SUITES : quelques résultats utiles

Pr. Alain FRANCOIS-HEUDE octobre 2010

L'objectif de cette note est de donner quelques rappels sur les suites ayant une progression particulière et utilisées en finance.

<u>Suite en Progression Nulle</u> [SPN]

Cas d'une suite où tous les termes sont égaux au premier terme (noté a.) $u_j = u_{j-1} = u_1 = a$
La SPN est définie par deux éléments : le premier terme et le nombre de termes : $S_{SPN}[u_1,n]$
Valeur de la somme des n premiers termes notée S_{SPN}

$$S_{\text{SPN}} = \sum_{j=1}^{n} a = a\sum_{j=1}^{n} 1 = a\,.n$$

n termes

$1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = 1.n = n$ dans le cas SPN [1,n]
$a + a + a + \ldots + a = a.n$ pour la SPN [a,n]= a . SPN[1,n]

<u>Suite en Progression Arithmétique</u> [SPA]

Cas d'une suite où $u_j = u_{j-1} + r$ avec un premier terme u_1 et une raison r : $S_{SPA}[u_1,r,n]$
La SPA est définie par 3 éléments : le premier terme, la raison et le nombre de termes
Valeur de la somme des n premiers termes notée S_{SPA}

$$S_{\text{SPA}} = \sum_{j=1}^{n} u_j = n\frac{u_1+u_n}{2} = nu_1 + r\frac{n(n-1)}{2}$$

En prenant $u_1 = r = 1$ nous avons après simplification :

$$S_{\text{SPA}} = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n\,.(n+1)}{2}$$

<u>Suite en Progression Géométrique</u> [SPG]

Cas d'une suite où $u_j = u_{j-1}.q$ avec un premier terme u_1 et une raison q (≠0) : $S_{SPG}[u_1,q,n]$
La SPG est définie par 3 éléments : le premier terme, la raison et le nombre de termes
Valeur de la somme des n premiers termes notée S_{SPG}

$$S_{\text{SPG}} = \sum_{j=1}^{n} u_j = \sum_{j=1}^{n} u_j.q^{j-1} = u_1\left[\frac{1-q^n}{1-q^1}\right]$$

Si q=1 alors $S_{SPG} = n.\ u_1$
En prenant $u_1 = q = 1/(1+r)$ avec $r \neq -1$, nous obtenons $S_{SPG}[1/(1+r),\ 1/(1+r),n]$:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(1+r)^j} = \frac{1}{(1+r)^1} + \frac{1}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+r)^{n-1}} + \frac{1}{(1+r)^n}$$

$$S_{\text{SPG}} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(1+r)^j} = \left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right]$$

<u>Suite en Progression Mixte</u> [SPM]

Cas d'une suite où $u_j = j.q^j$ avec une raison q ($\neq 0$) : $S_{SPM}[u_1,q,n]$
La SPM est définie par 2 éléments : la raison et le nombre de termes
Valeur de la somme des n premiers termes notée S_{SPM}

$$\sum_{j=1}^{n} j\,.\,q = \frac{1}{(1+r)^1} + \frac{2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{n-1}{(1+r)^{n-1}} + \frac{n}{(1+r)^n}$$

Cas particulier d'une suite utilisée en finance où q=1/(1+r) et $u_j = j / (1+r)^j$
Valeur de la somme des n premiers termes, notée S_{SPM}

$$S_{\text{SPM}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{(1+r)^j} = \left[\frac{(1+r) - (1+r+rn)(1+r)^{-n}}{r^2} \right]$$

Démonstration

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{j}{(1+r)^j} = \frac{1}{(1+r)^1} + \frac{2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{n-1}{(1+r)^{n-1}} + \frac{n}{(1+r)^n}$$

$$= \frac{1}{(1+r)^0}\left[\frac{1}{(1+r)^1} + \frac{1}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+r)^{n-1}} + \frac{1}{(1+r)^n} \right]$$

$$+ \frac{1}{(1+r)^1}\left[\frac{1}{(1+r)^1} + \frac{1}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{1}{(1+r)^{n-1}} \right]$$

…

$$+ \frac{1}{(1+r)^{n-2}}\left[\frac{1}{(1+r)^1} + \frac{1}{(1+r)^2} \right]$$

$$+ \frac{1}{(1+r)^{n-1}}\left[\frac{1}{(1+r)^1} \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{(1+r)^j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^{j-1}}\left[\sum_{k=1}^{n-j+1} \frac{1}{(1+r)^k} \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^{j-1}}\left[\frac{1-(1+r)^{-n-1+j}}{r} \right] = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^{j-1}} SPG\left(\frac{1}{(1+r)^1}, \frac{1}{(1+r)^1}, n+1-j\right)$$

$$= \frac{1+r}{r} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^j} - \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{n} \frac{(1+r)^{-n-1+j}}{(1+r)^{j-1}}$$

$$= \frac{1+r}{r}\left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} \right] - \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{n} (1+r)^{-n}$$

$$= \frac{1+r}{r^2}\left[1 - (1+r)^{-n}\right] - \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{n} (1+r)^{-n}$$

$$= \frac{1+r}{r^2} - \frac{(1+r)(1+r)^{-n}}{r^2} - \frac{nr(1+r)^{-n}}{r^2}$$

$$= \frac{(1+r) - (1+r+rn)(1+r)^{-n}}{r^2}$$

Généralisation

Cas 1 :

$$S_x(n)=\sum_{j=1}^{n} j^x=\frac{1}{(x+1)}\left\{(n+1)^{x+1}-1-\sum_{k=0}^{x-1}C_{x+1}^{k}S_k(n)\right\}$$

avec $S_0(n)=0,\quad C_{x+1}^{k}=\dfrac{(x+1)!}{k!(x+1-k)!},\quad$ x et n entiers positifs

Cas 2 :

$$S_x(n,r)=\sum_{j=1}^{n}\frac{j^x}{(1+r)^j}=\frac{1}{r}\left\{1-\frac{(1+n)^x}{(1+r)^n}+\sum_{k=0}^{x-1}C_x^kS_k(n,r)\right\}$$

avec $S_0(n,r)=\dfrac{1-(1+r)^{-n}}{r},\quad C_x^k=\dfrac{x!}{k!(x-k)!},\quad$ x et n entiers positifs et r>0

Remarque : $S_x(n)=S_x(n,0)$

Exemples :

x	$S_x(n)$	$S_x(n,r)$
0	n	$\dfrac{1-(1+r)^{-n}}{r}$
1	$\dfrac{n(n+1)}{2}$	$\dfrac{(1+r)-(1+r+rn)(1+r)^{-n}}{r^2}$
2	$\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$	$\dfrac{(1+r)(2+r)-\left[(1+r)(2+r+2rn)+n^2r^2\right](1+r)^{-n}}{r^3}$
3	$\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$	…
4	…	…

Démonstration du Cas 1 :

a)

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} S_x(n)=\sum_{j=1}^{n} j^x \\ S_x(n+1)=\sum_{j=1}^{n+1} j^x \end{array}\right\} S_x(n+1)=S_x(n)+(n+1)^x \\ V_x(n)=\sum_{j=1}^{n}(j+1)^x=\sum_{j=2}^{n+1} j^x=\sum_{j=1}^{n+1} j^x-1=S_x(n+1)-1 \end{array}\right\} V_x(n)=S_x(n)+(n+1)^x-1$$

b) Décomposition d'un polynôme $(y+a)^x=\sum_{k=0}^{x} C_x^k y^k a^{x-k}$

En posant a=1 et en prenant y=j, puis en sommant sur j=1, …, n

$$\sum_{j=1}^{n}(j+1)^x=\sum_{k=0}^{x} C_x^k\left(\sum_{j=1}^{n} j^k\right) \Rightarrow V_x(n)=\sum_{k=0}^{x} C_x^k S_k(n)$$

c) En égalisant les résultats des deux sections précédentes :

$$\begin{aligned} V_x(n)=S_x(n)+(n+1)^x-1 &= \sum_{k=0}^{x-2} C_x^k S_k(n)+C_x^{x-1} S_{x-1}(n)+C_x^x S_x(n) \\ &= \sum_{k=0}^{x-2} C_x^k S_k(n)+\quad x S_{x-1}(n) \quad+\quad 1.S_x(n) \end{aligned}$$

$S_{x-1}(n)$ se simplifie et en réarrangeant

$$S_{x-1}(n)=\frac{1}{x}\left\{(n+1)^x-1-\sum_{k=0}^{x-2} C_x^k S_k(n)\right\}$$

D'où par récurrence

$$S_x(n)=\frac{1}{x+1}\left\{(n+1)^{x+1}-1-\sum_{k=0}^{x-1} C_{x+1}^k S_k(n)\right\}$$

QED

<u>Démonstration du Cas 2</u> :

a) Calculs intermédiaires

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} S_x(n,r)=\sum_{j=1}^{n}\frac{j^x}{(1+r)^j} \\ S_x(n+1,r)=\sum_{j=1}^{n+1}\frac{j^x}{(1+r)^j}\end{array}\right\} S_x(n+1,r)=S_x(n,r)+\frac{(n+1)^x}{(1+r)^{n+1}} \\ V_x(n,r)=\sum_{j=1}^{n}\frac{(j+1)^x}{(1+r)^j} \Leftrightarrow V_x(n,r)=(1+r)S_x(n+1,r)-1 \end{array}\right\} V_x(n,r)=(1+r)S_x(n,r)+\frac{(n+1)^x}{(1+r)^n}-1$$

b) Même raisonnement que pour le cas 1 :

$$V_x(n,r)=\sum_{k=0}^{x}C_x^k S_k(n,r)$$

c) Egalisation des deux résultats précédents

$$(1+r)S_x(n,r)+\frac{(n+1)^x}{(1+r)^n}-1=\sum_{k=0}^{x}C_x^k S_k(n,r)=\sum_{k=0}^{x-1}C_x^k S_k(n,r)+C_x^x S_x(n,r)$$

$$\frac{(n+1)^x}{(1+r)^n}-1-\sum_{k=0}^{x-1}C_x^k S_k(n,r)=S_x(n,r)\left[1-(1+r)\right]$$

$$S_x(n,r)=\frac{1}{r}\left[1-\frac{(n+1)^x}{(1+r)^n}+\sum_{k=0}^{x-1}C_x^k S_k(n,r)\right]$$

QED