HLMA201 Bases et dimension

Gaëtan Planchon

Université de Montpellier
Faculté des Sciences

10 février 2017

Dans toute la suite de ce cours et sans précision supplémentaire, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$. Lorsque E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et k un entier au moins égal à 1, une **famille** de k vecteur de E est une suite finie ordonnée $u_1 \dots, u_k$ de vecteurs de E, avec d'éventuelles répétitions. On note une telle famille $(u_1, \dots, u_k)$.

Sommaire

Sommaire

Famille génératrice

Définition

Soit E un espace vectoriel. Une **famille génératrice** de E est une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de E telle que tout élément de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$, autrement dit telle que vect($\mathcal{F}$)=E.

Convention

La famille $\emptyset$ engendre l'espace nul $\{0_E\}$.

Exemples

1. Les familles $((1,0),(0,1))$ et $((1,1),(1,-1))$ engendrent $\mathbb{R}^2$
2. La familles $((1,0),(0,1),(1,1))$ engendre $\mathbb{R}^2$
3. La famille $((1,0\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.
4. La famille $((1,2,1),(1,1,1),(1,0,1))$ n'est pas génératrice de $\mathbb{R}^3$
5. Soit $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+y-2z=0\}$.
   $((-1,1,0),(2,0,1))$ est génératrice de F.

Définition

(Espace vectoriel de dimension finie) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est de **dimension finie** s'il possède une partie génératrice **finie**, et de dimension infinie sinon.

Exemples

1. $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension finie ;
2. $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - 2z = 0\}$ est de dimension finie ;
3. $F = \mathrm{Vect}(x \mapsto x^k,\ k \in \mathbb{N}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de dimension infinie.

Sommaire

Bases

Défintion

Une famille *libre* et *génératrice* d'un espace vectoriel est appelée une **base** de cet espace vectoriel.

Exemples fondamentaux

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $i \in [|1, n|]$, on pose $e_i = (0, \dots, \overbrace{1}^{i-eme}, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Alors la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, et $F_n = \mathrm{Vect}(x \mapsto x^k,\ k \in \mathbb{N},\ k \leqslant n\}$. Pour $i \in [|0, n|]$, on pose $e_i : x \mapsto x^i \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors la famille $(e_0, \dots, e_n)$ est une base de F_n.

Exemples

1. La famille $((1,1),(1,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$;
2. La famille $((-1,1,0),(2,0,1))$ est une base de $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x+y-2z=0\}$.
3. La famille (M_1,M_2,M_3,M_4) où $M_1=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $M_2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $M_3=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ et $M_4=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. La famille $(x\mapsto e^x, x\mapsto e^{2x})$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mais n'est pas génératrice de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Sommaire

Sommaire

Théorème

Algorithme de la base incomplète Soit $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, X une partie génératrice finie de E, et $\mathcal{L}$ une famille libre de E. Alors on peut compléter $\mathcal{L}$ en une base de E en lui ajoutant certains vecteurs de X.

Plan de la preuve

On note $X = (x_1, \ldots, x_n)$, et on initialise : $\mathcal{B} = \mathcal{L}$.

- $\mathcal{B}$ est donc une famille libre.
- On considère la famille $\mathcal{B}$ augmentée de x_1. Si cette famille est libre, on remplace alors $\mathcal{B}$ par la famille $\mathcal{B}$ augmentée de x_1. Sinon, on laisse $\mathcal{B}$.

Plan de la preuve

On note $X = (x_1, \dots, x_n)$, et on initialise : $\mathcal{B} = \mathcal{L}$.

- $\mathcal{B}$ est donc une famille libre.
- On considère la famille $\mathcal{B}$ augmentée de x_1. Si cette famille est libre, on remplace alors $\mathcal{B}$ par la famille $\mathcal{B}$ augmentée de x_1. Sinon, on laisse $\mathcal{B}$.
- On « remonte »au 1er point, puis on augmente $\mathcal{B}$ avec x_2.

Plan de la preuve

On note $X = (x_1, \ldots, x_n)$, et on initialise : $\mathcal{B} = \mathcal{L}$.

- $\mathcal{B}$ est donc une famille libre.
- On considère la famille $\mathcal{B}$ augmentée de x_1. Si cette famille est libre, on remplace alors $\mathcal{B}$ par la famille $\mathcal{B}$ augmentée de x_1. Sinon, on laisse $\mathcal{B}$.
- On « remonte »au 1er point, puis on augmente $\mathcal{B}$ avec x_2.
- On s'arrête jusqu'à avoir (ou non) augmenté $\mathcal{B}$ de x_n. La famille $\mathcal{B}$ est donc libre.

Plan de la preuve

On note $X = (x_1, \dots, x_n)$, et on initialise : $\mathcal{B} = \mathcal{L}$.

- $\mathcal{B}$ est donc une famille libre.
- On considère la famille $\mathcal{B}$ augmentée de x_1. Si cette famille est libre, on remplace alors $\mathcal{B}$ par la famille $\mathcal{B}$ augmentée de x_1. Sinon, on laisse $\mathcal{B}$.
- On « remonte »au 1er point, puis on augmente $\mathcal{B}$ avec x_2.
- On s'arrête jusqu'à avoir (ou non) augmenté $\mathcal{B}$ de x_n. La famille $\mathcal{B}$ est donc libre.
- Reste prouver que $\mathcal{B}$ engendre E : montrons que pour tout $k \in [|1, n|]$, x_k est combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$. Soit donc $k \in [|1, n|]$.
  - Si $x_k \in \mathcal{B}$, c'est fini : $x_k = 1.x_k$.
  - Sinon, dans la k-ième étape de l'algorithme, x_k n'a pas été ajouté à $\mathcal{B}$, donc x_k était combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$.

Exemple

On pose $F = \mathrm{Vect}\left((1,-5,7),(2,6,8),(3,1,15),(1,11,1)\right)$.
Déterminons une base de F.

- La famille $((1,-5,7))$ est libre ;

Exemple

On pose $F = \mathrm{Vect}\left((1,-5,7),(2,6,8),(3,1,15),(1,11,1)\right)$.
Déterminons une base de F.

- La famille $((1,-5,7))$ est libre ;
- La famille $((1,-5,7),(2,6,8))$ est libre ;

Exemple

On pose $F = \mathrm{Vect}\left((1,-5,7),(2,6,8),(3,1,15),(1,11,1)\right)$.
Déterminons une base de F.

- La famille $((1,-5,7))$ est libre ;
- La famille $((1,-5,7),(2,6,8))$ est libre ;
- La famille $((1,-5,7),(2,6,8),(3,1,15))$ est liée ;

Exemple

On pose $F = \mathrm{Vect}\left((1,-5,7),(2,6,8),(3,1,15),(1,11,1)\right)$.
Déterminons une base de F.

- La famille $((1,-5,7))$ est libre ;
- La famille $((1,-5,7),(2,6,8))$ est libre ;
- La famille $((1,-5,7),(2,6,8),(3,1,15))$ est liée ;
- La famille $((1,-5,7),(2,6,8),(1,11,1))$ est liée.

Théorème de la base incomplète/extraite

Théorème

Soit $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Toute famille libre de E peut être complétée en une base (finie) de E ;
2. De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base (finie) de E.

Preuve du point 2 :

Soit $\mathcal{G}$ une partie génératrice de E, éventuellement infinie. E possède une partie génératrice finie X. Tout vecteur de X étant combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de $\mathcal{G}$, E est en fait engendré par une certaine sous-famille $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$. Comme $E \neq \{0_E\}$, $\mathcal{G}'$ contient un vecteur x non nul. On applique alors l'algorithme précédent pour compléter la famille libre $\{x\}$ en une base de E par des éléments de $\mathcal{G}'$.

Existence de bases en dimension finie

Théorème

Soit $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors E possède une base finie.

Théorème

Soit $E \neq \{0_E\}$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de E. Alors $\mathcal{B}$ est une base si et seulement si :

$$\forall u \in E, \quad \exists!(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \ u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n.$$

Dans ce cas, on notera $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ les **coordonnées** de u dans la base $\mathcal{B}$.

Exemples

1. $((1,1),(-1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Les coordonnées d'un vecteur $u=(a,b)$ quelconque de $\mathbb{R}^2$ dans cette nouvelle base sont $\begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{b-a}{2} \end{pmatrix}$.
2. La famille $((1,-1,1),(2,1,-1),(-1,3,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et les coordonnées d'un vecteur $u=(a,b,c)$ dans cette base sont $\begin{pmatrix} \frac{1}{12}(4a-b+7c) \\ \frac{1}{6}(2a+b-c) \\ \frac{1}{4}(b+c) \end{pmatrix}$.
3. On pose $F_2 = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto 1,\ x \mapsto x, x \mapsto x^2\right) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Alors la famille $\mathcal{B} = (x \mapsto 1,\ x \mapsto (x-1),\ \ x \mapsto (x-1)^2)$ est une base de F_2.

Sommaire

Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel de dimension fini et distinct de $\{0\}$, engendrée par n éléments. Alors toute partie libre de E possède au plus n éléments.

Plan de la preuve

...

Preuve

Montrons pas récurrence sur n.

Preuve

Montrons pas récurrence sur n.

- Le cas $n = 1$ est (presque) évident.

Preuve

Montrons pas récurrence sur n.

- Le cas $n = 1$ est (presque) évident.
- Soit n un entier quelconque. Supposons que si E est engendré par n éléments, alors toute partie libre de E possède au plus n éléments. Soit E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel engendré par une famille X à $n+1$ éléments, et soit L une famille avec $n+2$ éléments distincts deux à deux.

Preuve

Montrons pas récurrence sur n.

- Le cas $n = 1$ est (presque) évident.
- Soit n un entier quelconque. Supposons que si E est engendré par n éléments, alors toute partie libre de E possède au plus n éléments. Soit E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel engendré par une famille X à $n+1$ éléments, et soit L une famille avec $n+2$ éléments distincts deux à deux.
- On note $X = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ et $L = (y_1, \ldots, y_{n+2})$.

Preuve

Montrons pas récurrence sur n.

- Le cas $n = 1$ est (presque) évident.
- Soit n un entier quelconque. Supposons que si E est engendré par n éléments, alors toute partie libre de E possède au plus n éléments. Soit E un $\mathbb{K}$- espace vectoriel engendré par une famille X à $n+1$ éléments, et soit L une famille avec $n+2$ éléments distincts deux à deux.
- On note $X = (x_1, \ldots, x_{n+1})$ et $L = (y_1, \ldots, y_{n+2})$.
- Pour tout $i \in [|1, n+2|]$, il existe $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et $y_i' \in \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)$ tel que

$$y_i = y_i' + \lambda_i x_{n+1}.$$

Suite de la preuve

Suite de la preuve

- Si tous les λ_i sont nuls, alors les y_i sont dans $E' = \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)$ ce qui prouve le résultat par hypothèse de récurrence (la famille L est liée)

Suite de la preuve

- Si tous les λ_i sont nuls, alors les y_i sont dans $E' = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ ce qui prouve le résultat par hypothèse de récurrence (la famille L est liée)
- Sinon, on peut supposer que $\lambda_{n+2} \neq 0$.

Suite de la preuve

- Si tous les λ_i sont nuls, alors les y_i sont dans $E' = \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)$ ce qui prouve le résultat par hypothèse de récurrence (la famille L est liée)
- Sinon, on peut supposer que $\lambda_{n+2} \neq 0$.
- On a alors $x_{n+1} = \frac{1}{\lambda_{n+2}}(y_{n+2} - y'_{n+2})$ puis, pour tout $i \in [|1, n+1|]$:

$$y_i = y'_i + \frac{\lambda_i}{\lambda_{n+2}}(y_{n+2} - y'_{n+2})$$

et

$$y_i - \frac{\lambda_i}{\lambda_{n+2}} y_{n+2} = y'_i - \frac{\lambda_i}{\lambda_{n+2}} y'_{n+2}$$

- Or, pour tout entier $i \in [|1, n+2|]$, $y'_i - \frac{\lambda_i}{\lambda_{n+2}} y'_{n+2} \in \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)$ donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

- Or, pour tout entier $i \in [|1, n+2|]$, $y'_i - \frac{\lambda_i}{\lambda_{n+2}} y'_{n+2} \in \mathrm{Vect}\,(x_1, \ldots, x_n)$ donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.
- Alors, la famille des $y_i - \frac{\lambda_i}{\lambda_{n+2}} y_{n+2}$ pour $i \in [|1, n+2|]$ est une famille lié, et donc L est une famille liée.

Existence de la dimension

Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

- Si $E \neq \{0_E\}$, toutes les bases de E sont finies et ont le même nombre d'élément. Cet entier unique est appelé la **dimension** de E et est noté $\dim(E)$;
- Si $E = \{0_E\}$, alors par convention, $\dim(E) = 0$.

Remarque

Dans le cas $\dim(E)$=1, on dit que E est une droite vectorielle, et dans le cas $\dim(E) = 2$, que E est un plan vectoriel.

Plan de la preuve

- Soit $\mathcal{B}$ une base finie de E, et $\mathcal{B}'$ une autre base. Comme c'est une famille libre, alors $\mathcal{B}'$ est finie.
- Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors, comme $\mathcal{B}$ est génératrice, et $\mathcal{B}'$ est libre, on en déduit que $\mathcal{B}'$ a moins d'élément que $\mathcal{B}$. On montre de même que $\mathcal{B}$ a moins d'élément que $\mathcal{B}'$.

Exemples

1. $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension n.
2. $F_n = \operatorname{Vect}\left(x \mapsto 1,\ x \mapsto x, \ldots, x \mapsto x^n\right)$ est un espace vectoriel de dimension $n+1$.
3. $F = \operatorname{Vect}\left((1,-5,7),(2,6,8),(3,1,15),(1,11,1)\right)$ est de dimension 2
4. $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x+y-2z=0\}$ est de dimension 2.
5. $\mathcal{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel de dimension np.

Proposition

Dans un espace E de dimension n, toute famille libre possède au plus n éléments, et toute famille génératrice de E possède au moins n éléments.

Caractérisation des bases en dimension finie

Théorème

Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$, on considère $\mathcal{B}$ une famille de n vecteurs de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\mathcal{B}$ est une base
- $\mathcal{B}$ est une famille libre
- $\mathcal{B}$ est une famille génératrice.

Idée de la preuve

Si $\mathcal{B}$ est une base, on sait qu'elle possède n éléments. Si $\mathcal{F}$ est une famille libre, alors on peut la compléter pour former une base de E, qui sera de dimension n. Si $\mathcal{F}$ contient déjà n éléments, c'est donc déjà une base !

Exemples

1. $((0,1,2),(1,2,0),(2,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. $(1,i)$ est une base du $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{C}$ qui est donc de dimension 2, mais pas du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
3. $\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 1.

Sommaire

Sommaire

Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. Par ailleurs, si $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$.

Preuve

- Supposons $F \neq \{0_E\}$. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des nombres d'élément des familles libre de F.

Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. Par ailleurs, si $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$.

Preuve

- Supposons $F \neq \{0_E\}$. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des nombres d'élément des familles libre de F.
- C'est un ensemble de $\mathbb{N}$ non vide et majoré : il admet un plus grand élément n.

Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. Par ailleurs, si $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$.

Preuve

- Supposons $F \neq \{0_E\}$. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des nombres d'élément des familles libre de F.
- C'est un ensemble de $\mathbb{N}$ non vide et majoré : il admet un plus grand élément n.
- Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de F avec n éléments. Alors $n \leqslant \dim(E)$ car c'est une famille libre de E.

Théorème

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. Par ailleurs, si $\dim(F) = \dim(E)$ alors $F = E$.

Preuve

- Supposons $F \neq \{0_E\}$. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des nombres d'élément des familles libre de F.
- C'est un ensemble de $\mathbb{N}$ non vide et majoré : il admet un plus grand élément n.
- Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de F avec n éléments. Alors $n \leqslant \dim(E)$ car c'est une famille libre de E.
- Soit $x \in F$. Alors la famille $\mathcal{L}$ augmentée de x est liée donc x est CL d'éléments de $\mathcal{L}$: c'est une base.

Sommaire

Existence de supplémentaires en dimension finie

Théorème

Soient E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F admet un supplémentaire dans E

Plan de la preuve

- Le cas $F = \{0_E\}$ est immédiat

Existence de supplémentaires en dimension finie

Théorème

Soient E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F admet un supplémentaire dans E

Plan de la preuve

- Le cas $F = \{0_E\}$ est immédiat
- Si $F \neq \{0_E\}$, alors F admet une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$.

Existence de supplémentaires en dimension finie

Théorème

Soient E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F admet un supplémentaire dans E

Plan de la preuve

- Le cas $F = \{0_E\}$ est immédiat
- Si $F \neq \{0_E\}$, alors F admet une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$.
- On complète cette base en une base de E : $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ (par le théorème de la base incomplète)

Existence de supplémentaires en dimension finie

Théorème

Soient E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F admet un supplémentaire dans E

Plan de la preuve

- Le cas $F = \{0_E\}$ est immédiat
- Si $F \neq \{0_E\}$, alors F admet une base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$.
- On complète cette base en une base de E : $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ (par le théorème de la base incomplète)
- On pose alors $G = \mathrm{Vect}\left((e_i)_{p+1 \leqslant i \leqslant n}\right)$. Montrons que F et G sont supplémentaires dans E.

Montrons que pour tout $x \in E$, $\exists!(f,g) \in F \times G$ $x = f + g$. Soit donc $x \in E$: $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

Montrons que pour tout $x \in E$, $\exists!(f, g) \in F \times G$ $x = f + g$. Soit donc $x \in E$: $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

- On pose $f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$ et $g = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i$. Alors $x = f + g$.

Montrons que pour tout $x \in E$, $\exists!(f,g) \in F \times G$ $x = f + g$. Soit donc $x \in E$: $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

- On pose $f = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$ et $g = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i e_i$. Alors $x = f + g$.
- Soit $(f,g) \in F \times G$ et $(f',g') \in F \times G$ tels que $f + g = f' + g'$. Alors $f - f' = g' - g$. On écrit les coordonnées de $f - f'$ et de $g' - g$ dans la base $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$. Alors on trouve que $f - f' = g' - g = 0$.

Exemple

On pose $E = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto 1,\ x \mapsto x,\ x \mapsto x^2,\ x \mapsto x^3\right)$, et $F = \{f \in E,\ \ \forall x \in R,\ f(x+1) = f(1-x)\}$. Alors $\mathrm{Vect}\left((x \mapsto x,\ x \mapsto x^3)\right)$ est un supplémentaire de F dans E.

Exemple

On pose $E = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto 1,\ x \mapsto x,\ x \mapsto x^2,\ x \mapsto x^3\right)$, et $F = \{f \in E,\ \ \forall x \in R,\ f(x+1) = f(1-x)\}$. Alors $\mathrm{Vect}\left((x \mapsto x,\ x \mapsto x^3)\right)$ est un supplémentaire de F dans E.

- Soit $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
  $f \in F \Leftrightarrow a = 0,\ 2b + c = 0$.

Exemple

On pose $E = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto 1,\ x \mapsto x,\ x \mapsto x^2,\ x \mapsto x^3\right)$, et $F = \{f \in E,\ \ \forall x \in R,\ f(x+1) = f(1-x)\}$. Alors $\mathrm{Vect}\left((x \mapsto x,\ x \mapsto x^3)\right)$ est un supplémentaire de F dans E.

- Soit $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
  $f \in F \Leftrightarrow a = 0,\ 2b + c = 0$.
- $(x \mapsto 1,\ x \mapsto x^2 - 2x)$ engendre F, et c'est une famille libre : c'est une base de F.

Exemple

On pose $E = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto 1,\ x \mapsto x,\ x \mapsto x^2,\ x \mapsto x^3\right)$, et $F = \{f \in E,\ \ \forall x \in R,\ f(x+1) = f(1-x)\}$. Alors $\mathrm{Vect}\left((x \mapsto x,\ x \mapsto x^3)\right)$ est un supplémentaire de F dans E.

- Soit $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
  $f \in F \Leftrightarrow a = 0,\ 2b + c = 0$.
- $(x \mapsto 1,\ x \mapsto x^2 - 2x)$ engendre F, et c'est une famille libre : c'est une base de F.
- On complète pour obtenir une base de E : la famille $(x \mapsto 1,\ x \mapsto x^2 - 2x, x \mapsto x,\ x \mapsto x^3)$ est libre, et composée de 4 vecteurs : c'est une base de E.

Exemple

On pose $E = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto 1,\ x \mapsto x,\ x \mapsto x^2,\ x \mapsto x^3\right)$, et $F = \{f \in E,\ \ \forall x \in R,\ f(x+1) = f(1-x)\}$. Alors $\mathrm{Vect}\left((x \mapsto x,\ x \mapsto x^3)\right)$ est un supplémentaire de F dans E.

- Soit $f : x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
  $f \in F \Leftrightarrow a = 0,\ 2b + c = 0$.
- $(x \mapsto 1,\ x \mapsto x^2 - 2x)$ engendre F, et c'est une famille libre : c'est une base de F.
- On complète pour obtenir une base de E : la famille $(x \mapsto 1,\ x \mapsto x^2 - 2x, x \mapsto x,\ x \mapsto x^3)$ est libre, et composée de 4 vecteurs : c'est une base de E.
- $\mathrm{Vect}\left((x \mapsto x,\ x \mapsto x^3)\right)$ est un supplémentaire de F dans E.

Sommaire

Dimension d'une somme de sev

Théorème

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Alors $F+G$ est de dimension finie et on a

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

C'est **la formule de Grassmann**
En particulier, si F et G sont en somme directe, alors $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G)$.

Plan de la preuve

- On peut supposer $\dim(F) \neq 0$ et $\dim(G) \neq 0$.

Plan de la preuve

- On peut supposer $\dim(F) \neq 0$ et $\dim(G) \neq 0$.
- On commence par montrer le cas ou F et G sont en somme directe dans E

Plan de la preuve

- On peut supposer $\dim(F) \neq 0$ et $\dim(G) \neq 0$.
- On commence par montrer le cas ou F et G sont en somme directe dans E
  - Soit $(e_1 \dots, e_p)$ une base de F, et soit $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de G. Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $F + G$ d'où le résultat.

Plan de la preuve

- On peut supposer $\dim(F) \neq 0$ et $\dim(G) \neq 0$.
- On commence par montrer le cas ou F et G sont en somme directe dans E
  - Soit $(e_1 \dots, e_p)$ une base de F, et soit $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de G. Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $F + G$ d'où le résultat.
- $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de F qui est de dimension finie : $F \cap G$ est de dimension finie.

Plan de la preuve

- On peut supposer $\dim(F) \neq 0$ et $\dim(G) \neq 0$.
- On commence par montrer le cas ou F et G sont en somme directe dans E
  - Soit $(e_1 \dots, e_p)$ une base de F, et soit $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de G. Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $F + G$ d'où le résultat.
- $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de F qui est de dimension finie : $F \cap G$ est de dimension finie.
- $F \cap G$ admet donc un supplémentaire H dans F. D'après le point précédent, $\dim(F \cap G) + \dim(H) = \dim(F)$.

Plan de la preuve

- On peut supposer $\dim(F) \neq 0$ et $\dim(G) \neq 0$.
- On commence par montrer le cas ou F et G sont en somme directe dans E
  - Soit $(e_1 \dots, e_p)$ une base de F, et soit $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de G. Alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $F + G$ d'où le résultat.
- $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de F qui est de dimension finie : $F \cap G$ est de dimension finie.
- $F \cap G$ admet donc un supplémentaire H dans F. D'après le point précédent, $\dim(F \cap G) + \dim(H) = \dim(F)$.
- Montrons que H est aussi un supplémentaire de G dans $F + G$.
  - $H \cap G = \{0_E\}$

Plan de la preuve

- On peut supposer $\dim(F) \neq 0$ et $\dim(G) \neq 0$.
- On commence par montrer le cas ou F et G sont en somme directe dans E
  - Soit $(e_1 \ldots, e_p)$ une base de F, et soit $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base de G. Alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $F + G$ d'où le résultat.
- $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de F qui est de dimension finie : $F \cap G$ est de dimension finie.
- $F \cap G$ admet donc un supplémentaire H dans F. D'après le point précédent, $\dim(F \cap G) + \dim(H) = \dim(F)$.
- Montrons que H est aussi un supplémentaire de G dans $F + G$.
  - $H \cap G = \{0_E\}$
  - $H + G = F + G$

  Donc on a $H \oplus G = F + G$.

Théorème

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On s'intéresse aux trois assertions suivantes :

1. $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$
2. $F \cap G = \{0_E\}$
3. $F + G = E$.

Alors F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si DEUX SEULEMENT de ces trois assertions sont vraies. La troisième est alors automatiquement vraie.

Plan de la preuve

- (1) et (2)$\Rightarrow$ (3) : D'après la formule de Grassmann, $\dim(F+G)=\dim(E)$. De plus, $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E, donc $F+G=E$.

Plan de la preuve

- (1) et (2)$\Rightarrow$ (3) : D'après la formule de Grassmann, $\dim(F+G)=\dim(E)$. De plus, $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E, donc $F+G=E$.
- (2) et (3)$\Rightarrow$ (1) Immédiat par le formule de Grassmann

Plan de la preuve

- (1) et (2)$\Rightarrow$ (3) : D'après la formule de Grassmann, $\dim(F+G)=\dim(E)$. De plus, $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E, donc $F+G=E$.
- (2) et (3)$\Rightarrow$ (1) Immédiat par le formule de Grassmann
- (3) et (1)$\Rightarrow$ (2) On a $\dim(F\cap G)=0$ donc $F\cap G=\{0_E\}$.

Exemple

On pose $F = \mathrm{Vect}\left((0,1,0)\right)$ et $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y + 3z = 0\}$. Alors F et G sont des espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

Sommaire

Rang

Définition

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pas nécessairement de dimension finie et $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de E. La dimension de $\mathrm{Vect}\left((x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}\right)$ est appelé le **rang** de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$. Ce nombre est noté $\mathrm{rang}(x_1, \ldots, x_n)$ ou $\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_n)$.

Remarques

1. $\mathrm{rang}(x_1, \ldots, x_n) \leqslant n$
2. $\forall x_1, \ldots, x_n \in E, \ \mathrm{rang}(x_1, \ldots, x_n) = n \iff (x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est libre.

Exemples

1. $\text{rang}((1,1,0),(0,0,1)=2$
2. $\text{rang}((1,1,0),(0,0,1),(1,1,1))=2$