Module d'outil mathématique 1 : Devoir Surveillé

Merci de répondre **directement et uniquement** sur le sujet. Durée : 1h30.
Calculatrice IUT autorisée. Formulaire A4 recto-verso manuscrit autorisé.

NOM : **GROUPE :** **NOTE :** /**20**

1 Questionnaire à Choix Multiples *(6 pt)*

Chaque question est notée sur 0,5 pt et comporte cinq propositions de réponse. Les dix premières questions portent exclusivement sur le cours. Il y a **plusieurs propositions correctes** parmi les cinq. Le barème est le suivant :

— 0,5 pt si aucune erreur n'est commise ;
— 0,3 pt si une erreur est commise ;
— 0,1 pt si deux erreurs sont commises ;
— 0 pt si trois erreurs ou plus sont commises.

Il n'y a pas de pénalité (points négatifs) pour une réponse fausse. Une erreur est définie par une proposition exacte non-cochée ou une proposition fausse cochée. Aucun point n'est accordé si aucune proposition n'est cochée.

1.1 Soit la fonction $f(x) = \arcsin x$ définie sur $\mathcal{D}$:

A❑ f est croissante B❑ f est décroissante C❑ $f : \mathcal{D} \to [-\pi/2; \pi/2]$ D❑ $f : \mathcal{D} \to [0; \pi]$ E❑ $f : \mathcal{D} \to [-1; 1]$

1.2 Cocher, parmi les propositions, les conditions nécessaires pour que l'égalité $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ soit vraie.

A❑ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ B❑ x_0 a une valeur finie C❑ $x_0 = 0$ D❑ $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) \in \mathbb{R}$ E❑ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$

1.3 Cocher, parmi les propositions, les conditions nécessaires pour que l'équation $f(x) = 0$ admette une solution unique sur l'intervalle $I = [a; b]$.

A❑ $f(a) \cdot f(b) > 0$ B❑ $f(a) \cdot f(b) < 0$ C❑ f est monotone sur I D❑ f est strictement monotone sur I E❑ f est continue sur I

1.4 Soit une fonction f définie en x_0.

A❑ f est continue en $x_0 \iff \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe, est finie et a une valeur quelconque.
B❑ f est continue en $x_0 \iff \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe, est finie, et est égale à $f(x_0)$.
C❑ f est continue en x_0 si elle est dérivable en x_0.
D❑ f est dérivable en x_0 si elle est continue en x_0.
E❑ f est dérivable en $x_0 \iff \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.

1.5 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$:

A❑ si et seulement si ($\iff$) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$.
B❑ si et seulement si ($\iff$) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$.
C❑ si f est continue en x_0.
D❑ si et seulement si ($\iff$) on peut s'approcher d'aussi près que l'on veut de $f(x) = L$ à condition de s'approcher suffisamment de $x = x_0$.
E❑ si et seulement si ($\iff$) on peut s'approcher d'aussi près que l'on veut de $x = x_0$ à condition de s'approcher suffisamment de $f(x) = L$.

1.6 Soit f définie sur $\mathcal{D}$.

A❑ f est croissante $\iff x < x' \implies f(x) \leq f(x')$
B❑ f est décroissante $\iff x < x' \implies f(x) \leq f(x')$
C❑ f est croissante si $f'(x) > 0$
D❑ f admet un minimum local si $f'(x) = 0$ et $f''(x) < 0$
E❑ f admet un maximum local si $f'(x) = 0$ et $f''(x) < 0$

1.7 Soit une fonction f définie sur $\mathcal{D}$ et représentée par $\mathcal{C}_f$. Si f est paire :

A❑ $\mathcal{D}$ est un intervalle centré en 0 et symétrique.
B❑ $f(x) = f(-x)\ \forall x \in \mathcal{D}$
C❑ $f(x) = -f(-x)\ \forall x \in \mathcal{D}$
D❑ $\mathcal{C}_f$ admet l'axe $x = 0$ comme axe de symétrie et son étude peut être restreinte sur $\mathbb{R}^+$.
E❑ $\mathcal{C}_f$ admet l'origine du repère O comme centre de symétrie et son étude peut être restreinte sur $\mathbb{R}^+$.

1.8 Parmi les propositions de limites suivantes, cocher celles qui sont exactes.

A❑ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = 0$ B❑ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ C❑ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3x^2+4}{x^2+1} = 3$ D❑ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2+4}{x^2+1} = 3$ E❑ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{x} = 0$

1.9 Parmi les propositions de limites suivantes, cocher celles qui sont exactes.

A❑ Si $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = +\infty$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 4$.
B❑ Si $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 4$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 4$.
C❑ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 4$ alors $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 4$.
D❑ Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\mathcal{C}_f$ admet obligatoirement une asymptote oblique en $+\infty$.
E❑ Le graphe $\mathcal{C}_f$ de $f(x) = \frac{x^3+x^2+1}{x^2}$ admet la droite D d'équation $y = x+1$ comme asymptote oblique.

1.10 Soit $f : \mathcal{D} \to \mathcal{A}$ une fonction croissante admettant une fonction réciproque $f^{-1} : \mathcal{A} \to D$.

A❑ f et f^{-1} sont des fonctions bijectives.
B❑ f^{-1} est une fonction décroissante sur $\mathcal{A}$.
C❑ Les graphes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
D❑ Les graphes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
E❑ Les graphes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite D d'équation $y = x$.

1.11 Parmi les fonctions suivantes, cocher celles qui sont paires.

A❑ $\frac{x^2+1}{x+1}$ B❑ $\frac{x^3+x}{x^2+1}$ C❑ $\frac{\sin^2(x)}{x^2}$ D❑ $\frac{\tan^2(x)}{\sin(2x)}$ E❑ $x^4\ln(x^2+1)$

1.12 Parmi les fonctions suivantes, cocher celles qui sont impaires.

A❑ $\frac{x^2+1}{x+1}$ B❑ $\frac{x^3+x}{x^2+1}$ C❑ $\frac{\sin^2(x)}{x^2}$ D❑ $\frac{\tan^2(x)}{\sin(2x)}$ E❑ $x^4\ln(x^2+1)$

2 Exercices

Chacune des questions ci-après est notée sur 1 point. Les réponses doivent être brièvement justifiées.

2.1 Nombres complexes *5 pt*

2.1.1 Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $z^4 = -8$. *(1 pt)*

2.1.2 Ecrire sous forme exponentielle les nombres $z = 2 - 2j$, $z' = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{j}{2}$.

2.1.3 On donne $z = 2 - 2j$ et $z' = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{j}{2}$, écrire zz' sous formes exponentielles et algébriques.

2.1.4 Déterminer la nature des transformations géométriques associées aux fonctions complexes $f(z) = -2jz$, $g(z) = e^{\pi/3}z$ et $h(z) = jz + 2$.

2.1.5 Donner les équations cartésienne et complexe du cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(1; -2)$ et de rayon 2.

2.1.6 Décrire $\mathcal{C}'$, l'image du cercle $\mathcal{C}$ de la question précédente, par la transformation associée à la fonction $f(z) = 2jz$.

2.1.7 Soit $z = 2 + 2j$. Calculer z^6. *(1 pt)*.

2.2 Fonctions d'une variable réelle *9 pt*

2.2.1 Soit $f(x) = \ln(1 - x^2)$ définie sur $\mathcal{D}$. Déterminer $\mathcal{D}$ ainsi que les variations de f sur $\mathcal{D}$.

2.2.2 Étudier les branches infinies de la fonction $f(x) = x - 1 + \ln(x - 1)$.

2.2.3 Déterminer l'asymptote oblique D en $+\infty$ de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 2}$ et préciser leurs positions relatives.

2.2.4 Soit $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$. Prolonger f par continuité en $\tilde{f}$ sur $I = [-\pi/2\ ;\pi/2]$ (il s'agit de prolonger f en 0).

2.2.5 Étudier la dérivabilité en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$. Est-elle continue ?

2.2.6 Dériver la fonction $f(x) = \arctan\sqrt{x^4+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

2.2.7 Calculer les limites (a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2^-} \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}$ et (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2}$.