HLMA201 Applications linéaires

Gaëtan Planchon

Université de Montpellier
Faculté des Sciences

29 mars 2017

1. Matrices associée à une application linéaire

1.1 Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur

1.2 Matrice d'une famille de vecteurs

1.3 Matrice d'une application linéaire

1.4 Isomorphisme entre $\mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$

2. Matrices carrées et endomorphisme

2.1 Matrice d'un automorphisme de E et sa réciproque

2.2 $\mathcal{GL}(E)$ et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$

3. Rang d'une matrice

3.1 Définition

3.2 Lien entre le avec le rang d'une application linéaire

3.3 Méthode pratique du calcul du rang d'une matrice

4. Complément sur les matrices élémentaires

Dans la suite du cours, E et F désignent deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finies, différents de $\{0\}$, $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$.

Sommaire

1. Matrices associée à une application linéaire
1.1 Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur
1.2 Matrice d'une famille de vecteurs
1.3 Matrice d'une application linéaire
1.4 Isomorphisme entre $\mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$

2. Matrices carrées et endomorphisme

3. Rang d'une matrice

4. Complément sur les matrices élémentaires

Sommaire

1. Matrices associée à une application linéaire
1.1 Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur
1.2 Matrice d'une famille de vecteurs
1.3 Matrice d'une application linéaire
1.4 Isomorphisme entre $\mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$

2. Matrices carrées et endomorphisme
2.1 Matrice d'un automorphisme de E et sa réciproque
2.2 $\mathcal{GL}(E)$ et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$

3. Rang d'une matrice
3.1 Définition
3.2 Lien entre le avec le rang d'une application linéaire
3.3 Méthode pratique du calcul du rang d'une matrice

4. Complément sur les matrices élémentaires

Proposition

Soit $\mathscr{B}_=(e_1, \dots, e_p)$ une base de E. L'application $\mathcal{M}_{\mathscr{B}_E}$de E dans $\mathscr{M}_{(p,1)}(\mathbb{K})$ qui a un vecteur x de E associe la matrice colonne de ses coordonnées dans dans la base $\mathscr{B}_E$ est un isomorphisme d'espace vectoriel. C'est l'application qui a tout $x = \sum_{k=1}^{p} x_i e_i$ associe $X = \mathcal{M}_{\mathscr{B}_E}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

Plan de la preuve

Plan de la preuve

- L'application $\mathcal{M}_{\mathscr{B}_E}$ est bien une application linéaire de E dans $\mathscr{M}_{(p,1)}(\mathbb{K})$

Plan de la preuve

- L'application $\mathcal{M}_{\mathscr{B}_E}$ est bien une application linéaire de E dans $\mathscr{M}_{(p,1)}(\mathbb{K})$
- $\dim(E) = p = \dim(\mathscr{M}_{(p,1)}(\mathbb{K}))$

Plan de la preuve

- L'application $\mathcal{M}_{\mathscr{B}_E}$ est bien une application linéaire de E dans $\mathscr{M}_{(p,1)}(\mathbb{K})$
- $\dim(E) = p = \dim(\mathscr{M}_{(p,1)}(\mathbb{K}))$
- Comme $\mathscr{B}_E$ est une base de E, l'application $\mathcal{M}_{\mathscr{B}_E}$ est injective, et donc bijective (grâce au point précédent)

Dans la suite, on notera x, y, z les éléments de E et $X_{\mathscr{B}_E}, Y_{\mathscr{B}_E}, Y_{\mathscr{B}_E}$ ou même simplement X, Y, Z les matrices colonnes de leur coordonnées dans la base $\mathscr{B}_E$.

Sommaire

1. Matrices associée à une application linéaire
1.1 Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur
1.2 Matrice d'une famille de vecteurs
1.3 Matrice d'une application linéaire
1.4 Isomorphisme entre $\mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$

2. Matrices carrées et endomorphisme
2.1 Matrice d'un automorphisme de E et sa réciproque
2.2 $\mathcal{GL}(E)$ et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$

3. Rang d'une matrice
3.1 Définition
3.2 Lien entre le avec le rang d'une application linéaire
3.3 Méthode pratique du calcul du rang d'une matrice

4. Complément sur les matrices élémentaires

Définition

Soit $\mathscr{B}_=(e_1, \dots, e_p)$ une base de E, et soit $(v_1, \dots, v_k)$ une famille de k vecteurs de E. On appelle **matrice de la famille** $(v_1, \dots, v_k)$ relativement à la base $\mathscr{B}_E$ la matrice de $\mathscr{M}_{(p,k)}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les matrices colonnes des coordonnées de $v_1, \dots, v_k$ dans la base $\mathscr{B}_E$. on la note $\mathcal{M}_{\mathscr{B}_E}(v_1, \dots, v_k)$.

Exemple

On se place dans $\mathbb{R}_3[X]$. On pose
$v_1 = (X-2)^2, \quad v_2 = X, v_3 = (X-1)^3$. Alors la matrice de (v_1, v_2, v_3) dans la base canonique est

Définition

Soit $\mathscr{B}_{=}(e_1, \dots, e_p)$ une base de E, et soit $(v_1, \dots, v_k)$ une famille de k vecteurs de E. On appelle **matrice de la famille** $(v_1, \dots, v_k)$ relativement à la base $\mathscr{B}_E$ la matrice de $\mathscr{M}_{(p,k)}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les matrices colonnes des coordonnées de $v_1, \dots, v_k$ dans la base $\mathscr{B}_E$. on la note $\mathcal{M}_{\mathscr{B}_E}(v_1, \dots, v_k)$.

Exemple

On se place dans $\mathbb{R}_3[X]$. On pose
$v_1 = (X-2)^2, \quad v_2 = X, v_3 = (X-1)^3$. Alors la matrice de (v_1, v_2, v_3) dans la base canonique est

$$\mathcal{M}_{\mathscr{B}_c}(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sommaire

1. Matrices associée à une application linéaire
1.1 Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur
1.2 Matrice d'une famille de vecteurs
1.3 Matrice d'une application linéaire
1.4 Isomorphisme entre $\mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$

2. Matrices carrées et endomorphisme
2.1 Matrice d'un automorphisme de E et sa réciproque
2.2 $\mathcal{GL}(E)$ et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$

3. Rang d'une matrice
3.1 Définition
3.2 Lien entre le avec le rang d'une application linéaire
3.3 Méthode pratique du calcul du rang d'une matrice

4. Complément sur les matrices élémentaires

Définition

On note $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathscr{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F. Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. La matrice de $\mathscr{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$ dont la j-ème colonne est le vecteur colonne des coordonnées de $u(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}_F$ est appelée **matrice de u relativement aux bases** $\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F$ et est notée $\mathcal{M}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_E}(u)$

Exemples

1. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ l'application qui a (x, y) associe $(x+y, x-y, x)$ Alors $\mathcal{M}_{\mathscr{B}'_c, \mathscr{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$..
2. On considère $e_1 = (1, 1)$ et $e_2 = (1, -1)$, et on pose $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ et $\mathscr{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Alors, $\mathcal{M}_{\mathscr{B}_c, \mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Soit $D : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'application linéaire qui à un polynôme P associe P'. On a $\mathcal{M}_{\mathscr{B}_c, \mathscr{B}_c}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Et si $\mathscr{B} = (1, (X-1), (X-1)^2)$, quelle est $\mathcal{M}_{\mathscr{B}, \mathscr{B}}(D)$?

Remarques

1. Si $u \in \mathscr{L}(E)$, et si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors la matrice $\mathcal{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}$ est appelée simplement la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$, on la note alors $\mathcal{M}_{\mathscr{B}}(u)$.

Remarques

1. Si $u \in \mathscr{L}(E)$, et si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors la matrice $\mathcal{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}$ est appelée simplement la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$, on la note alors $\mathcal{M}_{\mathscr{B}}(u)$.
2. Si E est de dimension p, la matrice de l'identité Id_E relativement à une base quelconque $\mathscr{B}$ est appelé la matrice identité, notée I_n. C'est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux de la diagonale qui valent 1 (c'est indépendant du choix de la base).

Remarques

1. Si $u \in \mathscr{L}(E)$, et si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors la matrice $\mathcal{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}$ est appelée simplement la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$, on la note alors $\mathcal{M}_{\mathscr{B}}(u)$.
2. Si E est de dimension p, la matrice de l'identité Id_E relativement à une base quelconque $\mathscr{B}$ est appelé la matrice identité, notée I_n. C'est la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux de la diagonale qui valent 1 (c'est indépendant du choix de la base).
3. Réciproquement, soit $A = (a_{i,j})$ de $\mathscr{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$, on peut considérer l'application $u : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ qui a tout p-uplet $(x_1, \ldots, x_p)$ associe le n-uplet $(y_1, \ldots, y_n)$ tel que pour tout j, $y_j = \sum_{k=1}^{p} a_{j,k}x_k$. C'est une application linéaire, appelée application linéaire canoniquement associée à A.

Exemple

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$u(x, y, z) = (y + z, z + x, x + y)$$

Exemple

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$u(x, y, z) = (y + z, z + x, x + y)$$

$u(e_1) = e_2 + e_3$, $u(e_2) = e_1 + e_3$, $u(e_3) = e_1 + e_2$.
Alors

$$\mathcal{M}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemple

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$u(x, y, z) = (y + z, z + x, x + y)$$

$u(e_1) = e_2 + e_3,\ u(e_2) = e_1 + e_3,\ u(e_3) = e_1 + e_2.$
Alors

$$\mathcal{M}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathscr{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ avec $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 0)$. Alors $\mathcal{M}_{\mathscr{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

Calcul effectif de l'image d'un vecteur

Proposition

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $\mathscr{B}' = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Pour tout vecteur x de E et pour tout vecteur y de F, on a

$$y = u(x) \Leftrightarrow Y = AX$$

où $A = \mathcal{M}_{\mathscr{B}', \mathscr{B}}(u)$, $X = \mathcal{M}_{\mathscr{B}}(x)$ et $Y = \mathcal{M}_{\mathscr{B}'}(y)$.

Remarques

- La matrice A est de taille $n \times p$
- La matrice X est de taille $p \times 1$
- La matrice Y est de taille $n \times 1$

Preuve

La matrice A est telle que pour tout $j \in [|1, p|]$, on a $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i$. On note $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i$. On a ainsi $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Suite de la preuve

$$y = u(x) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} y_i f_i = u\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right)$$

Suite de la preuve

$$\begin{aligned} y = u(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} y_i f_i = u\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} y_i f_i = \sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j) \end{aligned}$$

Suite de la preuve

$$\begin{aligned} y = u(x) \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} y_i f_i = u\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} y_i f_i = \sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j) \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} y_i f_i = \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i \end{aligned}$$

Suite de la preuve

$$
\begin{aligned}
y = u(x) &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i f_i = u\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i f_i = \sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j) \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i f_i = \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i \\
&\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i f_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j\right) f_i
\end{aligned}
$$

Suite de la preuve

$$
\begin{aligned}
y = u(x) \quad & \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} y_i f_i = u\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) \\
& \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} y_i f_i = \sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j) \\
& \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} y_i f_i = \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i \\
& \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} y_i f_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j\right) f_i \\
& \Leftrightarrow \quad \forall i \in [|1, n|],\ y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j
\end{aligned}
$$

On a donc bien

$$\forall x \in E,\ \forall y \in F, y = u(x) \Leftrightarrow Y = AX$$

Exemple

On considère l'application $u : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X] \\ P \mapsto P' \end{cases}$. On note $\mathscr{B}_3$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathscr{B}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On a $\mathcal{M}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Si $P = 13 + 11X + 7X^2 + 5X^3$, les

coordonnées de P' dans $\mathscr{B}_2$ sont bien

On a donc bien

$$\forall x \in E,\ \forall y \in F, y = u(x) \Leftrightarrow Y = AX$$

Exemple

On considère l'application $u : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_2[X] \\ P \mapsto P' \end{cases}$. On note $\mathscr{B}_3$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathscr{B}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. On a $\mathcal{M}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Si $P = 13 + 11X + 7X^2 + 5X^3$, les coordonnées de P' dans $\mathscr{B}_2$ sont bien $\begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Sommaire

1. Matrices associée à une application linéaire
1.1 Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur
1.2 Matrice d'une famille de vecteurs
1.3 Matrice d'une application linéaire
1.4 Isomorphisme entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$

2. Matrices carrées et endomorphisme
2.1 Matrice d'un automorphisme de E et sa réciproque
2.2 $\mathcal{GL}(E)$ et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$

3. Rang d'une matrice
3.1 Définition
3.2 Lien entre le avec le rang d'une application linéaire
3.3 Méthode pratique du calcul du rang d'une matrice

4. Complément sur les matrices élémentaires

Théorème

Soit $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_p)$ une base de E et $\mathscr{B}'=(f_1,\dots,f_n)$ une base de F. L'application qui à toute application linéaire u de $\mathscr{L}(E,F)$ associe la matrice $\mathcal{M}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(u)$ est un isomorphisme d'espace vectoriel

Plan de la preuve

- On montre d'abord que $\mathcal{M}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$ est bien une application linéaire
- Montrons que $\mathcal{M}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$ est surjective. Soit $A=(a_{i,j})\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On défini alors l'application linéaire u telle que pour tout $j\in[|1,p|]$, on a

$$u(e_j)=\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}f_i$$

Suite de la preuve

Alors, par construction, $A = \mathcal{M}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(u)$.

- Montrons que $\mathcal{M}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$ est injective. Soit $u \in \ker(\mathcal{M}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}})$. Alors, pour tout $j \in [|1,p|]$, $u(e_j) = 0$. Il est clair qu'alors, pour tout $x \in E$, $u(x) = 0$ et $u = 0$.

Remarques

1. On a $\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$
2. La matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaires est la combinaison linéaire des matrices des applications !
3. On ne peut pas (plus) dire « soit u l'application linéaire dont la matrice est A », mais « soit u l'application linéaire dont la matrice relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ est A »

Produit de matrices et composée d'applications linéaires

Proposition

Soit G un espace vectoriel de dimension finie, muni d'une base $\mathscr{B}''$. E et F sont munis des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. Pour tous $u \in \mathscr{L}(E,F), \quad v \in \mathscr{L}(F,G)$, on a

$$\mathcal{M}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}}(v \circ u) = \mathcal{M}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}'}(v) \times \mathcal{M}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(u)$$

Plan de la preuve

Avec les notations « habituelles ». Soit $x \in E$. On pose $y = u(x)$ et $z = v(y) = v \circ u(x)$. On a $Y = AX$ et $Z = BY = B(AX) = (BA)X$. Or à l'application linéaire $v \circ u$ ne correspond qu'une matrice relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}''$. C'est donc BA.

Exercice

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 1 & & \vdots & \\ 1 & 0 & \dots & & \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. En considérant l'application linéaire canoniquement associée à A.
Calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$.

Sommaire

1. Matrices associée à une application linéaire

2. Matrices carrées et endomorphisme
2.1 Matrice d'un automorphisme de E et sa réciproque
2.2 $\mathcal{GL}(E)$ et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$

3. Rang d'une matrice

4. Complément sur les matrices élémentaires

Sommaire

1. Matrices associée à une application linéaire
1.1 Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur
1.2 Matrice d'une famille de vecteurs
1.3 Matrice d'une application linéaire
1.4 Isomorphisme entre $\mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$

2. Matrices carrées et endomorphisme
2.1 Matrice d'un automorphisme de E et sa réciproque
2.2 $\mathcal{GL}(E)$ et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$

3. Rang d'une matrice
3.1 Définition
3.2 Lien entre le avec le rang d'une application linéaire
3.3 Méthode pratique du calcul du rang d'une matrice

4. Complément sur les matrices élémentaires

Proposition

Soit E un espace vectoriel de dimension n, et soit $\mathscr{B}$ une base de E. La matrice d'un automorphisme de E relativement à la base $\mathscr{B}$ est une matrice carrée inversible. L'inverse de cette matrice est alors la matrice de u^{-1} relativement à la base $\mathscr{B}$.

Plan de la preuve

- u est un automorphisme de E, donc admet une réciproque u^{-1} qui est aussi un automorphisme.
- On pose $A = \mathcal{M}_{\mathscr{B}}(u)$ et $B = \mathcal{M}_{\mathscr{B}}(u^{-1})$.
- On sait que $u \circ u^{-1} = u^{-1} \circ u = id_E$;
- On en déduit que $AB = BA = I_n$
- A est donc inversible, et $A^{-1} = B$.

Exemple

On considère l'application u de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ qui a un polynôme P associe $P(X+2)$.

- Ceci définie un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$
- La matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ est
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- Cette matrice est inversible, d'inverse
$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sommaire

1. Matrices associée à une application linéaire
1.1 Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur
1.2 Matrice d'une famille de vecteurs
1.3 Matrice d'une application linéaire
1.4 Isomorphisme entre $\mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$

2. Matrices carrées et endomorphisme
2.1 Matrice d'un automorphisme de E et sa réciproque
2.2 $\mathcal{GL}(E)$ et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$

3. Rang d'une matrice
3.1 Définition
3.2 Lien entre le avec le rang d'une application linéaire
3.3 Méthode pratique du calcul du rang d'une matrice

4. Complément sur les matrices élémentaires

Défintions

1. On note $\mathcal{GL}(E)$ l'ensemble des automorphisme de E ;
2. On note $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Théorème

1. $\mathcal{GL}(E)$ est possède une loi de composition interne : la composée des applications. Cette loi est associative, et possède un élément neutre (Id_E), et tout élément de $\mathcal{GL}(E)$ possède un inverse
2. $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est possède une loi de composition interne : le produit matriciel. Cette loi est associative, et possède un élément neutre (I_n), et tout élément de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ possède un inverse.

Théorème

1. $\mathcal{GL}(E)$ est possède une loi de composition interne : la composée des applications. Cette loi est associative, et possède un élément neutre (Id_E), et tout élément de $\mathcal{GL}(E)$ possède un inverse
2. $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ est possède une loi de composition interne : le produit matriciel. Cette loi est associative, et possède un élément neutre (I_n), et tout élément de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ possède un inverse.

Attention, ce ne sont pas des espaces vectoriels !

Théorème

E est de dimension n. Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Alors l'application $\varphi_{\mathscr{B}}$ de $\mathcal{GL}(E)$ dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ qui a un automorphisme de E associe sa matrice relativement à la base $\mathscr{B}$ est une bijection.

Plan de la preuve

- On vérifie $\varphi_{\mathscr{B}}$ est injective :

Théorème

E est de dimension n. Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Alors l'application $\varphi_{\mathscr{B}}$ de $\mathcal{GL}(E)$ dans $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ qui a un automorphisme de E associe sa matrice relativement à la base $\mathscr{B}$ est une bijection.

Plan de la preuve

- On vérifie $\varphi_{\mathscr{B}}$ est injective : si $\varphi_{\mathscr{B}}(u) = \varphi_{\mathscr{B}}(v)$, alors $u = v$ (regarder les vecteurs de base)
- Puis que $\varphi_{\mathscr{B}}$ est surjective : si $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, on note u (*resp.* v) l'endomorphisme de E dont M (*resp.* M^{-1}) est la matrice relativement à $\mathscr{B}$. On vérifie alors que pour tout j, $u \circ v(e_j) = e_j$.

Sommaire

1. Matrices associée à une application linéaire

2. Matrices carrées et endomorphisme

3. Rang d'une matrice
3.1 Définition
3.2 Lien entre le avec le rang d'une application linéaire
3.3 Méthode pratique du calcul du rang d'une matrice

4. Complément sur les matrices élémentaires

Sommaire

1. Matrices associée à une application linéaire
1.1 Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur
1.2 Matrice d'une famille de vecteurs
1.3 Matrice d'une application linéaire
1.4 Isomorphisme entre $\mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$

2. Matrices carrées et endomorphisme
2.1 Matrice d'un automorphisme de E et sa réciproque
2.2 $\mathcal{GL}(E)$ et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$

3. Rang d'une matrice
3.1 Définition
3.2 Lien entre le avec le rang d'une application linéaire
3.3 Méthode pratique du calcul du rang d'une matrice

4. Complément sur les matrices élémentaires

Définition

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **rang** de la matrice A, et l'on note $\mathrm{rg}(A)$ la dimension du sous-espace vectoriel engendré dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ par les p vecteurs colonnes de A.

Exemples

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 3
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ est de rang 2.
3. Le rang d'une matrice échelonnée est le nombre de ses lignes non nulles.

Sommaire

1. Matrices associée à une application linéaire
1.1 Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur
1.2 Matrice d'une famille de vecteurs
1.3 Matrice d'une application linéaire
1.4 Isomorphisme entre $\mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$

2. Matrices carrées et endomorphisme
2.1 Matrice d'un automorphisme de E et sa réciproque
2.2 $\mathcal{GL}(E)$ et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$

3. Rang d'une matrice
3.1 Définition
3.2 Lien entre le avec le rang d'une application linéaire
3.3 Méthode pratique du calcul du rang d'une matrice

4. Complément sur les matrices élémentaires

Théorème

Soient A une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice de rang r, et soit u_A l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à A. Alors $r = rg(A) = rg(u_A) \leqslant \min(n, p)$.

Plan de la preuve

- On sait que $\mathrm{Im}(u_A)$ est engendré par la famille des images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^p$.
- On a donc

$$rg(u_A) = \dim(\mathrm{Im}(u_A)) = \dim(\mathrm{Vect}\,(u_A(e_1), \ldots, u_A(e_p)) = rg(A)$$

- Comme $\mathrm{Im}(u_A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$, on a $rg(u_A) \leqslant n$. Et d'après ce qui précède, $rg(u_A) \leqslant p$

Proposition

Soit $\mathscr{B}$ une base de E (de dimension n), et soit $f_1, \dots, f_p$ des vecteurs de E, et soit M la matrice de ces vecteurs dans la base $\mathscr{B}$. Alors $rg(f_1, \dots, f_p) = rg(M)$.

plan de la preuve

- Soit $\mathcal{M}_{\mathscr{B}} : E \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ l'application qui a un vecteur x associe sa matrice des cordonnées dans $\mathscr{B}$.
- C'est un isomorphisme.
- Elle *induit* donc un isomorphisme de $\mathrm{Vect}\,(f_1, \dots, f_p)$ sur $\mathrm{Vect}\,(\mathcal{M}_{\mathscr{B}}(f_1), \dots, \mathcal{M}_{\mathscr{B}}(f_p))$.
- Alors $\dim(\mathrm{Vect}\,(f_1, \dots, f_p)) = \dim(\mathrm{Vect}\,(\mathcal{M}_{\mathscr{B}}(f_1), \dots, \mathcal{M}_{\mathscr{B}}(f_p)))$ d'où le résultat.

Théorème

On note $\mathscr{B}$ une base de E, et $\mathscr{B}'$ une base de F. Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors on a

$$rg(u) = rg(\mathcal{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u)).$$

Le rang d'une matrice est égal au rang de sa matrice indépendamment du choix des bases.

Plan de la preuve

Théorème

On note $\mathscr{B}$ une base de E, et $\mathscr{B}'$ une base de F. Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors on a

$$rg(u) = rg(\mathcal{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u)).$$

Le rang d'une matrice est égal au rang de sa matrice indépendamment du choix des bases.

Plan de la preuve

- On note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.

Théorème

On note $\mathscr{B}$ une base de E, et $\mathscr{B}'$ une base de F. Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors on a

$$rg(u) = rg(\mathcal{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u)).$$

Le rang d'une matrice est égal au rang de sa matrice indépendamment du choix des bases.

Plan de la preuve

- On note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.
- $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\,(u(e_1), \dots, u(e_p))$ donc $rg(u) = rg(u(e_1), \dots, u(e_p))$.

Théorème

On note $\mathscr{B}$ une base de E, et $\mathscr{B}'$ une base de F. Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors on a

$$rg(u) = rg(\mathcal{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u)).$$

Le rang d'une matrice est égal au rang de sa matrice indépendamment du choix des bases.

Plan de la preuve

- On note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.
- $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\,(u(e_1), \ldots, u(e_p))$ donc $rg(u) = rg(u(e_1), \ldots, u(e_p))$.
- Alors $rg(u) = rg(\mathcal{M}_{\mathscr{B}'}(u(e_1), \ldots, u(e_p)))$

Théorème

On note $\mathscr{B}$ une base de E, et $\mathscr{B}'$ une base de F. Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors on a

$$rg(u) = rg(\mathcal{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u)).$$

Le rang d'une matrice est égal au rang de sa matrice indépendamment du choix des bases.

Plan de la preuve

- On note $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E.
- $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\,(u(e_1), \ldots, u(e_p))$ donc $rg(u) = rg(u(e_1), \ldots, u(e_p))$.
- Alors $rg(u) = rg(\mathcal{M}_{\mathscr{B}'}(u(e_1), \ldots, u(e_p)))$
- Or, $\mathcal{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u) = \mathcal{M}'_{\mathscr{B}}(u(e_1), \ldots, u(e_p))$

Théorème

On note $\mathscr{B}$ une base de E, et $\mathscr{B}'$ une base de F. Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors on a

$$rg(u) = rg(\mathcal{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u)).$$

Le rang d'une matrice est égal au rang de sa matrice indépendamment du choix des bases.

Plan de la preuve

- On note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E.
- $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}\,(u(e_1), \dots, u(e_p))$ donc $rg(u) = rg(u(e_1), \dots, u(e_p))$.
- Alors $rg(u) = rg(\mathcal{M}_{\mathscr{B}'}(u(e_1), \dots, u(e_p)))$
- Or, $\mathcal{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u) = \mathcal{M}'_{\mathscr{B}}(u(e_1), \dots, u(e_p))$
- Donc $rg(u) = \mathcal{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u)$

Corollaire

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $rg(A) = n$.

Corollaire

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $rg(A) = n$.

Preuve

Soit u_A l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. Alors on a

$$A \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad u_A \text{ est bijective}$$

Corollaire

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $rg(A) = n$.

Preuve

Soit u_A l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. Alors on a

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible} &\Leftrightarrow u_A \text{ est bijective} \\ &\Leftrightarrow rg(u_A) = n \end{aligned}$$

Corollaire

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $rg(A) = n$.

Preuve

Soit u_A l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. Alors on a

$$\begin{aligned} A \text{ est inversible} &\Leftrightarrow u_A \text{ est bijective} \\ &\Leftrightarrow rg(u_A) = n \\ &\Leftrightarrow rg(A) = n \end{aligned}$$

Sommaire

1. Matrices associée à une application linéaire
1.1 Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur
1.2 Matrice d'une famille de vecteurs
1.3 Matrice d'une application linéaire
1.4 Isomorphisme entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{(n,p)}(\mathbb{K})$

2. Matrices carrées et endomorphisme
2.1 Matrice d'un automorphisme de E et sa réciproque
2.2 $\mathcal{GL}(E)$ et $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$

3. Rang d'une matrice
3.1 Définition
3.2 Lien entre le avec le rang d'une application linéaire
3.3 Méthode pratique du calcul du rang d'une matrice

4. Complément sur les matrices élémentaires

Proposition

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Si $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors $rg(BA) = rg(A)$.
2. Si $C \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ est inversible, alors $rg(AC) = rg(A)$.

Proposition

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors le rang de A est le nombre de lignes non nul après avec échelonné la matrice par des opérations élémentaires sur les lignes.

Proposition

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors le rang de A est le nombre de lignes non nul après avec échelonné la matrice par des opérations élémentaires sur les lignes.

Idée de la preuve

Opérer (pour une opération élémentaire) sur les lignes d'une matrice revient à multiplier à gauche par une matrice inversible. Cela ne change donc pas la valeur du rang.

Exemple

La matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & -3 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{pmatrix}$$

est de rang 3.

Sommaire

1. Matrices associée à une application linéaire

2. Matrices carrées et endomorphisme

3. Rang d'une matrice

4. Complément sur les matrices élémentaires

Opérations élémentaires

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.Soit $\lambda \neq 0$. Les opérations élémentaires sont :

1. On multiplie la i-ème ligne de A par λ
2. On ajoute à la i-ème ligne de A le produit de la j-ème ligne par λ.
3. On multiplie la i-ème colonne de A par λ
4. On ajoute la i-ème colonne de A le produit de la j-ème colonne par λ.

Ces opérations élémentaires sont obtenues par des produits de matrices !

Matrice de dilatation

Définition

Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. **Une matrice de dilatation** notée $D_i(\lambda)$ est une matrice (carrée) diagonale de termes diagonaux tous égaux à 1, sauf celui sur la ligne i qui vaut λ.

Proposition

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, et soit $D_i(\lambda)$ une matrice de dilatation de taille n. Multiplier A à gauche par $D_i(\lambda)$ correspond à multiplier la i-ème ligne de A par λ.

Matrice de transvection

Définition

Soit $i \neq j$. **Une matrice de transvection**, notée $T_{i,j}(\lambda)$ est une matrice triangulaire dont tous les termes sur la diagonale valent 1 et tous les autres termes sont nuls sauf celui d'indice (i,j) qui vaut λ.

Proposition

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}\mathbb{K}$, et soit $T_{i,j}(\lambda)$ une matrice de transvection de taille n. Multiplier A à gauche par $T_{i,j}(\lambda)$ correspond à ajouter à la i-ème ligne de A le produit de la j-ème ligne par λ.

Proposition

Les matrices de transaction et de dilatation sont des matrices inversibles.