f en 0)

On calcule $\lim_{0} f(x)$

$= \lim_{0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$

$= \lim_{0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

→ On applique le théorème de l'Hospital

$\lim_{0} f(x) = \lim_{0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

$= \lim_{0} \frac{-\sin x}{\underbrace{\cos x + \cos x}_{2} - x\sin x} = 0.$

→ $\tilde{f}(0) = 0$. et $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \neq 0$.

2.2.5 Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$. Est-elle continue ?

$\lim_{0} f(x) = \lim_{0} \frac{x^2\cos(1/x) - 0}{x - 0}$

$= \lim_{0} \underbrace{x}_{\to 0} \underbrace{\cos(1/x)}_{\text{bornée}} = 0.$

0,5 pt

f est dérivable en 0.

Elle est donc aussi continue en 0.

0,5 pt

2.2.6 Dériver la fonction $f(x) = \arctan\sqrt{x^4+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = u \circ v \circ w$ avec

$u(x) = \arctan x \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$v(x) = \sqrt{x} \rightarrow v'(x) = \frac{+1}{2\sqrt{x}}$

$w(x) = x^4 + 1 \rightarrow w'(x) = 4x^3$

$f'(x) = 4x^3 \times \frac{1}{2\sqrt{x^4+1}} \times \frac{1}{1 + x^4 + 1}$

$= \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}\,(x^4+2)} = f'(x).$

2.2.7 Calculer les limites (a) $\lim_{x \to \pi/2^-} \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}$ et (b) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$.

$\lim_{\frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)} = \lim_{\pi^-} \frac{\cos x \to -1}{\sin x \to 0^+}$

$= -\infty$

0,5 pt

$\lim_{0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} = \lim_{0} \frac{\sin^2 x}{x^2}$

$= \lim_{0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ avec $\lim_{0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (cours ou l'Hospital)

$= 1.$

0,5 pt