Université de Montpellier IAE M2 SIAD 2022-2023

ANALYSE FINANCIERE des RISQUES

OBLIGATIONS & TAUX D'INTERET

Pr. Alain FRANCOIS-HEUDE alain.francois-heude@umontpellier.fr

https://moodle.umontpellier.fr/ Cours : **AFH M2 SIAD IAE**

QUIZZ Valeurs au 12/09/22 à 14h10 Paris

Source : www.boursorama.fr

Valeur du CAC 40	6 295
Valeur du DJIA =	32 152
Valeur du Nikkei 225 =	28 542

Source : www.oanda.com

Taux EUR-USD =	1,0152
Taux EUR-GBP =	0,8752
Taux EUR-JPY =	144,67

Pétrole WTI $=	87,37
Pétrole Brent $=	93,71

Source : http://www.lme.com/

Cuivre $/T =	7 984
Aluminium $/T =	2 280

Source : http://www.lbma.org.uk/

Or once $ =	1 733
Argent once $ =	19,43

Blé cts/bushel	783
€ / Tonne	343

Source : http://www.cmegroup.com/

CO2 EUA €/T =	68,20

Source : https://www.eex.com/en/

Quelques Taux d'Intérêt en France et en UE

€STR : (ESTER) **E**uro **S**hort-**T**erm **R**ate of the **European Central Bank** (ECB)

Taux de référence pour l'Euro au jour le jour . Moyenne pondérée par les transactions en interbancaire (pour les emprunteurs) des établissements contributeurs. Diffusion en j+1 au matin. Base de calcul : Exact / 360 avec 3 décimales

Historique le TMP (**T**aux **M**oyen **P**ondéré) est remplacé au début 1999 par l'EONIA (**E**uro **O**ver**N**ight **I**ndex **A**verage). En octobre 2019, l'€STR entre en vigueur L'€STR (emprunteurs) correspond approximativement à l'EONIA + 8.5 basis points

EURIBOR : **EUR**o **I**nter**B**ank **O**ffered **R**ate

Taux de référence pour les transactions en Euro entre banques pour des échéances de 1 semaine à 12 mois (13 échéances). Base de calcul : Exact / 360 avec 3 déc. Publication à 11h00 (CET) pour des opérations en j+2.

Ce sont les taux directeurs qui permettent de bâtir la plupart des montages financiers

European Money Markets Institute (EMMI)

Source : http://www.emmi-benchmarks.eu/

Taux d'Intérêt en FRANCE

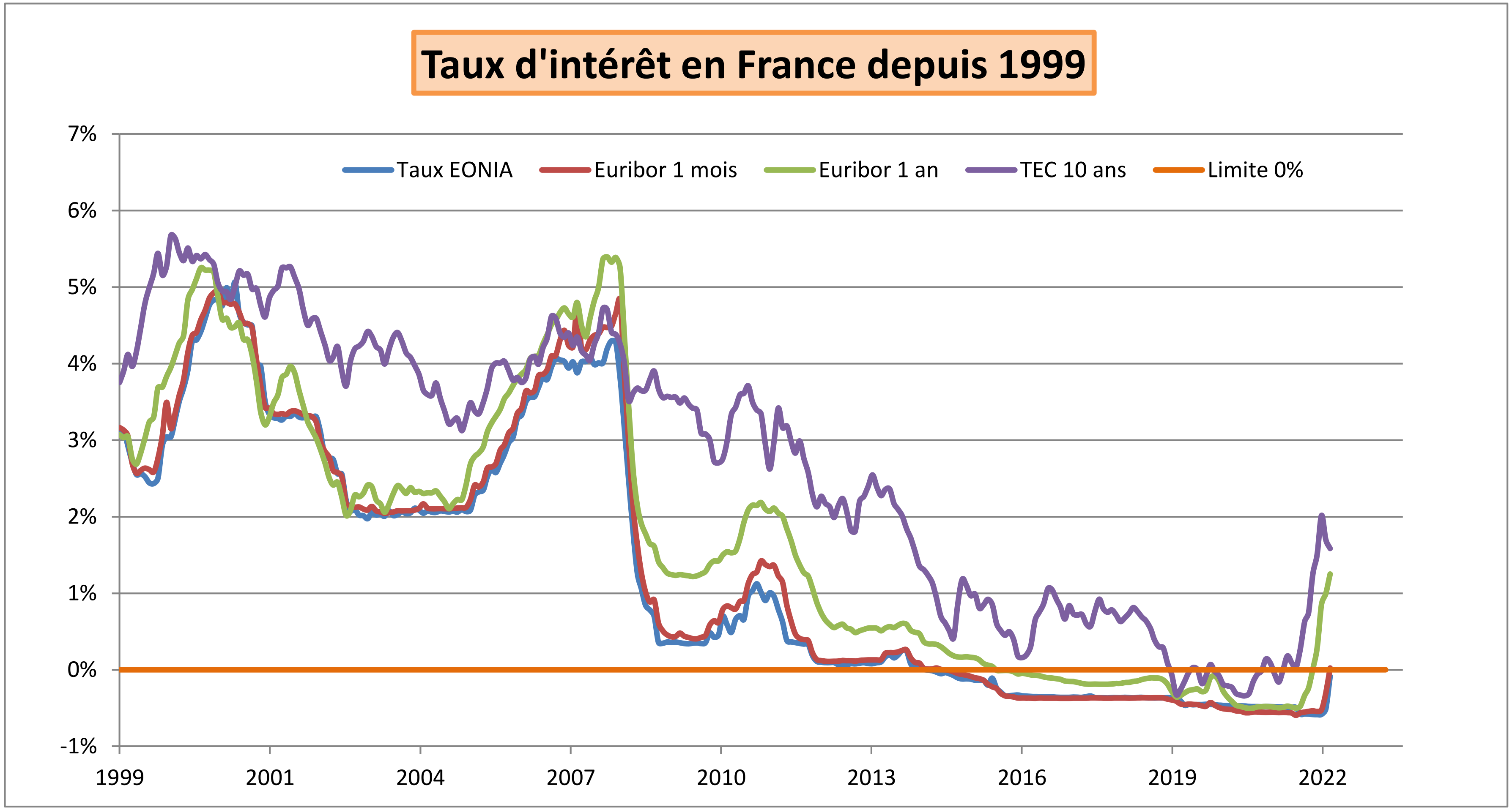
Exemple : une banque prête un milliard d'€ au taux de 1,80% pour un jour
Montant des intérêts dus ?

Intérêts = 49 315€ = 1 000 000 000 € * (1,80% / 360) → Taux 0,005%

Le taux €STR se combinent aussi en base annuelle
- moyenne mensuelle arithmétique,
- moyenne capitalisée (TAM)
- moyenne glissantes (TAG)

Il y a différents taux monétaires au jour le jour :
Overnight, (***O/N)***, de j à j+1 ouvré
Tom Next, (***T/N)***, de j+1 ouvré à j+2 ouvré (pour *Tomorrow Next*)
Spot Next, (***S/N)***, de j+2 ouvré à j+3 ouvré

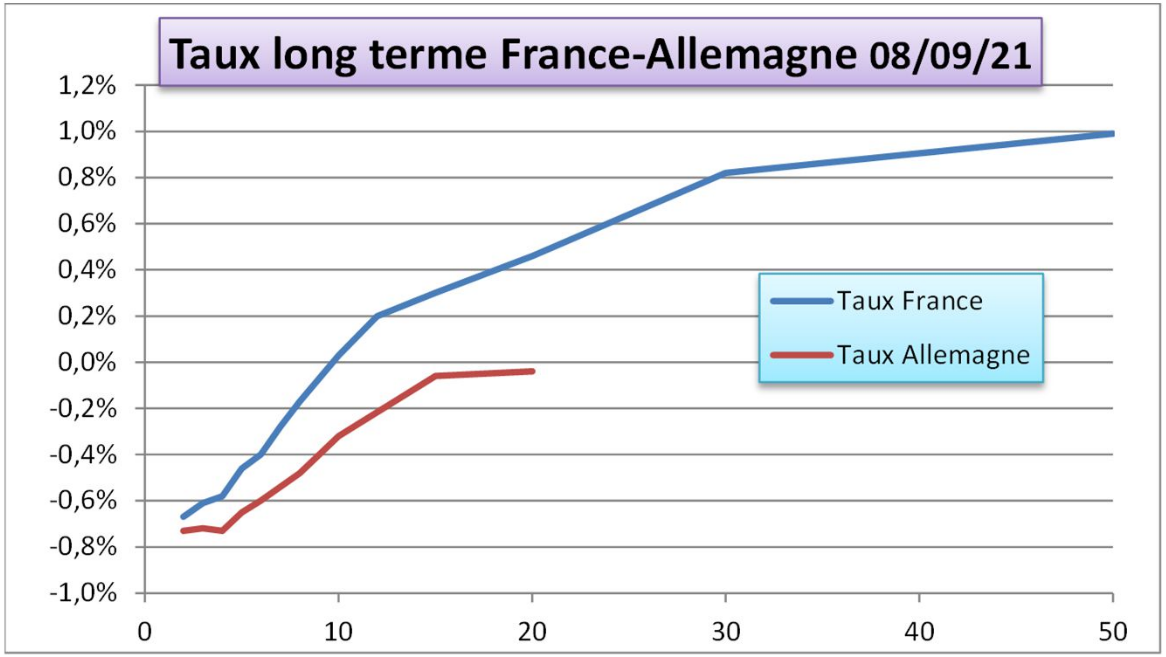
Londres	= **L** I B O R,	**P**aris	= **P** I B O R,
Copenhagen	= **C** I B O R,	**ST**ockholm	= **ST** I B O R,
Oslo	= **O** I B O R,	**T**okyo	= **T** I B O R,
Madrid	= **M** I B O R,	**B**ruxelles	= **B** I B O R



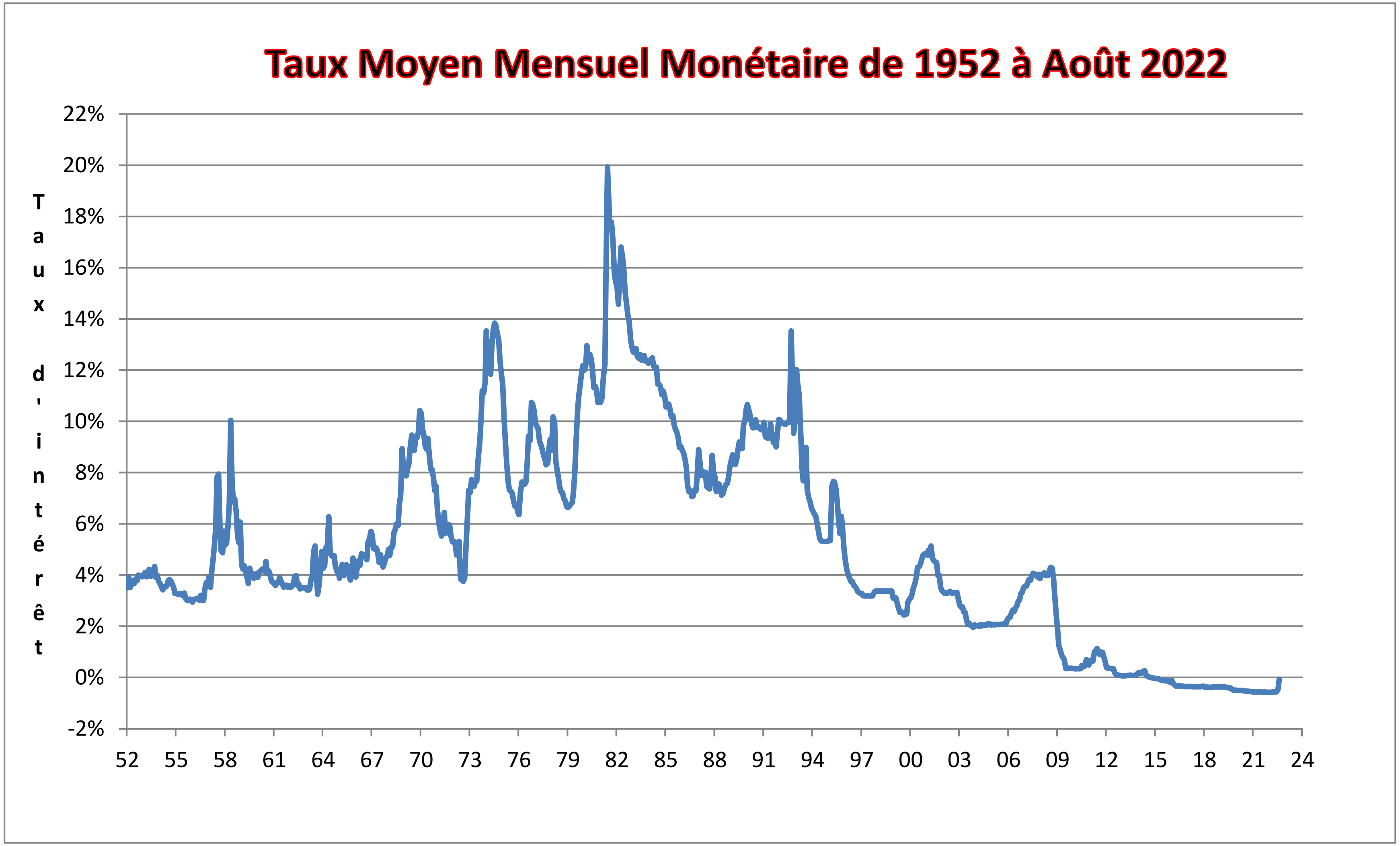
Sources : http://www.emmi-benchmarks.eu/ [**Taux Euribor et EONIA**]
http://www.banque-france.fr

Courbe des taux sur titres d'État français

Ans	France	Allemagne
2	-0,67%	-0,73%
3	-0,61%	-0,72%
4	-0,58%	-0,73%
5	-0,46%	-0,65%
6	-0,40%	-0,60%
7	-0,28%	-0,54%
8	-0,17%	-0,48%
10	0,03%	-0,32%
12	0,20%	
15	0,30%	-0,06%
20	0,46%	-0,04%
30	0,82%	
50	0,99%	

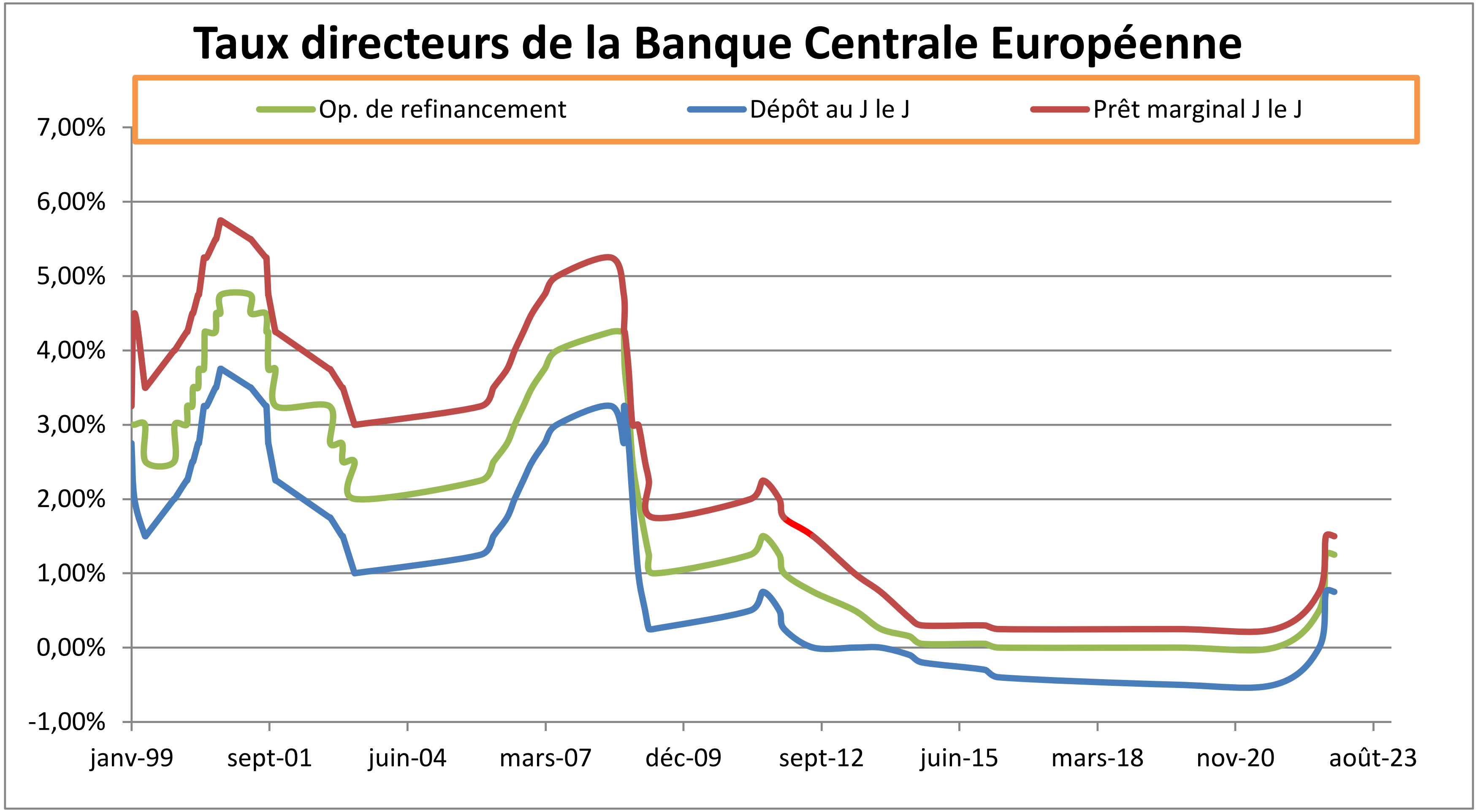


https://www.boursorama.com/bourse/taux/souverains/



Séries : T4M 1952-2014 puis EONIA 2014-2021 puis €ster 2022- ?

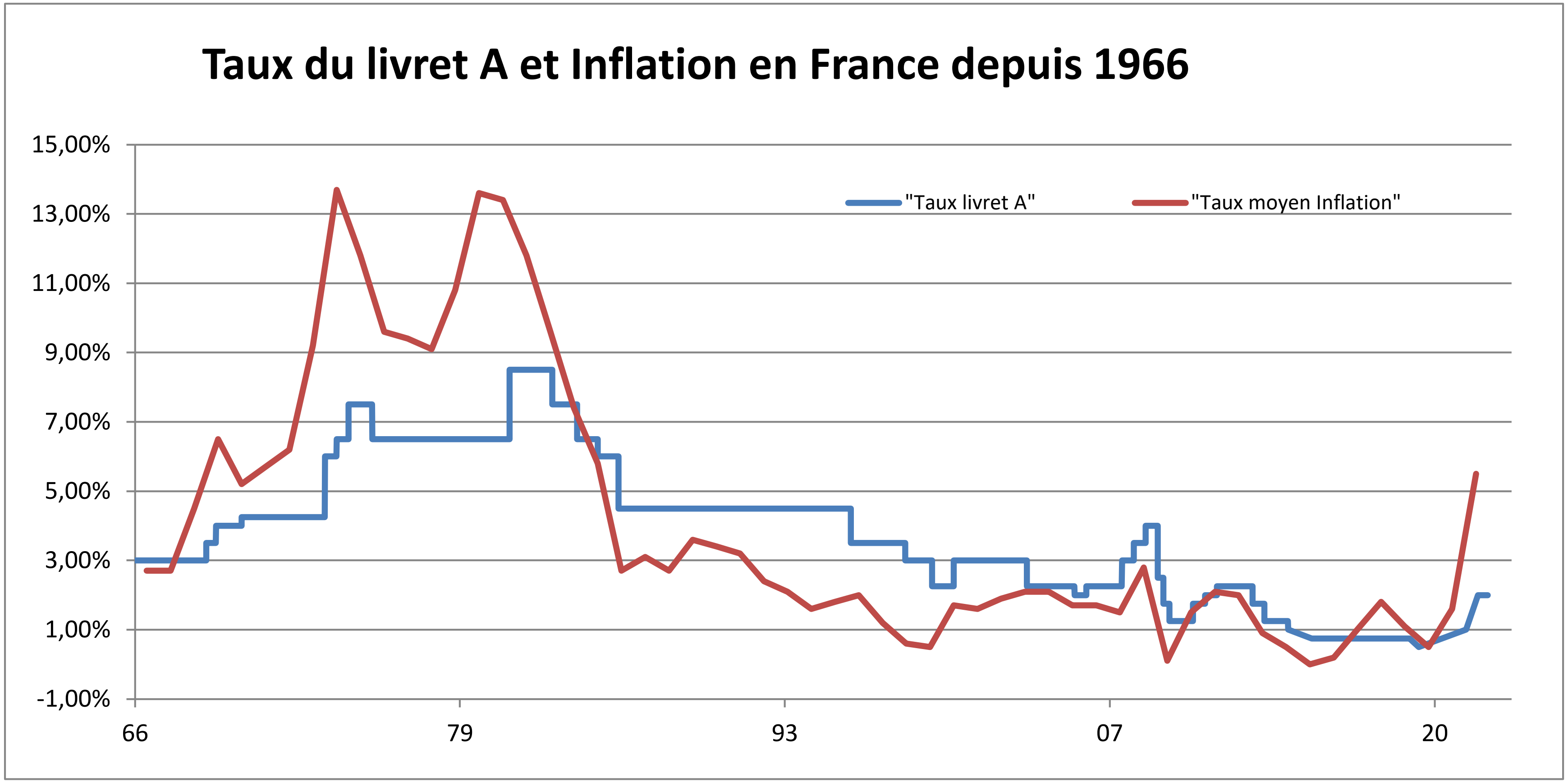
http://www.banque-france.fr/fileadmin/statistiques/fr/base/html/tmf_mens_zeuro_fr_tauxmarmonet.html

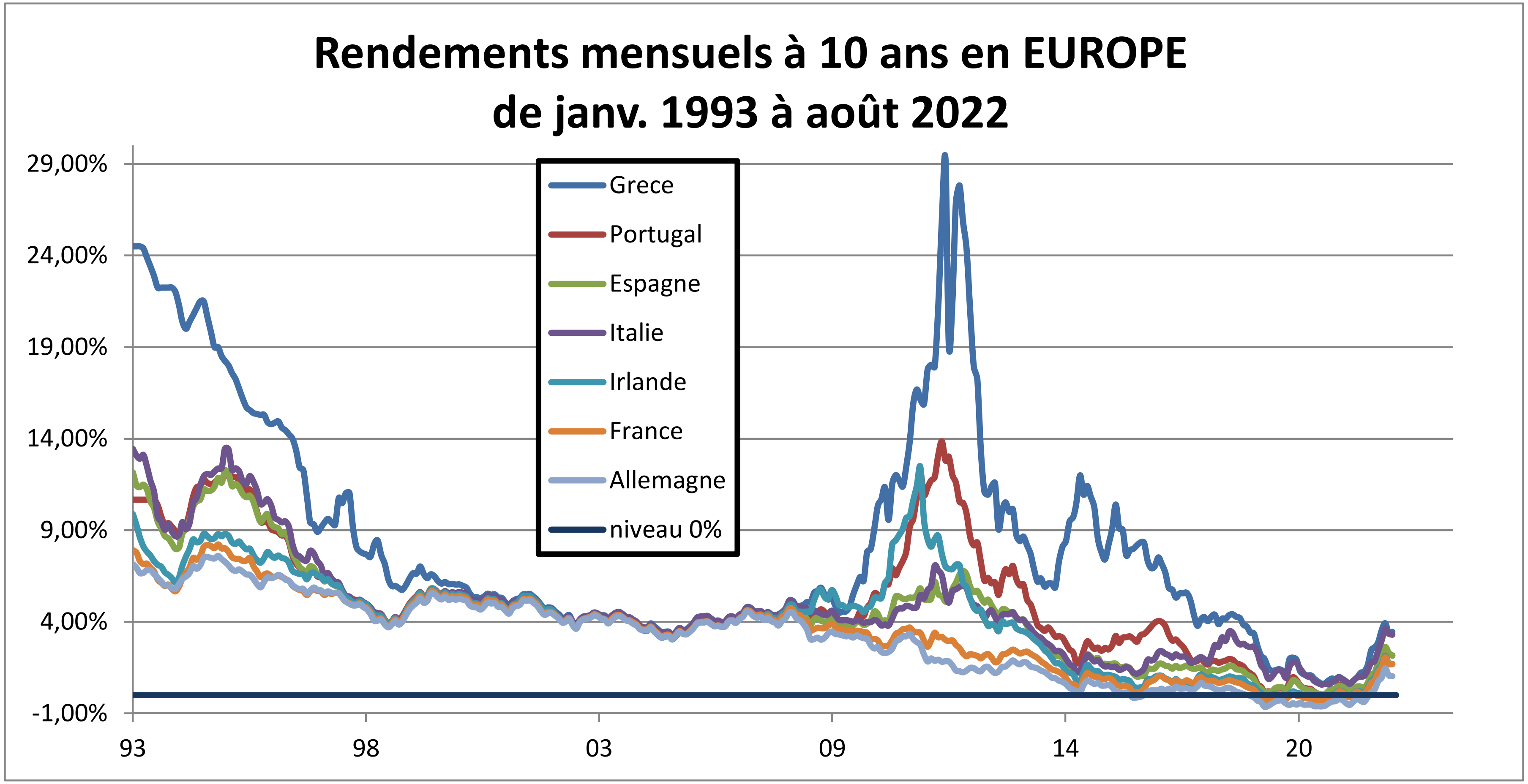


1 – Opérations de refinancement		1,25%
2 – Facilités : dépôt au jour le jour		0,75%
3 – Facilités : prêt marginal au jour le jour		1,50%

Source : BCE

https://www.banque-france.fr/statistiques/taux-et-cours/les-taux-monetaires-directeurs


Taux du livret A et Inflation en France depuis 1966
15,00%
13,00%
11,00%
9,00%
7,00%
5,00%
3,00%
1,00%
-1,00%
66
79
93
07
20
"Taux livret A"
"Taux moyen Inflation"



http://www.ecb.int

Après la crise en Irlande, puis en Grèce, les taux convergent à nouveau,
Sauf pour la Grèce et l'Italie !
Allemagne : taux très bas (-0,45% en 07-21) !

Plan de la séance

- Rappel sur les dettes (évaluation)
- Volatilité du taux de rendement actuariel
- Les âges d'une dette
- La variabilité d'une dette imputable à une variation du taux de rendement
- Quelques taux d'intérêt de référence
- Les taux d'intérêt à terme
- Quelques outils de gestion du risque de taux d'intérêt

Forme générale d'un emprunt

$$V_0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{F_j}{(1+r)^j}$$

V0 = valeur de marché de la dette en % du Nominal
F_j = Coupon $(_j)$ + Remboursement $(_j)$
r = taux de rendement actuariel du titre
i = taux de coupon nominal de la dette
n = maturité (date de fin de l'emprunt)

- cas d'un Zéro Coupon [j = n (la maturité), $F_j = 0$ (j=1, 2, n-1) et $F_n = 1$]
- cas d'une Rente Perpétuelle [j=1, 2, ... , ∞ avec $F_j = i$ (i = taux de coupon)]
- cas d'une obligation In Fine [j=1, 2, ... n avec $F_j = i$ (j=1, 2, n-1) et $F_n = 1 + i$]
- cas d'un emprunt à Annuités Constantes [j=1, 2, ... n avec $F_j = A$]
- cas d'une dette à Remboursement Constant [j=1, 2, ... n avec $F_j = C_j + 1/n$]

Rappel des formules de suites de termes

le minimum à retenir

$$S_{SPC}(n) = \sum_{j=1}^{n} a = an$$

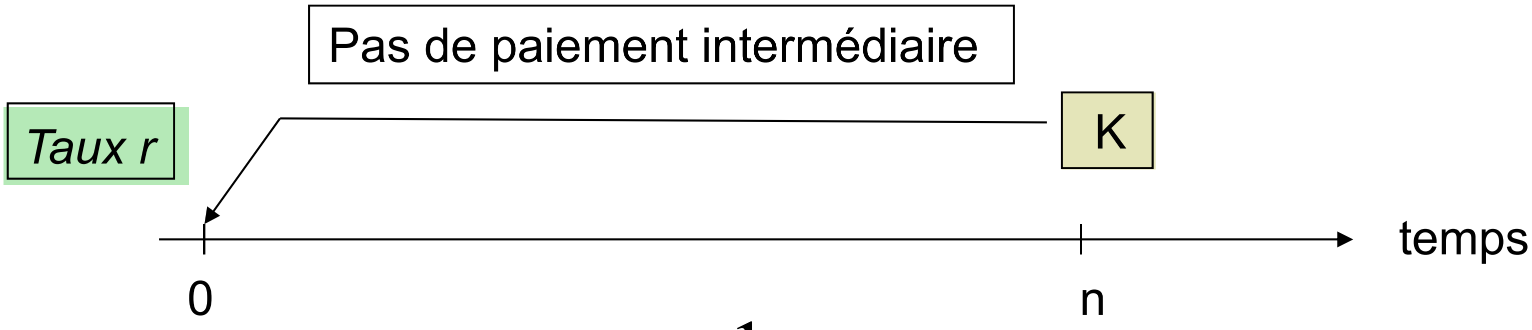
$$S_{SPA}(n) = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_{SPG}(n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^j} = \left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right]$$

$$S_{SPM}(n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{(1+r)^j} = \left[\frac{(1+r)-(1+r+rn)(1+r)^{-n}}{r^2}\right]$$

se référer au document en ligne (Suites1.pdf) pour les démonstrations et extensions

Cas du Zéro Coupon (ZC)



V_0

$$V_0(ZC) = \frac{1}{(1+r)^n} = (1+r)^{-n}$$

En posant K = 1

Selon la forme du contrat, les intérêts peuvent être payés :

- soit au début (Intérêts Payés d'Avance)
- soit à la fin (Intérêts Fin ou In Fine)

$$V_0(ZC_n) = (1+r)^{-n} \Rightarrow (1+r)^n = \left(\frac{1}{V_0(ZC_n)}\right) \Rightarrow (1+r) = \left(\frac{1}{V_0(ZC_n)}\right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Le rendement actuariel du ZC est donc :

$$\boxed{r = (V_0)^{\left(-\frac{1}{n}\right)} - 1}$$

et sa durée

$$\boxed{n = \frac{\log\left(1/V_0\right)}{\log(1+r)}}$$

Cas de la Rente Perpétuelle (RP)

En posant K = 1 :

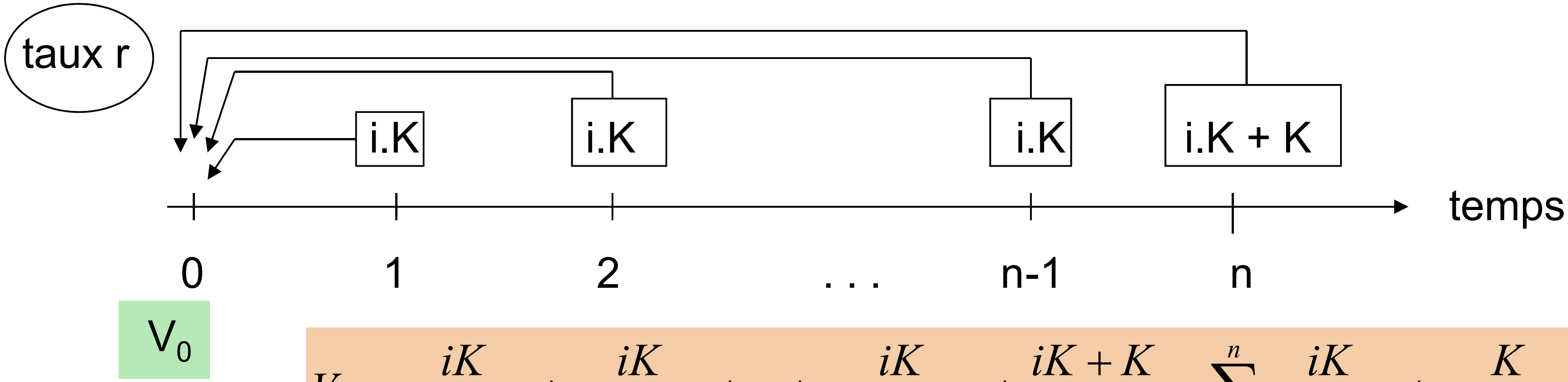
$$V_0 = \frac{i}{(1+r)^1} + \frac{i}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{i}{(1+r)^n} + \ldots + \frac{i}{(1+r)^\infty} = i\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^j} = i\left[\frac{1-(1+r)^{-\infty}}{r}\right] = \frac{i}{r}$$

$$\boxed{V_0(RP) = \frac{i}{r}}$$

son rendement est de $r = \dfrac{i}{V_0}$

Cas de l'obligation *In Fine* (IF)

<u>Principe</u> : l'emprunt est remboursé en une seule fois et les intérêts sont payés à la fin de chaque année (période)



$$V_0 = \frac{iK}{(1+r)^1} + \frac{iK}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{iK}{(1+r)^{n-1}} + \frac{iK+K}{(1+r)^n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{iK}{(1+r)^j} + \frac{K}{(1+r)^n}$$

En posant K = 1 :

$$V_0(IF) = \frac{i}{r} + \left(\frac{r-i}{r}\right)(1+r)^{-n}$$

$r = i \rightarrow V_0 = 1$

$r > i \rightarrow V_0 < 1$

$r < i \rightarrow V_0 > 1$

Le taux de rendement actuariel s'obtient par itérations ou avec la fonction TRI de Excel

Cas de l'obligation à Annuités constantes (AC)

<u>Principe</u> : l'emprunt est remboursé avec un paiement identique (capital + intérêts) à la fin de chaque année (période)

V_0

$$A = \frac{iK}{1-(1+i)^{-n}}$$

En posant K = 1 :

$$\boxed{V_0(AC) = \left(\frac{i}{r}\right)\left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{1-(1+i)^{-n}}\right)}$$

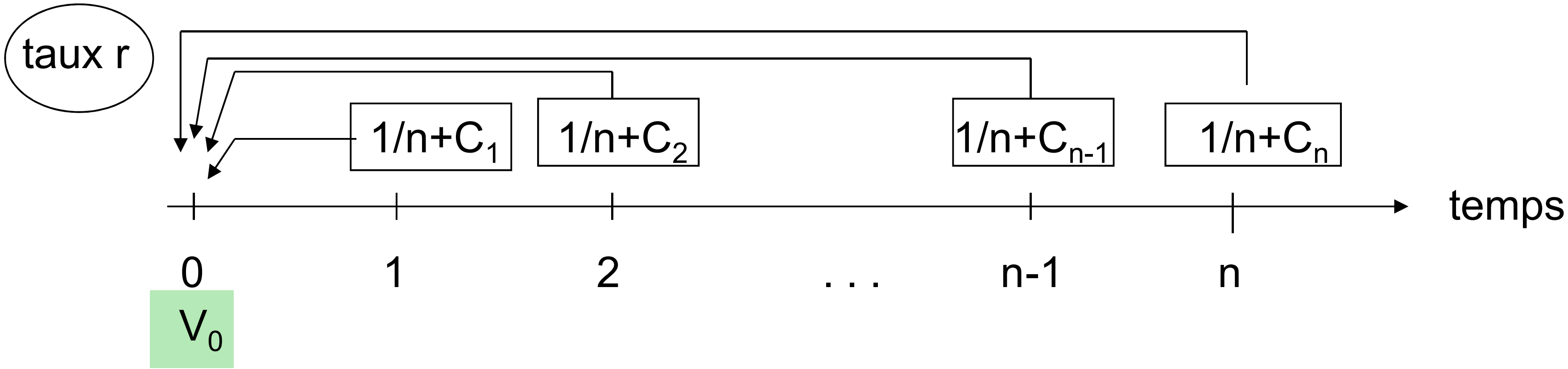
$r = i \rightarrow V_0 = 1$

$r > i \rightarrow V_0 < 1$

$r < i \rightarrow V_0 > 1$

Le taux de rendement actuariel s'obtient par itérations ou avec la fonction TRI de Excel

Cas de l'obligation à Remboursement Constant (SEA)



$$V_0 = \frac{(1+i(n))/n}{(1+r)^1} + \frac{(1+i(n-1))/n}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{(1+i(n-n+2))/n}{(1+r)^{n-1}} + \frac{(1+i1)/n}{(1+r)^n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\left[1+i(n-j+1)\right]/n}{(1+r)^j}$$

$$V_0(SEA) = \frac{i}{r} + \left(\frac{r-i}{nr}\right)\left(\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right)$$

Le taux de rendement actuariel s'obtient par itérations ou avec la fonction TRI de Excel

Volatilité du rendement

Pour une dette à remboursement fractionné, il existe une incertitude quant à la date de remboursement. Le rendement actuariel, r, représente un taux moyen.

Exemple, un emprunt sur n = 5 ans, au taux de coupon i = 9% et de rendement r = 7,50%

	Rbt IN FINE		
	Flux	%Rbt	Tx Rdt
1	9,00%	0%	
2	9,00%	0%	
3	9,00%	0%	
4	9,00%	0%	
5	109,00%	100%	7,50%
	Prix Vo		106,07%
		E(r) =	7,50%
		σ(r) =	0%

	Rbt par AC			Tx Rdt
	Flux	%Rbt	Tx Rdt	sur 5 ans
1	25,71%	16,71%	4,79%	6,95%
2	25,71%	18,21%	6,79%	7,23%
3	25,71%	19,85%	7,46%	7,48%
4	25,71%	21,64%	7,79%	7,71%
5	25,71%	23,59%	7,99%	7,92%
			Prix Vo	104,02%
			E(r) =	7,50%
			σ(r) =	0,339%

	Rbt par SEA			Tx Rdt
	Flux	%Rbt	Tx Rdt	sur 5 ans
1	29,00%	20,00%	4,99%	6,99%
2	27,20%	20,00%	6,89%	7,27%
3	25,40%	20,00%	7,53%	7,52%
4	23,60%	20,00%	7,85%	7,75%
5	21,80%	20,00%	8,04%	7,96%
			Prix Vo	103,82%
			E(r) =	7,50%
			σ(r) =	0,343%

Le taux de rendement actuariel est calculé sur la base d'un remboursement en j (j=1, 2 … 5)
Le taux de rendement sur 5 ans suppose un réinvestissement des flux perçus au taux r sur les (5-j) années restantes avant l'échéance.
L'espérance et l'écart type sont calculés en pondérant par les % de Rbt de chaque année.

Remarques :

- le rendement actuariel promis est pour l'emprunteur
- le prêteur détient en fait une obligation In fine à date de remboursement aléatoire
- la volatilité du rendement pour le prêteur augmente avec | r – i |

Mesures d'âge d'un emprunt

A la recherche d'un indicateur instantané
de durée qui permet de différencier les titres
en prenant en compte tous les paramètres.

<u>Paramètres disponibles</u> :

- les dates de paiement du contrat
- le remboursement du capital
- le paiement des intérêts
- le taux d'actualisation

- la Maturité ou l'échéance
- la Vie Probable
- la Vie Moyenne
- Le Délai de Récupération
- la Vie Moyenne Pondérée
- l'Echéance Moyenne
- la Duration

Mesures d'âge : la MATURITE

Maturité : durée de vie restant à courir jusqu'au dernier paiement depuis la date d'émission ou la date actuelle

- Zéro Coupon → Maturité (ZC) = n
- Rente Perpétuelle → Maturité (RP) ∞
- Obligation In Fine → Maturité (IF) = n
- Annuités Constantes → Maturité (AC) = n
- Séries Egales Annuelles → Maturité (SEA) = n

La maturité diminue linéairement avec le temps

Avantage : notion simple avec un contenu juridique solide
Inconvénient : ne tient pas compte des paiements intermédiaires ni du taux

Mesures d'âge : la VIE PROBABLE

<u>Vie Probable</u> : durée à laquelle au moins la moitié de l'emprunt est remboursée

$$vp(\cdot) = x \quad \text{avec} \quad \sum_{j=1}^{vp(.)} \mu_j = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \quad \mu_j = \%\ \text{de Remboursement en j}$$

- Zéro Coupon → vp (ZC) = n
- Rente Perpétuelle → vp (RP) n'a pas de sens
- Obligation In Fine → vp (IF) = n
- Annuités Constantes → $vp(AC) = \dfrac{\log\left[\left((1+i)^n + 1\right)/2\right]}{\log(1+i)}$
- Séries Egales Annuelles → vp (SEA) = n/2

Avantage : autorise un classement, pour un même n : vp(ZC) = vp(IF) > vp(AC) > vp(SEA)
Inconvénient : c'est une notion d'assurance pas de finance

Mesures d'âge : la VIE MOYENNE

<u>Vie Moyenne</u> : somme des dates d'occurrence de remboursement de capital multipliées par le pourcentage de capital remboursé

$$vm(\cdot) = \sum_{j=1}^{n} j.\mu_j \qquad \text{avec} \qquad \sum_{j=1}^{n} \mu_j = 1$$

- Zéro Coupon → vm (ZC) = n
- Rente Perpétuelle → vm (RP) n'a pas de sens
- Obligation In Fine → vm (IF) = n
- Annuités Constantes → $$\boxed{vm(AC) = \frac{n}{1-(1+i)^{-n}} - \frac{1}{i}}$$
- Séries Egales Annuelles → vm (SEA) = (n+1)/2

Avantage : classement, pour un même n : vm(ZC) = vm(IF) > vm(AC) > vm(SEA)
Inconvénient : ne prend pas en compte les intérêts et le taux d'actualisation

Mesures d'âge : la VIE MOYENNE PONDEREE

<u>Vie Moyenne Pondérée</u> : somme des dates d'occurrence des flux multipliées par la proportion mise en paiement

$$vmp(\cdot) = \sum_{j=1}^{n} j.\omega_j \quad \text{avec} \quad \sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1 \ \text{ et } \ \omega_j = \frac{F_j}{\sum_{k=1}^{n} F_k}$$

- Zéro Coupon → vmp (ZC) = n
- Rente Perpétuelle → vmp (RP) n'a pas de sens
- Obligation In Fine → $vmp(IF) = \dfrac{n\left[i(n+1)+2\right]}{2\left[ni+1\right]}$
- Annuités Constantes → vmp (AC) = (n+1)/2 → *même vmp pour tout i !*
- Séries Egales Annuelles → $vmp(SEA) = \dfrac{n+1}{2} - \left(\dfrac{n-1}{6}\right)\left(1 - \dfrac{2}{2+i(n+1)}\right)$

Avantage : très utilisé sur le marché et vmp(ZC) > vmp(IF) > vmp(AC) > vmp(SEA)
Inconvénient : ne prend pas en compte le taux d'actualisation

Mesures d'âge : le DELAI de RECUPERATION

<u>Délai de Récupération</u> : durée à laquelle la valeur nominale de l'emprunt est compensée par les remboursements et les intérêts

$$dr(\cdot) = x \quad \text{avec} \quad \sum_{j=1}^{dr(.)} \omega_j = 1 \quad \text{et} \quad \omega_j = \% \text{ de Paiement en j}$$

• Zéro Coupon	dr (ZC) = n
• Rente Perpétuelle	dr (RP) = 1 / i
• Obligation In Fine	dr (IF) = Min (1 / i , n)
• Annuités Constantes	dr (AC) = 1 / AC
• Séries Egales Annuelles	dr (SEA) = peu d'intérêt à calculer!

Avantage : autorise un classement, pour un même n : dr(ZC) >= dr(IF) > dr(AC) > dr(SEA)

Inconvénient : c'est une notion de choix d'investissement , pas de finance …

Mesures d'âge : l' ECHEANCE MOYENNE

Echéance Moyenne : date d'équivalence du prix du titre et d'un placement unique égal à la somme de tous les paiements actualisés au même taux

$$V_0(.) = \sum_{j=1}^{n} \frac{F_j}{(1+r)^j} = \left(\sum_{j=1}^{n} F_j\right)(1+r)^{-em(.)} \Rightarrow em(.) = \ln\left[\sum_{j=1}^{n} F_j / \sum_{j=1}^{n} F_j (1+r)^{-j}\right] / \ln(1+r)$$

- Zéro Coupon → em (ZC) = n
- Rente Perpétuelle → em (RP) n'a pas de sens
- Obligation In Fine → $em(IF) = \ln\left[r(in+1)/(i+(r-i)(1+r)^{-n}\right] / \ln(1+r)$
- Annuités Constantes → $em(AC) = \ln\left[rn/\left(1-(1+r)^{-n}\right)\right] / \ln(1+r)$
- Séries Egales Annuelles → $em(SEA) = \ln\left[\left(nr^2(2+in+i)\right)/\left(2\left[inr+(r-i)(1-(1+r)^{-n})\right]\right)\right] / \ln(1+r)$

Avantages : utilise le taux d'actualisation et em(ZC) > em(IF) > em(AC) > em(SEA)
Inconvénients : notion liée à l'escompte (pas au marché obligataire), ignore les dates de paiements des flux

Mesures d'âge : la DURATION

Duration : somme des dates d'occurrence des flux multipliées par la proportion actualisée mise en paiement

$$D(\cdot) = \sum_{j=1}^{n} j.\omega_j \quad \text{avec} \quad \sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1 \ \text{ et } \ \omega_j = \frac{F_j (1+r)^{-j}}{V_0(.)}$$

- Zéro Coupon
- Rente Perpétuelle
- Obligation In Fine
- Annuités Constantes
- Séries Egales Annuelles

D (ZC) = n

$$D(RP) = \frac{1+r}{r}$$

$$D(IF) = \frac{1+r}{r} - \frac{(1+r) - n(r-i)}{i(1+r)^n + (r-i)}$$

$$D(AC) = \frac{1+r}{r} - \frac{n}{(1+r)^n - 1}$$

$$D(SEA) = \frac{1+r}{r} - \frac{(1+r)i - (1+r)^{-n}\left[(1+r)i - (r-i)rn\right]}{r\left[inr + (r-i)\left(1-(1+r)^{-n}\right)\right]}$$

Avantage : utilisé sur le marché et D(ZC) > D(IF) > D(AC) > D(SEA)
Inconvénient : reste à trouver !

Mesures de volatilité

A la recherche d'un indicateur instantané de volatilité qui traduit l'intensité des variations de prix en fonction des variations du taux de rendement r.

- **Les mesures classiques**
  - la Variabilité
  - la Sensibilité
  - l' Elasticité
- **Les autres mesures**
  - la Duration
  - la Convexité
  - le M2

Mesures classiques de volatilité : le Taux de Variation

<u>Le taux de variation</u> (ou Variabilité) mesure un écart absolu du prix du titre pour un écart absolu du taux de rendement

$$Va = \frac{dV_0}{d(1+r)} = \frac{\partial V_0}{\partial(1+r)} \quad \text{avec} \quad V_0 = \frac{F_1}{(1+r)^1} + \frac{F_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{F_n}{(1+r)^n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{F_j}{(1+r)^j}$$

$$\boxed{\begin{aligned} dV_0 &= \left[\frac{-1F_1}{(1+r)^2} + \frac{-2F_2}{(1+r)^3} + \ldots + \frac{-nF_n}{(1+r)^{n+1}} \right] d(1+r) = \sum_{j=1}^{n} \frac{-jF_j}{(1+r)^{j+1}} d(1+r) \\ Va &= \frac{dV_0}{d(1+r)} = -\frac{1}{(1+r)} \left[\sum_{j=1}^{n} \frac{jF_j}{(1+r)^j} \right] \end{aligned}}$$

Sur le marché, on prend une variation de taux d(1+r) = 0,10%

Mesures classiques de volatilité : la Sensibilité

La Sensibilité mesure un écart relatif du prix du titre pour un écart absolu du taux de rendement

$$Se = \frac{dV_0}{d(1+r)}\frac{1}{V_0} = \frac{\partial V_0 / V_0}{\partial(1+r)} = \frac{1}{V_0}Va$$

$$\frac{dV_0}{V_0} = \left[-\frac{1}{V_0(1+r)}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{jF_j}{(1+r)^j}\right]\right]d(1+r)$$

$$Se = \frac{dV_0}{d(1+r)}\frac{1}{V_0} = \left[-\frac{1}{(1+r)}\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{jF_j / V_0}{(1+r)^j}\right]\right]$$

L'impact de la variation de prix est d'autant plus importante que le prix est faible

Sur le marché, on prend une variation de taux d(1+r) = 1%

Mesures classiques de volatilité : l' Elasticité

L'élasticité mesure un écart relatif du prix du titre pour un écart relatif du taux de rendement

$$El = \frac{dV_0 / V_0}{d(1+r)/(1+r)} = \frac{dV_0}{d(1+r)} \cdot \frac{(1+r)}{V_0} = Se \cdot (1+r)$$

$$Se = \frac{dV_0}{d(1+r)} \frac{1}{V_0} = \left[-\sum_{j=1}^{n} \frac{jF_j / V_0}{(1+r)^j} \right] = -\left[\frac{\sum_{j=1}^{n} jF_j (1+r)^{-j}}{\sum_{j=1}^{n} F_j (1+r)^{-j}} \right]$$

L'impact de la variation de prix est d'autant plus importante que le prix est faible

$$El = -\left[\frac{\sum_{j=1}^{n} jF_j (1+r)^{-j}}{\sum_{j=1}^{n} F_j (1+r)^{-j}} \right] (1+r)$$

Sur le marché, on n'utilise pas cette mesure, empruntée à l'économie

Autres mesures de volatilité : la duration

La Duration s'apparente à la mesure de Sensibilité (ou le négatif de l'élasticité)

$$Se = -\frac{1}{(1+r)}\sum_{j=1}^{n} j\omega_j = -\frac{D}{(1+r)} \qquad \text{avec} \qquad \omega_j = \frac{F_j(1+r)^{-j}}{V_0} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n}\omega_j = 1$$

$$\boxed{D = -Se \cdot (1+r)}$$

D → Duration au sens de Macaulay
D* = D/(1+r) → Duration modifiée (Hicks)

$$\frac{dV_0}{V_0} = -\frac{D}{(1+r)}d(1+r)$$

La performance est linéairement décrite par la Duration

La duration révèle la capacité d'immunisation d'un titre à une variation unique du taux de rendement. Pour cela, la période de détention doit correspondre à la Duration (D)

En cas de hausse du taux, le prix baisse immédiatement mais les coupons peuvent être réinvestis à un taux plus élevé.
La valeur acquise à la date D est égale à la valeur initiale du titre capitalisée au taux initial

Exemple d'immunisation

Une obligation IN FINE a un taux de coupon de 10% et une maturité de 10 ans
Le prix de marché est de 97,50% soit un taux de rendement de 10,4141%

Un calcul montre que la Duration est de 6,7159 ans ou la sensibilité de - 6,0825
La valeur acquise à un horizon D = 6, 7159 ans est de 1,8965

Que se passe-t-il si le taux de rendement augmente de+1% → r*=11,4141%

Valeur du titre avec un taux r* = Incidence du réinvestissement des coupons jusqu'en D + Incidence de la revente du titre en D au taux r*

$$V^*_{D*} = 10\%\left[(1,114\%)^{5,72} + \ldots + (1,114\%)^{0,72}\right] + \frac{10\%}{(1,114\%)^{0,28}} + \ldots + \frac{110\%}{(1,114\%)^{3,28}}$$

$$1,8974 = 0,8639 + 1,0335$$

Avec un titre à Zéro Coupon, le taux est verrouillé jusqu'à l'échéance.

Immunisation et duration

Soit : D = E + x avec E la partie entière de D et x la partie décimale
r* le taux après variation

L'obligation *In Fine* a un prix $V_0(r)$ à la date 0 a une valeur acquise en D de $V_D(r)$:

$$V_D = V_0(r)\left[(1+r)^D\right]$$

Le réinvestissement des coupons jusqu'en D et la revente du titre en D donne

$$V_D^* = i(1+r^*)^x\left[\frac{(1+r^*)^E - 1}{r^*}\right] + (1+r^*)^x\left[\frac{i}{r^*} + \left(\frac{r^* - i}{r^*}\right)(1+r^*)^{E-n}\right]$$

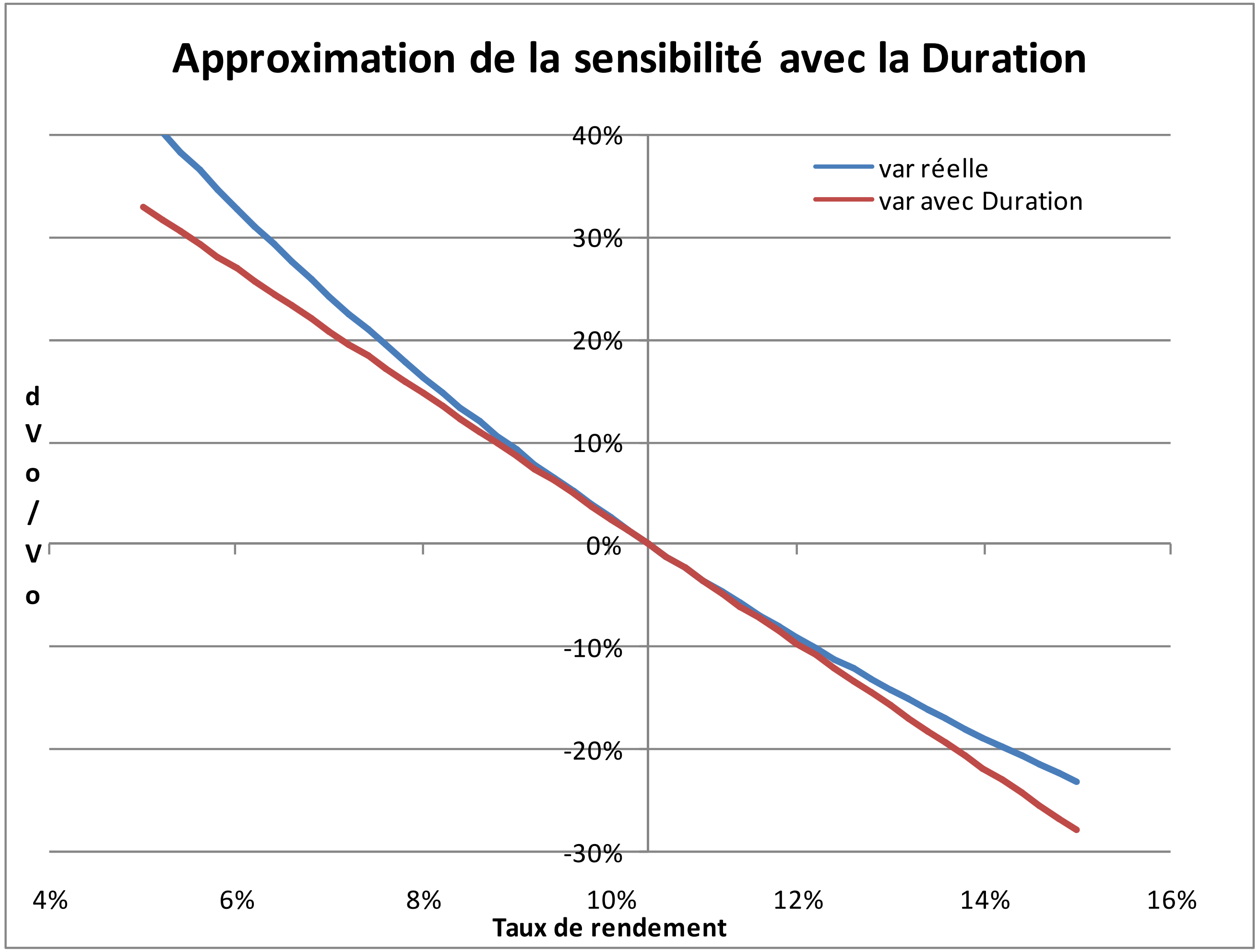
$$V_D^* = (1+r^*)^{E+x}\left[\frac{i}{r^*} + \left(\frac{r^* - i}{r^*}\right)(1+r^*)^{-n}\right]$$

$$V_D^* = V_0(r^*)\left[(1+r^*)^D\right] \qquad \text{en fixant} \quad V_D^* = V_D$$

$$V_0(r)\left[(1+r)^D\right] = V_0(r^*)\left[(1+r^*)^D\right]$$

$$D = \frac{\ln\left[\frac{V_0(r^*)}{V_0(r)}\right]}{\ln\left[\frac{1+r}{1+r^*}\right]} = \left[\frac{\ln\left[V_0(r^*)\right] - \ln\left[V_0(r)\right]}{\ln\left[1+r\right] - \ln\left[1+r^*\right]}\right]$$

La duration D correspond à la date où les 2 valeurs sont égales
Le placement est immunisé contre la variation du taux de rendement



L''approximation sous évalue la variation relative du prix du titre

Dans notre exemple, une hausse de 1% du taux de rendement
- entraine une baisse relative du prix de 5,75% (variation réelle)
- est approximée à – 6,00% avec la Duration

L'erreur augmente avec l'amplitude du choc de taux et la convexité de la fonction de prix réel.

Autres mesures de volatilité : la Duration et la Convexité

$$dV_0 = \frac{\partial V_0}{\partial(1+r)} d(1+r) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V_0}{\partial(1+r)^2} d(1+r)^2 + \ldots$$

Développement de Taylor à l'ordre 2

$$\boxed{\frac{dV_0}{V_0} = -D\left(\frac{d(1+r)}{(1+r)}\right) + \frac{1}{2}Cvx\left(\frac{d(1+r)}{(1+r)}\right)^2 \quad \text{avec} \quad Cvx = \left[\sum_{j=1}^{n}\omega_j j(j+1)\right]}$$

La Convexité contribue positivement à la fonction de prix ➔ réduction de l'erreur

$$Cvx = \left[\sum_{j=1}^{n}\omega_j j^2 + \sum_{j=1}^{n}\omega_j j\right] = D_2 + D_1 \quad \text{avec} \quad D_2 = \sum_{j=1}^{n}\omega_j j^2 \quad \text{et } D_1 \text{ la duration}$$

En cas de baisse du taux, il y a une très légère sous-évaluation
et en cas de hausse des taux, la surestimation est très faible
L'essentiel de l'erreur est corrigée et il n'est pas nécessaire
d'introduire l'ordre 3.

La CONVEXITE pour quelques titres

$$\mathrm{Cvx(ZC)} = n(n+1)$$

$$\mathrm{Cvx(RP)} = \frac{2(1+r)^2}{r^2} = 2\left(\frac{1+r}{r}\right)^2 = 2D_1^2$$

$$\mathrm{Cvx(IF)} = \frac{\left(2i(1+r)^2 - \left[i\left[\left(2+r+2rn\right)+r(3+2r+3rn)\right]+nr^2\left[n(i-r)-r\right]\right](1+r)^{-n}\right)}{r^2\left[i+(r-i)(1+r)^{-n}\right]}$$

$$\mathrm{Cvx(AC)} = \frac{(1+r)(2+r) - \left[(1+r)(2+r+2rn)+r^2n^2\right](1+r)^{-n}}{r\left[1-(1+r)^{-n}\right]} + D(AC)$$

Autres mesures de volatilité : le M2

Le M² (Stochastic process risk de Fong & Vasicek) s'apparente à une mesure de dispersion de type variance.
Il est d'autant plus élevé que les flux sont dispersés, traduisant ainsi une plus grande convexité et donc une plus grande exposition au risque de taux.

$$M^2 = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \left(j - D \right)^2$$

Relation avec la convexité :

$$M^2 = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \left(j - D \right)^2 = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \left(j^2 + D^2 - 2jD \right) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j j^2 + \sum_{j=1}^{n} \omega_j D^2 - 2\sum_{j=1}^{n} \omega_j jD$$

$$M^2 = D_2 - D_1^2 \quad \text{avec} \quad D_2 = \sum_{j=1}^{n} \omega_j j^2 \quad \text{et } D_1 \quad \text{la duration de Macaulay}$$

$$\boxed{M^2 = Cvx - D_1 - D_1^2 \Leftrightarrow Cvx = M^2 + D_1 (1 + D_1)}$$

Extensions

Pour éviter tous les problèmes, il est judicieux de ne considérer que les titres à Zéro Coupon : pas d'incertitude liée aux paiements multiples, homogénéité des mesures de dates et de volatilité, …

$$Age(ZC) = n \quad D(ZC) = n \quad Cvx(ZC) = n^2+n \quad M^2 = 0$$

L'hypothèse d'une structure plate avec un saut additif a été privilégiée.

En réalité, à chaque échéance, il existe un taux spécifique

Courbe des Taux spot

• <u>Comparaison</u>

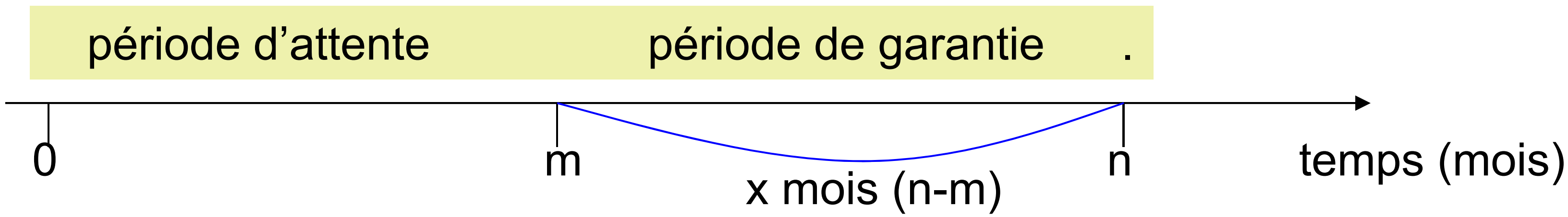
- Instantané : analyse du spread : taux long – taux court
- historique : analyse de la déformation dans le temps
- selon la qualité : courbe Etat versus courbe corporate (Crédit spread)
- internationale : perspective d’évolution du change (différentiel de taux)

•<u>Construction</u>

- à partir des taux directeurs publiés par les agences financières
- à partir des bons du Trésor et des Obligations d’Etat
- à partir des Obligations Zéro Coupon (Strips ou estimées)
- à partir de modèles mathématiques (processus de diffusion)

TAUX D'INTERET A TERME (*Forward Rates*)

- Les entreprises ont besoin de se couvrir vis-à-vis de l'évolution des taux futurs
- Les banques proposent des contrats garantissant des taux futurs : les FRA
- FRA = *Forward Rate Agreement* de x mois (n-m) à partir de m mois



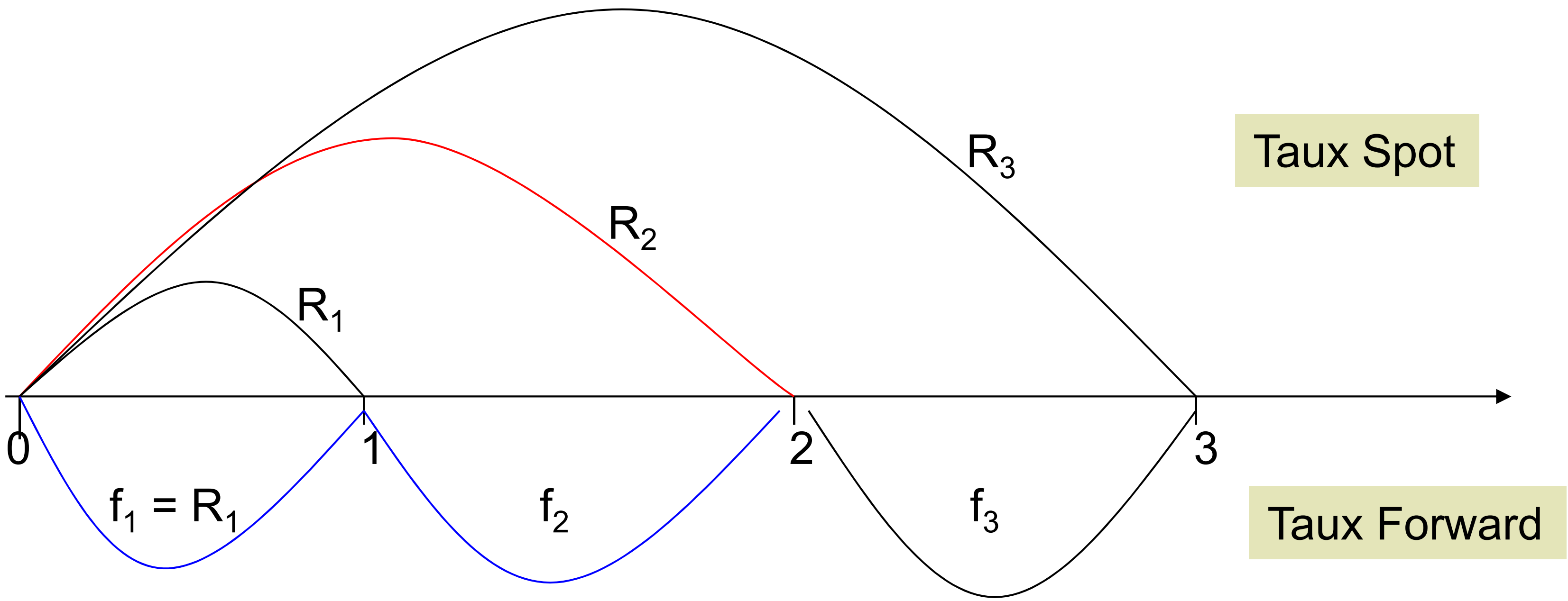
Le FRA se définit en fonction :

- d'un taux (FRA) fixe garanti et d'un taux variable de référence (Euribor 3 mois)
- si, à la date m, le taux Euribor est supérieur au taux FRA, la banque paie l'écart

dans le cas contraire, c'est l'entreprise qui verse à la banque

$$\text{Paiement} = \text{Nominal} \cdot \left\{ \frac{\left(\text{TxRef - TxFra}\right)\dfrac{\text{durée}}{360}}{1 + \text{TxRef}\,\dfrac{\text{durée}}{360}} \right\}$$

TAUX D'INTERET A TERME : Principe de détermination



Stratégies équivalentes :

* Effectuer un placement sur 2 ans au taux R_2

* Placer pour un an (au taux R_1) puis renouveler l'opération au taux f_2

TAUX D'INTERET A TERME : extraction des taux à terme

* Placement à 2 ans : $$X = M \cdot (1 + R_2)^2$$

• Placement à un an renouvelé une fois :

$$X = M \cdot (1 + R_1) \cdot (1 + f_2) = M \cdot (1 + f_1) \cdot (1 + f_2)$$

* A l'équilibre, les deux stratégies sont équivalentes

$$M \cdot (1 + R_2)^2 = M \cdot (1 + R_1) \cdot (1 + f_2)$$

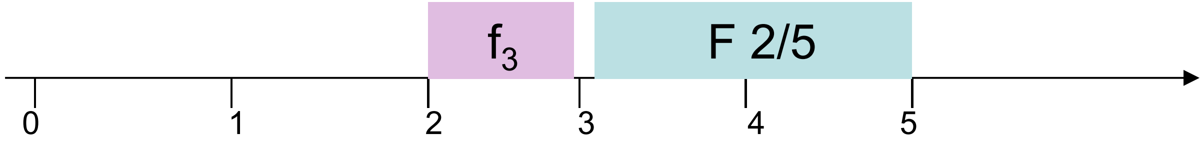
* d'où l'on tire le taux *forward* implicite

$$(1 + f_2) = \frac{(1 + R_2)^2}{(1 + R_1)} \Rightarrow$$

$$f_2 = \frac{(1 + R_2)^2}{(1 + R_1)} - 1$$

TAUX D'INTERET A TERME : extraction (2)

Généralisation :



* Pour les taux *forward* courts   FRA de 1 dans n périodes ou FRA 1/n

$$\boxed{(1+R_n)^n = (1+R_{n-1})^{n-1} \cdot (1+f_n)}$$

$$\boxed{f_n = \frac{(1+R_n)^n}{(1+R_{n-1})^{n-1}} - 1}$$

FRA de 1 dans 2

Taux f_3

* Pour les taux *forward* longs   FRA de n-m dans m périodes ou FRA n-m/n

$$\boxed{(1+R_n)^n = (1+R_m)^m \cdot (1+F_{n-m})^{n-m}}$$

FRA de 2 dans 3

Taux F2/5

$$\boxed{(1+F_{n-m})^{n-m} = \frac{(1+R_n)^n}{(1+R_m)^m} \Rightarrow F_{n-m} = \sqrt[n-m]{\frac{(1+R_n)^n}{(1+R_m)^m}} - 1}$$

Valeur d'une obligation et taux d'actualisation

r → Taux actuariel

R_t → Taux Spot

f_t → Taux Forward

$$V_o = \begin{cases} \dfrac{i}{(1+r)^1} + \dfrac{i}{(1+r)^2} + \ldots + \dfrac{i}{(1+r)^{n-1}} + \dfrac{1+i}{(1+r)^n} \\ \dfrac{i}{(1+R_1)^1} + \dfrac{i}{(1+R_2)^2} + \ldots + \dfrac{i}{(1+R_{n-1})^{n-1}} + \dfrac{1+i}{(1+R_n)^n} \\ \dfrac{i}{(1+f_1)} + \dfrac{i}{(1+f_1)(1+f_2)} + \ldots + \dfrac{i}{(1+f_1)\ldots(1+f_{n-1})} + \dfrac{1+i}{\prod_{j=1}^{n}(1+f_j)} \end{cases}$$

Le prix de marché de l'obligation peut s'expliquer avec différentes fonction d'actualisation : taux actuariel unique, taux spot ou taux forward

Valeur d'une obligation et taux d'actualisation : un exemple

Obligation IN FINE maturité 5 ans et taux de coupon fixe de 4,50%

$$V_o = 99,255\% = \begin{cases} \dfrac{4,5\%}{(1+4,67\%)^1} + \dfrac{4,5\%}{(1+4,67\%)^2} + \dfrac{4,5\%}{(1+4,67\%)^3} + \dfrac{4,5\%}{(1+4,67\%)^4} + \dfrac{104,5\%}{(1+4,67\%)^5} \\[2em] \dfrac{4,5\%}{(1+4,0\%)^1} + \dfrac{4,5\%}{(1+4,2\%)^2} + \dfrac{4,5\%}{(1+4,3\%)^3} + \dfrac{4,5\%}{(1+4,6\%)^4} + \dfrac{104,5\%}{(1+4,7\%)^5} \\[2em] \dfrac{4,5\%}{(1+4\%)} + \dfrac{4,5\%}{(1+4\%)(1+4,4\%)} + \dfrac{4,5\%}{(1+4\%)...(1+4,5\%)} + \dfrac{4,5\%}{(1+4\%)...(1+5,5\%)} + \dfrac{104,5\%}{(1+4\%)...(1+5,1\%)} \end{cases}$$

Taux utilisés ➔

	Spot	**Fwd**
1	4,000%	4,000%
2	4,200%	4,400%
3	4,300%	4,500%
4	4,600%	5,505%
5	4,700%	5,101%

les SWAPS de Taux d'Intérêt

(dérivé négocié en OTC)

Accord pour un échange de flux financiers futurs où sont précisés le taux variable, le nominal, les dates (la fréquence), les montants et mode de calcul (convention jour).

Le SWAP standard (plain vanilla) ressemble à un FRA (*Interest Rate Swaps*, *IRS)*
En général, le Swap propose un échange d'un taux fixe contre un taux variable.
Le Swap peut aussi porter sur :

- 2 jambes variables (basis swap) ou
- 2 devises (*cross currency swap)*

Ex : 10 millions d'€, 2% contre Euribor 3 mois + 0,40%, pendant 2 ans en exact/360

<u>Principe</u> :

Entreprise A —— Paie Taux fixe ——> Entreprise C

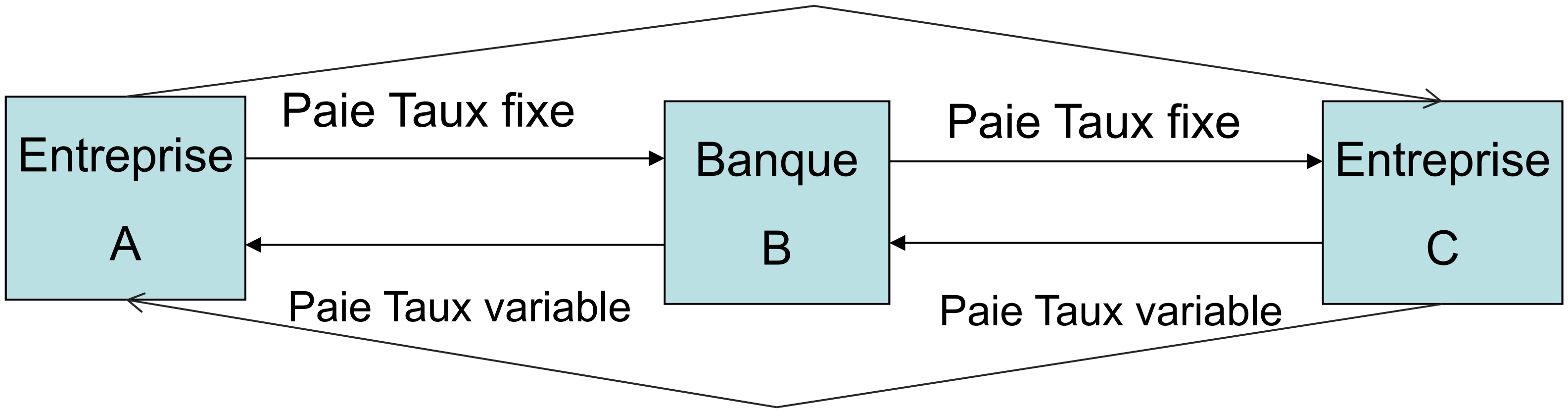
Entreprise A <—— Paie le Taux variable —— Entreprise C

L'entreprise anticipe une hausse des taux ou souhaite connaître son taux de crédit
Elle verse le taux fixe donc elle est le payeur (ou l'emprunteur) du Swap

Exemple de cotation : SWAP 3 ans/trim Eur +0,15% Eur + 0,40% contre 2,10%

les SWAPS de Taux d’Intérêt

Le Swap permet de transférer le risque de taux (en général vers une banque)
Il permet aussi de spéculer sur les variations de taux (niveaux, pentification, …)
A chaque échéance, un différentiel d’intérêts est versé par l’une des deux parties
le capital (notionnel) n’est pas échangé à l’échéance du contrat.
De plus en plus, le risque de contrepartie est considéré et les clauses de révocation deviennent prépondérantes.
L’ISDA (*International Swaps and Derivatives Association*) organise le marché



La firme A a une dette à TV + 0,40%

Euribor = 2,20%

La firme C a une dette à TF (2,70%)

La Banque va proposer des Swaps TV contre TF+/- 0,15%

SWAPS de Taux d'Intérêt : l'arbitrage de crédit

Exemple 1 Explication par l'opportunisme

Offres du marché	Firme A	Firme B	Ecart
À Taux Fixe	5,00%	6,20%	-1,20%
À Taux Variable	Eur +0,3%	Eur +1,0%	-0,70%

A veut du TV et B souhaite du TF possibilité de Swap TV / 4,95%

Si pas de Swap	**- (TV + 0,30%)**	**-6,20%**
Avec le Swap		
Emprunt à TF	**-5,00%**	**- (TV + 1,00%)**
Swap Paiement	**- (TV)**	**-4,95%**
Swap à recevoir	**4,95%**	**(TV)**
Bilan	**- (TV + 0,05%)**	**-5,95%**
GAIN	**+ 0,25%**	**+ 0,25%**

Les opportunités offertes par le marché correspondent à la différence entre les offres de prêt : Gain de 0,50% = 1,20% - 0,70%. Le partage peut varier !

SWAPS de Taux d'Intérêt : la gestion du risque

Exemple 2

Bilan Banque	
ACTIF	PASSIF
prêts commerciaux 5 ans à TF 5,0%	dépôts à terme TV + 0,4%
Si le TV > à 4,60% (5,0%-0,4%) alors pertes	

Bilan cie Assurance	
ACTIF	PASSIF
Oblig à TV TV + 0,60%	contrats garantis 5 ans à TF 4,0%
Si le TV < à 3,40% (4,0%-0,6%) alors pertes	

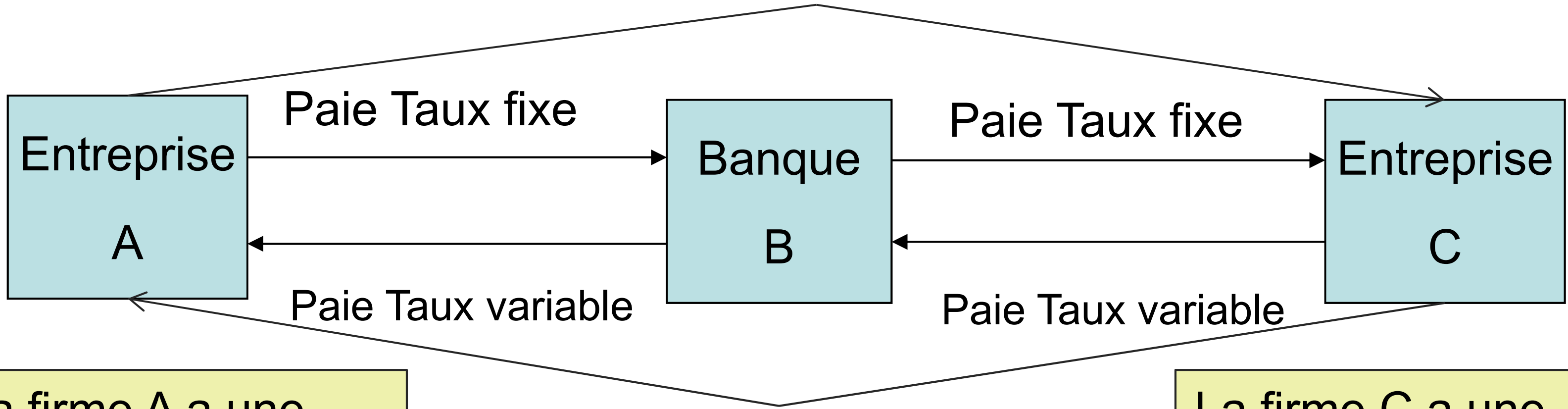
SWAP possible
la Banque paie TF (4,45%)
et reçoit le TV

Bilan Banque	
Prêts comm.	5,00%
swap reçu	TV
Déposants	- (TV+0,4%)
Swap payé	-4,45%
Bilan	+ 0,15%

Bilan cie Assurance	
Oblig à TV	+ (TV+0,6%)
swap reçu	4,45%
Contrats	-4,00%
Swap payé	- TV
Bilan	+ 1,05%

Les deux établissements améliorent leur exposition au risque de taux

SWAPS de Taux d'Intérêt : vérification



La firme A a une dette à TV + 0,40%

Euribor = 2,20%

La firme C a une dette à TF (2,50%)

La Banque va proposer des Swaps TV contre TF+/- 0,15%

Situation si Swap entre A et C (TF à 2,20% contre Euribor)

exposition Firme A : - (TV + 0,40%) - 2,20% + TV = - 2,60%
exposition Firme C : - 2,50% - TV + 2,20% = - (TV + 0,30%)

Situation si Swaps entre A et Banque(TF+0,15%) et Banque et C (TF - 0,15%)

exposition Firme A : - (TV + 0,40%) - 2,35% + TV = - 2,75%
exposition Firme C : - 2,50% - TV + 2,05% = - (TV + 0,45%)
la Banque est rémunérée à 0,30% (=2 x 0,15%)

Les SWAPs : Valorisation par les obligations

Un Swap est un portefeuille composé de la vente d'une obligation à TF (i) et d'une obligation à TV en position longue

$$V_0(TV) = \sum_{j=1}^{n} \frac{i_j}{(1+R_j)^j} + \frac{1}{(1+R_n)^n} \qquad V_0(TF) = \sum_{j=1}^{n} \frac{i}{(1+R_j)^j} + \frac{1}{(1+R_n)^n}$$

$$V_0(\text{swap}) = V_0(TV) - V_0(TF) = \sum_{j=1}^{n} \frac{i_j - i}{(1+R_j)^j}$$

	1	2	3	4	5
Tx Spot	4,25%	4,30%	4,35%	4,45%	4,50%
Tx Var	4,00%	4,20%	4,35%	4,65%	4,90%

Taux établis par la banque

$$V_0(TV) = \frac{4,00\%}{(1+4,25\%)^1} + \frac{4,20\%}{(1+4,30\%)^2} + \frac{4,35\%}{(1+4,35\%)^3} + \frac{4,65\%}{(1+4,45\%)^4} + \frac{104,90\%}{(1+4,50\%)^5} = 99,61\%$$

$$V_0(TF) = 99,61\% = \frac{i}{(1+4,25\%)^1} + \frac{i}{(1+4,30\%)^2} + \frac{i}{(1+4,35\%)^3} + \frac{i}{(1+4,45\%)^4} + \frac{1+i}{(1+4,50\%)^5}$$

$$\rightarrow i = 4,40\%$$

$$V_0(swap) = 0 = \frac{-0,40\%}{(1+4,25\%)^1} + \frac{-0,20\%}{(1+4,30\%)^2} + \frac{-0,05\%}{(1+4,35\%)^3} + \frac{+0,25\%}{(1+4,45\%)^4} + \frac{+0,50\%}{(1+4,50\%)^5}$$

Les SWAPs classiques

Echange d'obligations :

à taux de coupon fixe (i) et remboursement in fine de maturité n

à taux de coupon variable et mêmes remboursement et maturité

Valorisation par les FRA :
Chaque échéance du Swap est assimilable à un FRA
Les FRA sont ensuite actualisés jusqu'en t=0

Autres Swaps

- swap Taux long – Taux court (ex. CMS 10 – 0,40% vs Euribor 3 mois)
  (objectif : jouer sur la pentification de la courbe)

- swap EONIA*change – SONIA
  (objectif : jouer sur l'évolution des taux)

CMS Constant Maturity Swap (ex. TEC 10)

CDS CREDIT DEFAULT SWAP

Dérivés sur événements
de crédit sur OTC

Mécanique : Sous-jacent (obligation ou créance)
[dette souveraine, collectivités ou entreprise]
Nominal du contrat
Durée (et périodicité) [en général 5 ans]
Taux de versement (par l'acheteur si absence de défaut)
l'acheteur verse une prime *ex ante*
le vendeur s'engage à compenser *ex post* les pertes soit par paiement d'espèces, soit par livraison des titres

Depuis 1994 à JP Morgan

Evénements de crédit :
* faillite (défaut constaté)
* moratoire (délai accordé)
* restructuration (report échéance)

Quelques événements notoires : Russie (98), Argentine (2002) ou Grèce (2011?)

La prime du CDS doit correspondre à la prime de risque du titre pour éliminer les opportunités d'arbitrage (achat du titre et vente du CDS). En réalité, on observe une déconnexion entre ces deux éléments inhérente à une demande de couverture importante et une spéculation avec peu de vendeurs !
Ex : écart Bunds – OAT et prime sur CDS dette France !

TITRISATION

(Securitization, Defeasance)

FCC   Fonds Communs de Créances   (SPV   *Special Purpose Vehicle*)

Cession des actifs risqués à une structure dédiée qui émet un emprunt obligataire dont les flux sont financés par les créances parvenues à échéance

= CDO Collaterized Debt Obligations

C'est une source de financement pour les banques (non encadrée et donc risquée)

Types de créances : prêts, obligations, crédits à la consommation, cartes bancaires, crédits automobiles, crédit bail, crédits hypothécaires, …

ACTIF : plusieurs types d'actifs

- CLO Credit Loan Obligations
- CBO Credit Bond Obligation   de 30 à des centaines de débiteurs
- ABS Asset Backed Securites de 1000 à + 100 000 débiteurs
- MBS Mortgage Backed Securities   [Hypothécaire]

PASSIF :   une dette à 3 tranches de risque (avec parfois un actif de garantie)

- dette Senior (ranking AAA) → taux sans risque   [premium]
- dette Mezzanine ou Subordonnée (rating BBB)   [no premium]
- Equity (non noté, restant au niveau de la banque)   [subprime]

CRISE des SUBPRIMES & TITRISATION

La titrisation est risquée mais cela reste acceptable si le risque est mesurable
Quelles sont les limites du transfert de risque [à d'autres investisseurs, à l'Etat] ?

Problèmes :

- qualité des titres mis en portefeuille ABS (solvabilité des emprunteurs)
- réalité des garanties apportées par les débiteurs (crédit rechargeable)
- revente internationale et re –titrisation [CDO² ou CDO de CDO]
- mauvaise évaluation des risques des SPV (agences de notation !)
- escroquerie de grande ampleur !!!

Subprime mortgage crisis aux USA début en juillet 2007 et apogée en fin 2008

Crise de confiance dans le système bancaire d'où un *credit crunch* interbancaire et une disparition de la liquidité pour ces marchés de dérivés.
→ faillite de la banque Lehman Brothers

PRÊT SUBPRIME

Objectif : relancer l’économie et faciliter l’accession à la propriété aux USA

Moyen : accorder des prêts importants à des ménages peu solvables avec :
- un taux d’intérêt progressif (faible au début)
- un taux d’intérêt indexé sur la valeur du bien (garantie)
- un contexte de taux très bas (politique de la FED)

Problème :
- nombreuses défaillances des ménages
- abus dans les octrois de prêt par les courtiers (indélicats)
- absence de contrôle à tous les niveaux
- baisse de la valeur des biens immobiliers d’occasion
- hausse des taux d’intérêt → accélération du phénomène
- contagion aux établissements de crédit
- transmission aux investisseurs ayant acquis des ABS

Scandale en 2009-2010 pour Goldman Sachs avec son fond Abacus 2007-AC1
un placement très spéculatif et complexe (rentable et au risque peu mesurable)
une banque qui joue contre ses clients au profit de ses actionnaires et dirigeants

coût des litiges aux banques américaines
103 milliards de dollars depuis 2008
- crise des subprimes
- scandale du Libor

- **JPMorgan** : accord en 2013 pour 13Mds$
  sub primes : vente de 33Mds$ à Fannie Mae & Freddy Mac)
  Affaire Baleine (Londres) → perte 6,2Mds en courtage

- **Bank of America :** amende de 6 Mds$ (vente de 57 milliards de prêts immobiliers)
  17 Mds$ réclamés par les autorités américaines en juin 2014 !

- **Citigroup** : 7 Mds$ versés en juillet 2014

- **HSBC :** filiale US, amende de 2,4Mds de dommages et intérêts,
  Class action de 11.000 plaignants sur la qualité des actifs, de 1997-2002.

- **UBS :** diverses amendes pour ‘erreur’ de gestion’ (+ de 2 Mds$!)

- **RBS :** (Royal Bank of Scotland) + 0,6 Md$ pb Libor

- **Deutsche Bank :** provision de 4,0 Mds$! (Libor)

La BNP accepte une amende 8,9 Mds$ pour ses pratiques avec des pays ‘douteux’ !

Questions Convexité et sensibilité d'une Rente Perpétuelle

Rappel :

Prix de marché d'une RP → Vo(RP) = i / r

Duration d'une RP → Du(RP) = (1 + r) / r

Convexité :

$$Cvx(RP) = \sum_{j=1}^{\infty} j(j+1)\omega_j = \sum_{j=1}^{\infty} j\omega_j + \sum_{j=1}^{\infty} j^2\omega_j = Du(RP) + \sum_{j=1}^{\infty} j^2\omega_j \quad \text{avec } \omega_j = \frac{i/(1+r)^j}{\frac{i}{r}} = \frac{r}{(1+r)^j}$$

$$Cvx(RP) = \frac{1+r}{r} + r\left[\frac{(1+r)(2+r) - \left[(1+r)(2+r+2rn) + n^2r^2\right](1+r)^{-n}}{r^3}\right] \quad \text{où l'on a } n \to \infty$$

$$Cvx(RP) = \frac{1+r}{r} + \left[\frac{(1+r)(2+r)}{r^2}\right] = \left(\frac{1+r}{r}\right)\left[1 + \frac{(2+r)}{r}\right] = \left(\frac{1+r}{r}\right)\left[\frac{(2+2r)}{r}\right] = \left(\frac{1+r}{r}\right)\left[\frac{2(1+r)}{r}\right]$$

$$Cvx(RP) = 2\left(\frac{1+r}{r}\right)^2$$

Questions : Convexité et sensibilité d'une Rente Perpétuelle

Sensibilité :

$$d(1+r) = r' - r$$

$$\frac{dV_0(RP)}{V_0(RP)} = \frac{V_0'(RP) - V_0(RP)}{V_0(RP)} = \frac{i/_{r'} - i/_{r}}{i/_{r}} = \frac{r - r'}{r'} = -\frac{d(1+r)}{r'} \qquad \text{mesure exacte}$$

$$\frac{dV_0(RP)}{V_0(RP)} = -Du(RP)\left[\frac{d(1+r)}{(1+r)}\right] + \frac{1}{2}Cvx(RP)\left[\frac{d(1+r)}{(1+r)}\right]^2 \qquad \text{mesure avec convexité}$$

$$\frac{dV_0(RP)}{V_0(RP)} = -\frac{1+r}{r}\left[\frac{d(1+r)}{(1+r)}\right] + \frac{1}{2}2\left(\frac{1+r}{r}\right)^2\left[\frac{d(1+r)}{(1+r)}\right]^2 = -\left[\frac{d(1+r)}{r}\right] + \left[\frac{d(1+r)}{r}\right]^2$$

Exemple : i = 4% r = 3,80% choc de + 0,10%

Vo(3,80%) = 105,26% Vo(3,90%) = 102,56%
Du(RP) = 1,038 /0,038 = 27,32 (ans) Cvx = 2 (1,038/0,08)² = 1 492

dVo/Vo = (102,56% - 105,26%) : 105,26% = - 2,564% = (- 0,10% / 3,90%)

dVo/Vo ≈ - 27,32 [1,038 /0,038] + 0,5 . 1 492 . [1,038 /0,038]² = - 2,562%

Questions

1 - Vous souhaitez réaliser un placement et 3 propositions vous sont offertes

A : un Zéro Coupon (IPF avec échéance dans 4 ans) au prix de 85,48%
B : un Zéro Coupon (IPA avec échéance dans 4 ans), le coupon représente 16,144% de la valeur nominale,
C : une obligation In Fine (taux de coupon 3%, échéance 4 ans) au prix de 94,62%
Classer ces opportunités en commençant par la plus intéressante (ordre de précision : 0,1%)

☐ A > B > C	☐ B > A > C	☐ C > B > A	☐ A < B = C	☐ B < A = C

2 - De combien va varier un zéro coupon d'échéance 6 ans quand le taux de rendement r passer de 5% à 6% ?

☐ -4,125%	☐ -1,000%	☐ 0,000%	☐ 1,000%	☐ 4,125%

3 Choisir entre Vrai et Faux

(IF pour obligation à remboursement In Fine, AC pour Annuités Constantes)

Paramètres	Vrai ou Faux
Quand r > i, le prix d'une rente perpétuelle est > à celui d'une oblig in fine	
Quand n augmente, le prix d'un Zéro Coupon augmente	
Le prix d'une obligation AC varie moins que celui d'un IF (i et n identiques)	
Le prix d'un Zéro coupon (type IPA) peut être supérieur à sa valeur nominale	

4 - la structure des taux d'intérêt au comptant (spot) se présente comme suit :

R1 = 3,00% R2 = 3,40% R3 = 3,70% R4 = 3,50%

Donner le prix d'une obligation In Fine de taux nominal = 3,30% et dont l'échéance est dans 4 ans.

	98,34%		99,27%		100%		100,73%		101,66%

Donner le taux attendu dans un an à court terme (pour un an).

	3,40%		3,80%		4,30%		3,09%		2,90%

Donner le taux FRA de 1 dans 3 ($FRA_{1,3}$ Forward Rate Agreement durée 1 an , début dans 3 ans)

	3,40%		3,80%		4,30%		3,09%		2,90%

Réponses 1 - 2

1 - Vous souhaitez réaliser un placement et 3 propositions vous sont offertes :

A : un Zéro Coupon (IPF avec échéance dans 4 ans) au prix de 85,48%,
B : un Zéro Coupon (IPA avec échéance dans 4 ans), le coupon représente 16,144% de la valeur nominale,
C : une obligation In Fine (taux de coupon 3%, échéance 4 ans) au prix de 94,62%
Classer ces opportunités en commençant par la plus intéressante (ordre de précision : 0,1%)

	A > B > C		B > A > C		C > B > A	X	A < B = C		B < A = C

$$V_0(A) = 85,48\% = \frac{1}{(1+r)^4} \Rightarrow r = 4,00\%$$

$$V_0(B) = 100\% - 16,144\% = 83,866\% = \frac{1}{(1+r)^4} \Rightarrow r = 4,50\%$$

$$V_0(C) = 94,12\% = \frac{3\%}{r} + \frac{(r-3\%)}{r}(1+r)^{-4} \Rightarrow r = 4,50\%$$

2 - De combien va varier un zéro coupon d'échéance 6 ans quand le taux de rendement r passer de 5% à 6% ?

X	-4,125%		-1,000%		0,000%		1,000%		4,125%

$$V_0 = \frac{1}{(1+5\%)^6} = 74,622\%$$

$$V_0 = \frac{1}{(1+6\%)^6} = 70,496\%$$

$$74,622\% - 70,496\% = 4,125\% \quad \text{donc baisse}$$

Réponses 3 - 4

3 - Choisir entre Vrai et Faux (IF = obligation à remboursement In Fine, AC = Annuités Constantes)

Paramètres	Vrai ou Faux
Quand r > i, le prix d'une rente perpétuelle est > à celui d'une oblig in fine	**Faux**
Quand n augmente, le prix d'un Zéro Coupon augmente	**Faux**
Le prix d'une obligation AC varie moins que celui d'un IF (i et n identiques)	**Vrai**
Le prix d'un Zéro coupon (type IPA) peut être supérieur à sa valeur nominale	**Faux**

4 - la structure des taux d'intérêt au comptant (spot) se présente comme suit :

R1 = 3,00% R2 = 3,40% R3 = 3,70% R4 = 3,50%

Donner le prix d'une obligation In Fine de taux nominal = 3,30% et dont l'échéance est dans 4 ans.

98,34%	X 99,27%	100%	100,73%	101,66%

$$V_0 = \frac{3,3\%}{(1,030)^1} + \frac{3,3\%}{(1,034)^2} + \frac{3,3\%}{(1,037)^3} + \frac{103,3\%}{(1,035)^4} = 99,27\%$$

Donner le taux attendu dans un an à court terme (pour un an).

3,40%	X 3,80%	4,30%	3,09%	2,90%

$$f_2 = \frac{(1,034)^2}{(1,030)^1} - 1 = 3,80\%$$

Donner le taux FRA de 1 dans 3 ($FRA_{1,3}$ Forward Rate Agreement durée 1 an , début dans 3 ans)

3,40%	3,80%	4,30%	3,09%	X 2,90%

$$FRA_{1,3} = \frac{(1,035)^4}{(1,037)^3} - 1 = 2,90\%$$

Gestion Portefeuille Obligataire

<u>Cas</u> : *Structure plate, choc additif pendant la période de mesure de performance*

Stratégie A : rester long malgré la hausse des taux de marché
Stratégie B : passer court malgré les coûts de transaction

Taux de marché r = 7,00% puis 7,50% (choc = 50 bp, Δr = 0,5%) Horizon = 1 an
Taux de coupon i = 7,00% Sensibilité S = 7 Coût Transaction c = 1%

Performance Stratégie A	=	Coupon*Horizon – Sensibilité * choc	
3,50%	=	7,00% * 1 – 7 * 0,5%	= $i * H - S * \Delta r$
Performance Stratégie B	=	Taux avant*Horizon + choc – coût trans.	
6,50%	=	7,00% * 1 + 0,5%*1 - 1%	= $(r + \Delta r) * H - c$

$i * H - S * \Delta r = (r + \Delta r) * H - c \rightarrow \Delta r = [\, c + H\,(i-r)\,] / (\, H + S\,)$

La stratégie B reste plus intéressante tant que :

Δr > [1% + 0]/ (1 + 7) = 0,125% (soit 12,5 bp)

Equilibre (Δr = 0,125%) → Perf = **6,125%**

Gestion Portefeuille Obligataire

<u>Cas</u> : *Structure non plate, choc additif pendant la période de mesure de performance*

Stratégie A : rester long malgré la hausse des taux de marché
Stratégie B : passer court malgré les coûts de transaction

Taux LT l = 7,00% puis 7,50% Taux CT r = 5,00% puis 5,30% Horizon = 1 an
Taux coupon i = 7,00% Sensibilité S = 7 Coût Transaction c = 1%

Performance Stratégie A = Coupon*Horizon – Sensibilité * choc
3,50% = 7,00% * 1 – 7 * 0,5% = $i * H - S * \Delta l$

Performance Stratégie B = (Taux CT + choc)*Horizon – coût transaction
4,30% = (5,00% + 0,3%)* 1 - 1% = $(r + \Delta r) * H - c$

$i * H - S * \Delta l = (r + \Delta r) * H - c \rightarrow \Delta l = [c + (i-r) * H - \Delta r] / S$

La stratégie B reste plus intéressante tant que :

$\Delta l > [1\% + (7\%-5\%)*1 - 0{,}30\%] / 7 = 0{,}386\%$ (soit 38,6 bp)

Equilibre ($\Delta r = 0{,}386\%$) → Perf = **4,30%**

Application : Gestion Portefeuille Obligataire

Comparer 3 profils de portefeuille :

- Type *Bullet* (tous les flux sont sur la même échéance : t=D)
- Type *Ladder* (flux répartis sur n périodes, des AC) [poids décroissants]
- Type *Barbel* (flux répartis sur 2 périodes, a et b) [poids constants]

Soit un prix identique pour les 3 portefeuilles : V_o=100%, K = 100
Une structure plate (r = 8,135%), une même Duration D=8 avec

pour le *bullet* : n = 8

pour le *ladder* : AC=$i/[1-(1+i)^{-n}]$ (i=1, 2 … n)

et pour le *barbel* : $\omega_a = \omega_b = ½$ avec a=1

Calculer les biais de sensibilité (réelle, avec duration, avec Convexité) pour Δr = ±1% et donner le M²

Cas du *Bullet*

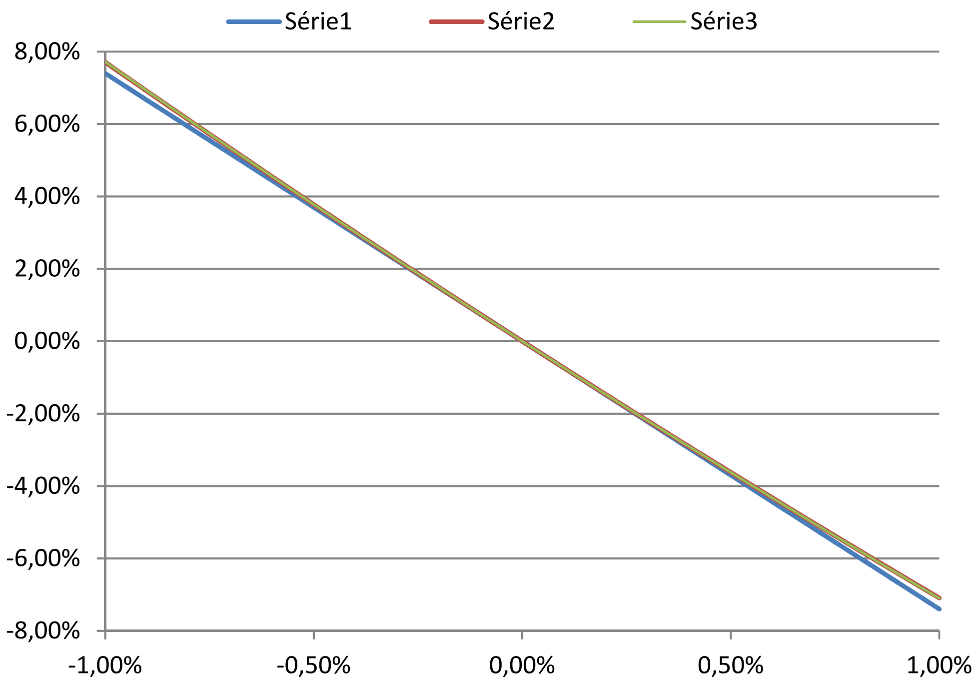
$V_o = 100\%$ $r = 8{,}135\%$ $n = 8$ ans

➔ D = 8 ans $V_N = 100\% \,.\, (1{,}08135)^8 = 186{,}952\%$

➔ Convexité = D.(D+1) = 8 . 9 = 72

Avec un choc $\Delta r = +1\%$		$\Delta r = -1\%$
Sensibilité (D)	$= - 8 \times [1\% / 1{,}08135] = - 7{,}398\%$	+7,398%
Sensibilité (D+Cvx)	$= - 7{,}090\% = -7{,}398\% + (72 / 2) \times [1\% / 1{,}08135]^2$	+7,706%
Sensibilité (réelle)	$= - 7{,}100\% = [V'_o - V_o] / V_o = [92{,}90\% - 100\%] / 100\%$	+7,716%

$92{,}90\% = 186{,}952\% / (1{,}09135)^8$



M²=0

Cas du *Ladder*

V_o = 100% r = 8,135%

car V_o = 100%

➔ **D = 8 ans i = r = 8,135% n = 20 ans et AC = 0,10287757**

➔ Convexité = 101,536 (= 8 + 93,54 = $D_1 + D_2$)

La maturité est choisie pour avoir une duration = 8
voir le fichier Excel pour les détails des calculs

Avec un choc Δr = +1%		Δr = -1%
Sensibilité (D)	= - 8 x [1% / 1,08135] = - 7,398%	+7,398%
Sensibilité (D+Cvx)	= - 6,964% = - 7,398% + (101,54 / 2) x $[1\% / 1,08135]^2$	+7,832%
Sensibilité (réelle)	= - 6,984% = $[V'_o - V_o] / V_o$ = [93,0157% - 100%] / 100%	+7,854%

M²=Cvx+D(D+1)
M²=101,54 + 8x9
M²=173,54

Cas du *Barbel*

$V_o = 100\%$ $r = 8{,}135\%$ $\omega_a = \omega_b$ ½ et a=1

➔ D = 8 ans et b= 15
➔ Convexité = 121 = 0,5x1(1+1)+0,5x15(15+1)

Recherche de la maturité du second Zéro coupon b, qui vérifie :

D = 8 ans ➔ $1\ \omega_1 + b\omega_b = 8$ <=> 1.(½)+b .(½)=8 ➔ b = 15

Flux perçus en t=1 et t=b :

$\omega_1 = ½ = X / (1+r)^1$ ➔ X = 0,5407 et $\omega_{15} = 0{,}5 = Y / (1+r)^{15}$ ➔ Y = 1,616

	Avec un choc Δr = +1%	Δr = -1%
Sensibilité (D)	= - 8 x [1% / 1,08135] = - 7,398%	+7,398%
Sensibilité (D+Cvx)	= - 6,880% = - 7,398% + (121 / 2) x $[1\% / 1{,}08135]^2$	+7,920%
Sensibilité (réelle)	= - 6,907% = $[V'_o - V_o] / V_o$ = [93,09% - 100%] / 100%	+7,943%

M²=Cvx + D(D+1)
M²=121 + 8x9
M²= 193

SYNTHESE des 3 PROFILS

	Bullet	Ladder	Barbel
Prix actuel Vo	100%	100%	100%
rdt actuariel	8,135%	8,135%	8,135%
Remboursement	**ZC**	**AC**	**2 Tr.**
maturité	8	20	15
Duration D_1	8	8	8
Convexité	72	101,5	121
M^2	0	173,5	193
[D_1] (à +1%)	-7,398%	-7,398%	-7,398%
[D_1 + Cvx] (à +1%)	-7,090%	-6,964%	-6,880%
[réel] (à +1%)	-7,100%	-6,984%	-6,907%
[D_1] (à -1%)	7,398%	7,398%	7,398%
[D_1 + Cvx] (à -1%)	7,706%	7,832%	7,920%
[réel] (à -1%)	7,716%	7,854%	7,943%

Le profil le plus dispersé représente le meilleur choix pour un horizon imposé.

A l'évidence, il reste préférable en cas de :

- se mettre en duration courte si Hausse des taux,

et

- se mettre en duration longue si Baisse des taux.

L'utilisation d'une structure des taux fournit les résultats plus complexes à interpréter