HLMA201 Changement de base

Gaëtan Planchon

Université de Montpellier
Faculté des Sciences

20 avril 2017

Dans la suite du cours, E et F désignent deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finies, différents de $\{0\}$, $\mathbb{K}$ désigne soit $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$.

Sommaire

Ce que l'on sait faire : un exemple

Soit u un vecteur de $\mathbb{R}^2$. On note $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, (i, j). On introduit une nouvelle base de $\mathbb{R}^2$, par exemple, (e_1, e_2) avec e_1 qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et e_2 a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Quelles sont, en fonction de x et de y, les nouvelles coordonnées de u dans (e_1, e_2) ?

- On sait que $u = xi + yj$

- On sait que $u = xi + yj$
- On sait que $\begin{cases} e_1 = i - j \\ e_2 = i + j \end{cases}$

- On sait que $u = xi + yj$
- On sait que $\begin{cases} e_1 = i - j \\ e_2 = i + j \end{cases}$
- Alors $\begin{cases} i = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 \\ j = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 \end{cases}$

- On sait que $u = xi + yj$
- On sait que $\begin{cases} e_1 = i - j \\ e_2 = i + j \end{cases}$
- Alors $\begin{cases} i = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 \\ j = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 \end{cases}$
- Enfin $u = x\left(\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2\right) + y\left(-\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2\right)$ soit $u = \frac{x-y}{2}e_1 + \frac{x+y}{2}e_1$.

Traduction matricielle

On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de e_1 et e_2 dans (i, j). On note $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ les cordonnées de u dans la base (e_1, e_2).

Traduction matricielle

On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de e_1 et e_2 dans (i, j). On note $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ les cordonnées de u dans la base (e_1, e_2).

- On a $xi + yj = x'e_1 + y'e_2 = x'(i - j) + y'(i + j) = (x' + y')i + (-x' + y')j$

Traduction matricielle

On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de e_1 et e_2 dans (i, j). On note $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ les cordonnées de u dans la base (e_1, e_2).

- On a $xi + yj = x'e_1 + y'e_2 = x'(i - j) + y'(i + j) = (x' + y')i + (-x' + y')j$
- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Traduction matricielle

On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de e_1 et e_2 dans (i, j). On note $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ les cordonnées de u dans la base (e_1, e_2).

- On a $xi + yj = x'e_1 + y'e_2 = x'(i-j) + y'(i+j) = (x'+y')i + (-x'+y')j$
- $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$
- On a enfin $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Sommaire

Sommaire

Définition

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice $\mathcal{M}_{\mathscr{B}}(e'_1, \dots, e'_n)$. On la note $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$. C'est donc la matrice de Id_E en prenant $\mathscr{B}'$ pour base au départ, et $\mathscr{B}$ à l'arrivée.

Définition

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice $\mathcal{M}_{\mathscr{B}}(e'_1, \dots, e'_n)$. On la note $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$. C'est donc la matrice de Id_E en prenant $\mathscr{B}'$ pour base au départ, et $\mathscr{B}$ à l'arrivée.

Remarque

La matrice $\mathcal{M}_{\mathscr{B}}(e'_1, \dots, e'_n)$ est la matrice dont les coefficients de la j-ème colonne sont les coordonnées de e'_j dans la base $(e_1, \dots, e_n)$.

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^3$, On considère $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (1, 1, -1)$, $u_2 = (1, -1, 1)$, et $u_3 = (-1, 1, 1)$, alors

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^3$, On considère $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (1, 1, -1)$, $u_2 = (1, -1, 1)$, et $u_3 = (-1, 1, 1)$, alors
$$P_{\mathscr{B}', \mathscr{B}_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^3$, On considère $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (1, 1, -1)$, $u_2 = (1, -1, 1)$, et $u_3 = (-1, 1, 1)$, alors
$$P_{\mathscr{B}', \mathscr{B}_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
2. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, soit $\mathscr{B} = (1, (X-1), (X-1)^2, (X-1)^3)$ une

   base de $\mathbb{R}_3[X]$. Alors

Exemples

1. Dans $\mathbb{R}^3$, On considère $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ avec $u_1 = (1, 1, -1)$, $u_2 = (1, -1, 1)$, et $u_3 = (-1, 1, 1)$, alors
$$P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
2. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, soit $\mathscr{B} = (1, (X-1), (X-1)^2, (X-1)^3)$ une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Alors $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}_c} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Proposition

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E. Alors $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est une matrice inversible, et $P^{-1}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$

Preuve

Par définition, $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} = \mathcal{M}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(id_E)$. Comme id_E est un automorphisme de E, alors $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$ est inversible.

Sommaire

Proposition

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $\mathscr{B}'$ une nouvelle base de E, et soit $x \in E$. On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ les coordonnées de x dans les base $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ respectivement. Soit $P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Alors on a

$$X = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} X'.$$

Preuve

Pour tout $x \in E,\ x = id_E(x)$. Alors, en traduisant cela par les matrices, on a

$$X = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} X'$$

Sommaire

Proposition

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On note M la matrice de u relativement à $\mathscr{B}$, et M' la matrice de u relativement à $\mathscr{B}'$. Soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Alors on a

$$M = PM'P^{-1}$$

Plan de la preuve

Proposition

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On note M la matrice de u relativement à $\mathscr{B}$, et M' la matrice de u relativement à $\mathscr{B}'$. Soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Alors on a

$$M = PM'P^{-1}$$

Plan de la preuve

- Soit $x \in E$. On pose $y = u(x)$, et X, Y (*resp.* X' et Y') les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ (*resp.* $\mathscr{B}'$).

Proposition

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On note M la matrice de u relativement à $\mathscr{B}$, et M' la matrice de u relativement à $\mathscr{B}'$. Soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Alors on a

$$M = PM'P^{-1}$$

Plan de la preuve

- Soit $x \in E$. On pose $y = u(x)$, et X, Y (*resp.* X' et Y') les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ (*resp.* $\mathscr{B}'$).
- On sait que $Y = MX$ et $Y = PY'$;

Proposition

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On note M la matrice de u relativement à $\mathscr{B}$, et M' la matrice de u relativement à $\mathscr{B}'$. Soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Alors on a

$$M = PM'P^{-1}$$

Plan de la preuve

- Soit $x \in E$. On pose $y = u(x)$, et X, Y (*resp.* X' et Y') les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ (*resp.* $\mathscr{B}'$).
- On sait que $Y = MX$ et $Y = PY'$;
- $Y = P(M'X') = (PM')X' = (PM')(P^{-1}X) = (PM'P^{-1})X$

Proposition

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On note M la matrice de u relativement à $\mathscr{B}$, et M' la matrice de u relativement à $\mathscr{B}'$. Soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Alors on a

$$M = PM'P^{-1}$$

Plan de la preuve

- Soit $x \in E$. On pose $y = u(x)$, et X, Y (*resp.* X' et Y') les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ (*resp.* $\mathscr{B}'$).
- On sait que $Y = MX$ et $Y = PY'$;
- $Y = P(M'X') = (PM')X' = (PM')(P^{-1}X) = (PM'P^{-1})X$
- Par unicité de la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$, on en déduit que $M = PM'P^{-1}$.

Exercice

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ On note $e_1 = (3, -3, -1)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$.

1. Vérifier que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Ecrire la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
3. En déduire le calcul de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Sommaire

Définition

Deux matrices M et M' de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites *semblables* s'il existe une matrice P inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$M = PM'P^{-1}$$

Proposition

Deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si elles sont les matrices d'un même endomorphisme.

Preuve

($\Leftarrow$) Déjà vu.

($\Rightarrow$)

- Soient M et M' deux matrices semblables, et P inversible tel que $M = PM'P^{-1}$.

Proposition

Deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si elles sont les matrices d'un même endomorphisme.

Preuve

($\Leftarrow$) Déjà vu.
($\Rightarrow$)

- Soient M et M' deux matrices semblables, et P inversible tel que $M = PM'P^{-1}$.
- Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M, et soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Proposition

Deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si elles sont les matrices d'un même endomorphisme.

Preuve

($\Leftarrow$) Déjà vu.

($\Rightarrow$)

- Soient M et M' deux matrices semblables, et P inversible tel que $M = PM'P^{-1}$.
- Soit u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M, et soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
- Pour $j \in [|1, n|]$, on note ε_j le vecteur dont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ est la j-ème colonne de P.

Suite de la preuve

Suite de la preuve

- Comme P est inversible, $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, et P est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à cette (nouvelle) base

Suite de la preuve

- Comme P est inversible, $\mathscr{B}' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, et P est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à cette (nouvelle) base
- On a alors $\mathcal{M}_{\mathscr{B}}(u) = M$ et $\mathcal{M}_{\mathscr{B}'}(u) = P^{-1}MP = M'$ d'où le résultat.

Théorème

Deux matrices semblables ont même rang

Exemple

Montrons que les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exemple

Montrons que les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont semblables.

- On trouve « à la main »une matrice P inversible tel que $PB = AP$

Exemple

Montrons que les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont semblables.

- On trouve « à la main »une matrice P inversible tel que $PB = AP$
- On considère l'endomorphisme canoniquement associé à A, noté u. On cherche deux vecteurs non colinéaires e_1 et e_2 tels que $u(e_1) = e_1$ et $u(e_2) = 3e_2$.

Sommaire

Sommaire

Défintion

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La **trace** de A, notée $tr(A)$ est la somme des éléments de la diagonale. Si $A = (a_{i,j})$, alors

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Exemple

La trace de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ est 7.

Proposition

L'application $tr : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ qui à une matrice associe sa trace est une application linéaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.

Remarque

Lorsque l'ensemble d'arrivée d'une application linéaire est $\mathbb{K}$, on parle de *forme linéaire*

Théorème

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors on a

$$tr(AB) = tr(BA).$$

Plan de la preuve

Théorème

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors on a

$$tr(AB) = tr(BA).$$

Plan de la preuve

- On a $tr(AB) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{k,j} b_{j,k}$

Théorème

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors on a

$$tr(AB) = tr(BA).$$

Plan de la preuve

- On a $tr(AB) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{k,j} b_{j,k}$
- On a de même $tr(BA) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} b_{k,j} a_{j,k}$

Théorème

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors on a

$$tr(AB) = tr(BA).$$

Plan de la preuve

- On a $tr(AB) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{k,j} b_{j,k}$
- On a de même $tr(BA) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} b_{k,j} a_{j,k}$
- C'est la même somme ! !

Théorème

Deux matrices semblables ont la même trace.

Preuve

Théorème

Deux matrices semblables ont la même trace.

Preuve

- Si M et N sont deux matrices semblables, alors il existe P inversible telle que $M = PNP^{-1}$.

Théorème

Deux matrices semblables ont la même trace.

Preuve

- Si M et N sont deux matrices semblables, alors il existe P inversible telle que $M = PNP^{-1}$.
- Alors $tr(M) = tr(PNP^{-1}) = tr(NPP^{-1}) = tr(N)$

.

Exemple

Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables car n'ont pas la même trace.

Remarque

Deux matrices qui ont la même trace ne sont pas nécessairement semblables...
Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables mais ont même trace.

Sommaire

Définition

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On note $tr(u)$ la trace de la matrice de u dans n'importe quelle base.

Remarque

D'après ce qui précède, ce nombre ne dépend pas du choix de la base !

Proposition

Si u et v sont deux endomorphismes de E, alors $tr(u \circ v) = tr(v \circ u)$.

Sommaire

Recherche de noyau et image

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est A. On pose
$u_1 = (1, 1, 1),\ u_2 = (1, -1, 0),\ u_3 = (1, 0, 1)$ et $\mathscr{B}' = (u_1, u_2, u_3)$.

1. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$
2. Écrire la matrice de f dans cette base.
3. Déterminer une base de $\ker(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

Extrait examen 2016

On note $\mathbb{R}_1[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 1 et à coefficients réels. On considère l'application φ telle que, pour tout $P \in \mathbb{R}_1[X]$,

$$\varphi(P) = (X-2)(X-4)P' - (X-3)P.$$

1. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$ (on montrera en particulier en $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}_1[X]$.)
2. On note $\mathscr{B} = (1, X)$ la base canonique de $\mathbb{R}_1[X]$. Déterminer la matrice M de φ relativement à la base $\mathscr{B}$.
3. Justifier que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$ (c'est à dire un endomorphisme de $\mathbb{R}_1[X]$ bijectif).
4.

Suite

1. Démontrer que la famille $\mathscr{B}_1 = (X-2, X-4)$ est une base de $\mathbb{R}_1[X]$.
2. Calculer $\varphi(X-2)$ et $\varphi(X-4)$ puis en déduire la matrice de φ relativement à la base $\mathscr{B}_1$ (au départ et à l'arrivée).
3. Ecrire la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}_1$, notée P puis la matrice de passage de la base $\mathscr{B}_1$ à la base $\mathscr{B}$. Donner sans justifier la relation matricielle entre M, M_1, et P.
4. Calculer enfin M_1^p pour un entier naturel p quelconque, et en déduire M^p.