HLMA201 Polynômes

Gaëtan Planchon

Université de Montpellier
Faculté des Sciences

13 mars 2017

Sommaire

Sommaire

Ensemble des polynômes

Définition

On appelle polynôme à une indéterminée à coefficient dans $\mathbb{K}$ toute suite d'élément de $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang

Remarques

1. Si $A = (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, alors :

$$\exists n \in \mathbb{N} : \ \forall k > n, \ a_k = 0.$$

   On note alors $A = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$ et les nombres $a_0, a_1, \dots, a_n$ sont appelés les coefficients du polynôme A.
2. On désigne par 0 le polynôme nul, c'est à dire le polynôme $(0, 0, \dots)$.

Sommaire

Théorème

L'ensemble des polynômes à coefficient dans $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel pour les lois usuelles de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

Plan de la preuve

- On montre que cet ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:
- Si $A = (a_0, \dots, a_p, 0, \dots)$ et $B = (b_0, \dots, b_n, 0, \dots)$ sont des polynômes et λ et μ deux éléments de $\mathbb{K}$, alors la suite $\lambda A + \mu B$ est nulle (au moins) à partir du rang $\max(p, n) + 1$.

Sommaire

Etant donnés $A = (a_k)$ et $B = (b_k)$ deux polynômes, on définit la suite $C = (c_k)$ en posant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \ c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$$

Exemples

1. Si $A = (1, 2, 3, 0, \dots)$ et $B = (1, 1, 0, \dots)$ alors $C = (1, 3, 5, 3, 0, \dots)$.
2. Si $A = (1, 0, 0, \dots)$ et $B = (1, 2, 3, 4, 0, \dots)$ alors $C = (1, 2, 3, 4, 0, \dots)$.
3. Si $A = (0, 1, 0, \dots)$ et $B = (1, 2, 3, 4, 0, \dots)$ alors $C = (0, 1, 2, 3, 4, 0, \dots)$.

Proposition

On reprend les notations précédentes. Si

$$\forall k > p_0,\ a_k = 0 \quad \text{et} \quad \forall k > q_0,\ b_k = 0,$$

alors la suite C définie précédemment vérifie :

$$\forall k > p_0 + q_0,\ c_k = 0 \quad \text{et} \quad c_{p_0+q_0} = a_{p_0} b_{q_0}$$

C est donc on polynôme.

Preuve

- Soit $k > p_0 + q_0$. On considère un couple (i, j) tel que $i + j = k$. Alors $i > p_0$ ou $j > q_0$. Tous les termes de la somme $\sum_{i+j=k} a_i b_j$ sont nuls.
- Si $k = p_0 + q_0$. Le seul terme de la somme $\sum_{i+j=k} a_i b_j$ qui est non nul est $a_{p_0} b_{q_0}$. Ce terme est égal à $c_{p_0+q_0}$.

Définition

Le polynôme C précédemment défini est appelé le produit de A par B et est noté $A \times B$ ou AB.

Remarques

1. On défini ainsi une loi de composition interne
2. Cette loi est
   - commutative
   - associative
   - possède un élément neutre :le polynôme $(1, 0, 0, \dots)$
   - distributive par rapport à l'addition
   - vérifie : pour tous polynômes A et B, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

   $$(\lambda A) \times B = A \times (\lambda B) = \lambda(A \times B)$$

3. Muni des lois précédentes, l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une *algèbre* commutative

Sommaire

Notation

On note X le polynôme $(0, 1, 0, 0, \dots)$ et X^0 le polynôme $(1, 0, 0, \dots)$.
On a alors $X \times X = X^2 = (0, 0, 1, 0, 0, \dots)$ et par récurrence, on montrer que pour tout entier naturel k,

$$X^k = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots)$$

On peut alors noter un polynôme $A = (a_0, a_1, \dots, a_n, 0, 0, \dots)$:

$$A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

L'ensemble des polynômes à coefficient dans $\mathbb{K}$ se note $\mathbb{K}[X]$.

On peut réécrire les énoncés précédents :

- Le polynôme $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est nul si et seulement si tous les a_k sont nuls ;
- Si $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $B = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$, alors
$$A + B = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) X^k ;$$
- Si $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $B = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$, alors
$$AB = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i+j=k} a_i b_j \right) X^k ;$$

Remarques

1. On appelle monôme tout polynôme du type λX^k ;
2. On appelle polynôme constant tout polynôme du type $(\lambda, 0, 0, \dots) = \lambda X^0$ que l'on notera simplement λ.

Sommaire

Sommaire

Soit A un polynôme non nul. L'ensemble $\{k \in \mathbb{N},\ a_k \neq 0\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et majorée, donc admet un plus grand élément.

Définition

Soit $A \in \mathbb{K}[X]$. On définit le degré de A, noté $\deg(A)$ par :

$$\deg(A) = \begin{cases} \max\{k \in \mathbb{N},\ a_k \neq 0\} \text{ si } A \neq 0 \\ -\infty \text{ si } A = 0. \end{cases}$$

Remarques

- Un polynôme $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est de degré n si et seulement si $a_n \neq 0$;
- Dans ce cas, a_n est le *coefficient dominant* ;
- Si le coefficient dominant est 1, alors on dit que le polynôme A est unitaire.

Sommaire

Proposition

Etant donnés A et B dans $\mathbb{K}[X]$, on a :

1. $\deg(A+B) \leqslant \max(\deg(A),\deg(B))$;
2. $\deg(AB)=\deg(A)+\deg(B)$.

Polynôme dérivé

Définition

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré $n \geqslant 0$. On appelle **polynôme dérivé** de P le polynôme :

$$P' = \sum_{k=0}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$$

Le polynôme dérivé du polynôme nul est le polynôme nul.

Proposition

Pour tout polynôme P, on a $deg(P') = deg(P) - 1$.

Intégrité de $\mathbb{K}[X]$

Théorème

$\forall P, Q \in \mathbb{K}[X]$,

$$(PQ = 0 \quad \Rightarrow \quad P = 0 \ \text{ ou } \ Q = 0)$$

Preuve

Soit P et Q deux polynômes tels que $PQ = 0$. Alors $\deg(PQ) = -\infty$. Par ailleurs, $\deg(PQ)$=$\deg(P)$ +$\deg(Q)$ donc nécessairement, $\deg(P) = -\infty$ ou $\deg(Q) = -\infty$.

Remarque

Ce résultat est faux sur $M_n(\mathbb{K})$, sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$...

Sommaire

Sommaire

Définition

Soit n un entier naturel. On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Exemples

1. Les polynômes constants sont $\mathbb{K}_n[X]$, pour tout entier naturel n. En particulier le polynôme nul est dans tous les $\mathbb{K}_n[X]$.
2. $X^2 - 2 + 1 \in \mathbb{K}_2[X]$

Proposition

Pour tous entiers naturels n et m, on a

$$n \leqslant m \Rightarrow \mathbb{K}_n[X] \subset \mathbb{K}_m[X] \subset \mathbb{K}[X]$$

Théorème

Soit n un entier naturel. $\mathbb{K}_n[X]$ est un espace vectoriel de dimension (finie) $n+1$. Sa base canonique est la famille $(1, X, \ldots, X^n)$.

Preuve

- On montre que $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$:
  - $\mathbb{K}_n[X] \neq \emptyset$ car le polynôme nul est dans $\mathbb{K}_n[X]$
  - Soient P et Q deux éléments de $K_n[X]$, λ, μ deux scalaires. Alors $\deg(\lambda P + \mu Q) \leqslant \max\left(\deg(P); \deg(Q)\right)$ donc $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{K}_n[X]$.

- Montrons que la famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
  - Par définition de $\mathbb{K}_n[X]$, c'est une famille génératrice de $\mathbb{K}_n[X]$.
  - C'est aussi une famille libre, car si $\lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_n X^n = 0$, alors le polynôme $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, 0, 0, \dots)$ est le polynôme nul, donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

La famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Comme elle contient $n+1$ éléments, on en déduit que

$$\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$$

Sommaire

Familles libres de $\mathbb{K}[X]$

Proposition

Toute famille formée de polynômes de degré distincts est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$.

Plan de la preuve

- On considère une famille $\mathcal{F} = (P_0, \dots, P_n)$ une famille de n polynômes de degré distincts
- $(\forall i, j,\ i \neq j \Rightarrow deg(P_i) \neq \deg(P_j))$.
- Soit $\lambda_0 + \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_n P_n$ une combinaison linéaire nulle de la famille $\mathcal{F}$. Supposons qu'il existe un entier i tel que $\lambda_i \neq 0$.
- $\Delta = \{k \in \mathbb{N},\ \lambda_k \neq 0\}$ est un ensemble non vide et fini.

Suite de la preuve

- On note $N = \max\{deg(P_k), \quad k \in \Delta\}$. Il existe alors un (seul) polynôme de la famille $\mathcal{F}$ de degré N. Notons le P_N.
- $P_N = \sum_{k\in\Delta,\ k\neq N} \mu_k P_k$
- deg($\sum_{k\in\Delta,\ k\neq N} \mu_k P_k$) $>$deg(P_N) ce qui est absurde.

Théorème

Soit $(P_0, \dots, P_n)$ une famille de $n+1$ polynômes tels que pour tout entier k, $\deg(P_k) = k$ (*on dit que c'est une famille échelonnée*). Alors cette famille est une base de $K_n[X]$.

Preuve

Soit $(P_0, \dots, P_n)$ une telle famille.

- Cette famille est dans $\mathbb{K}_n[X]$
- C'est une famille libre de $\mathbb{K}[X]$ donc de $\mathbb{K}_n[X]$ car les polynômes sont de degrés distincts.
- Cette famille contient $n+1$ vecteurs, et $\dim \mathbb{K}_n[X] = n+1$.

Conclusion : c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Remarque

Lorsque $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, les scalaires $(a_0, \dots, a_n)$ sont les coordonnées de P dans la base canonique.

Exemples

1. La famille $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$
2. La famille $(1, X-2, (X-2)^2, (X-2)^3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$
3. La famille $(1, X, X^3)$ n'est pas une base de $\mathbb{R}_3[X]$, , ni de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercices

1. On considère le polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$: $P = X^2 - 2x + 1$. Quelles sont ses coordonnées dans la base canonique ? Dans la base $(1, (X-1), (X-1)^2)$?
2. Quelles sont les coordonnées du polynôme $P = 1 - X + 3X^2$ dans la base $(1, X, X(X-1))$ de $\mathbb{R}_2[X]$?
3. On considère le polynôme P de $\mathbb{R}_4[X]$ dont les cordonnées dans la base $(1, (X-1), (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4)$ sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Quels sont ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$?

Sommaire

Sommaire

Définition

Soit P un élément de $\mathbb{K}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Pour $\alpha \in \mathbb{K}$, on définit :

$$P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k$$

On dit que l'on substitue α à X.

Défintion

Si P est un polynôme non nul à coefficients dans $\mathbb{K}$, de degré n, la fonction

$$\tilde{P} : \begin{cases} \mathbb{K} \to \mathbb{K} \\ x \mapsto P(x) \end{cases}$$

est la fonction polynomiale associée à P

Sommaire

Définition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une *racine* de P lorsque $\tilde{P}(\alpha) = 0$.

Exemples

1. 2 est une racine du polynôme $P = X^3 - 6x^2 + 11X - 6$
2. $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ est une racine dans $\mathbb{C}$ de $P = X^2 + X + 1$
3. $1 + i$ est une racine dans $\mathbb{C}$ du polynôme $X^2 + iX - 3i + 1$
4. Le polynôme $X^2 + 1$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$ mais a deux racines dans $\mathbb{C}$.

Théorème

Soit P un polynôme à coefficient dans $\mathbb{K}$, et soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors α est une racine de P si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)Q$.

Plan de la preuve

($\Leftarrow$) C'est évident : S'il existe un polynôme Q tel que $P = (X - \alpha)Q$, alors $\tilde{P}(\alpha) = (\alpha - \alpha)\tilde{Q}(\alpha) = 0$

Suite de la preuve

($\Rightarrow$) Soit α une racine de P. On suppose $P \neq 0$ et on note n le degré de P.

- On considère la famille $\big(1, (X-\alpha), (X-\alpha)^2, \dots, (X-\alpha)^n\big)$.
- C'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, et $P \in \mathbb{K}_n[X]$
- Il existe donc $(\lambda_0,\ \dots, \lambda_n)$ $n+1$ scalaires tels que

$$P = \lambda_0 + \lambda_1(X-\alpha) + \cdots + \lambda_n(X-\alpha)^n.$$

- Comme $\tilde{P}(\alpha) = 0$, on en déduit que $\lambda_0 = 0$.
- Alors $P = \lambda_1(X-\alpha) + \cdots + \lambda_n(X-\alpha)^n = (X-\alpha)Q$

Exercice

Déterminer les racines dans $\mathbb{R}$ du polynôme

$$P = X^3 - 3X^2 - 13X + 15$$

Conséquence

Théorème

Soit n un entier naturel. Un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{K}$ a au plus n racines distinctes dans $\mathbb{K}$.

Preuve

Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Supposons que P admette $n+1$ racines distinctes $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$. On montre qu'alors, il existe un polynôme Q tel que $P = (X - \alpha_1) \ldots (X - \alpha_{n+1})Q$ et donc, $deg(P) = n \geqslant n+1$ ce qui est absurde.

La formule de Taylor pour les polynômes

Théorème

Pour tout polynôme P de degré n, pour tout $a \in \mathbb{K}$,

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

où $P^{(k)}$ désigne le polynôme dérivée k fois de P.

Preuve

Soit P un polynôme de degré n, et $a \in \mathbb{K}$.

- La famille $\left(1, (X-\alpha), (X-\alpha)^2, \dots, (X-\alpha)^n\right)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Donc il existe $(n+1)$ éléments de $\mathbb{K}$ unique tels que $P = \lambda_0 + \lambda_1(X-a) + \lambda_2(X-a)^2 + \cdots + \lambda_n(X-a)^n$.
- On montre que $\lambda_0 = P(a)$, puis que $\lambda_1 = P'(a)$, puis que pour tout entier k, $\lambda_k = \frac{P^{(k)}(a)}{k!}$.

Remarques

1. Un polynôme peut ne pas avoir de racine dans $\mathbb{R}$ (ce n'est pas vrai dans $\mathbb{C}$)
2. La fonction *cos* n'est pas une fonction polynomiale
3. Tout polynôme à coefficient dans $\mathbb{R}$ de degré impair admet une racine réelle

Racines dans $\mathbb{C}$

Théorème de d'Alembert Gauss

Tout polynôme à coefficient dans $\mathbb{K}$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Exemple

- $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ est une racine de $X^4 + 1$
- $i$est une racine de $X^3 + (-3 - 4i)X^2 + (-3 + 8i)X + 5$

Proposition

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$,

$$P(\alpha) = 0 \iff P(\bar{\alpha}) = 0.$$

Exercice

En remarquant que $1 + i$ est une racine de $P = X^3 + X^2 - 4X + 6$, trouver les racines de P puis factoriser P dans $\mathbb{R}[X]$.

Sommaire

On considère un $\mathbb{K}$- espace vectoriel A, muni en plus d'une loi interne $\times$ qui est

- Associative,
- Possède un élément neutre
- distributive par rapport à la loi $+$

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme.

Définition

Pour tout élément x de A, on appelle résultat de la substitution de x à l'indéterminée X l'élément de A :

$$P(x) = a_0.1 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$$

où 1 est l'élément neutre de A pour la loi $\times$.

Exemples

1. Le cas $A = \mathbb{R}$ a déjà été vu
2. $A = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
3. $A = \mathbb{K}[X]$. Par exemple, on peut considérer $P(Q)$ avec $P \in K[X]$ et $Q \in K[X]$.