CHAPITRE 1

SYSTÈMES LINÉAIRES

Dans tout ce chapitre, n et p sont des nombres entiers supérieurs ou égaux à 1. On rappelle que $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uplets de nombres réels. Par exemple, $(2,-3) \in \mathbb{R}^2$ et $(0,-\sqrt{2},\pi,1) \in \mathbb{R}^4$.

1.1. Équations linéaires

1.1.1. Définitions. — Soit $x_1,\dots,x_n$ une liste de variables. Une **équation linéaire** en $x_1,\dots,x_n$ est une équation de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b, \tag{1}$$

où $a_1,\dots,a_n$ et b sont des nombres réels, appelés les **coefficients** de l'équation. Les **variables** $x_1,\dots,x_n$ sont aussi appelées les **inconnues** de l'équation. Une **solution** de (1) est un n-uplet $(s_1,\dots,s_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $a_1s_1 + \cdots + a_ns_n = b$.

***Exemples.* —**

1. L'équation $2x-3y+7z=1$ est linéaire en les variables x,y,z. Les triplets $(-3,0,1)$ et $(0,2,1)$ en sont des solutions, le triplet $(1,1,1)$ n'en est pas solution.
2. Il peut arriver qu'une variable n'apparaisse pas dans l'équation (il faut alors considérer qu'elle est affectée d'un coefficient nul). Ainsi on peut considérer $x+z=-1$ comme une équation linéaire en x,y,z (elle s'écrit $1x+0y+1z=-1$). Une solution de cette équation est un triplet, par exemple $(-3,100,2)$.

***Remarque.* —** On peut aussi considérer des équations à coefficients complexes, dont on cherche alors des solutions complexes.

1.1.2. Résolution d'une équation linéaire. — Notons $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation (1). Trois cas peuvent se présenter :

1. Ou bien $a_1 = \cdots = a_n = 0$ et $b = 0$ (équation **du type** « $0=0$ »), et alors tout n-uplet est solution de l'équation, autrement dit $\mathscr{S} = \mathbb{R}^n$.
2. Ou bien $a_1 = \cdots = a_n = 0$ et $b \neq 0$ (équation **du type** « $0=1$ »), et alors aucun n-uplet n'est solution de l'équation, autrement dit $\mathscr{S} = \varnothing$.
3. Ou bien au moins un des coefficients $a_1,\dots,a_n$ est non nul (équation **régulière**), et si $i_0 \in [\![1,n]\!]$ est n'importe quel indice tel que $a_{i_0} \neq 0$, alors $(x_1,\dots,x_n)$ est solution de

l'équation si et seulement si [1] :

$$x_{i_0} = \frac{b - (a_1 x_1 + \cdots + \widehat{a_{i_0} x_{i_0}} + \cdots + a_n x_n)}{a_{i_0}}.$$

On voit ainsi que x_{i_0} est totalement déterminée par les autres variables, celles-ci pouvant prendre n'importe quelle valeur indépendamment les unes des autres pour former une solution. L'ensemble des solutions peut donc se décrire de manière *paramétrique* en prenant comme paramètres les variables $x_1, \ldots, \widehat{x_{i_0}}, \ldots, x_n$. [2]

Exemples. — 1. Considérons l'équation $2x - 3y + 7z = 1$ en les variables x, y, z. On a $2x - 3y + 7z = 1$ si et seulement si $x = (3/2)y - (7/2)z + 1/2$, donc les solutions s'obtiennent en affectant n'importe quelle valeur à y et z et en prenant la valeur correspondante de x donnée par cette dernière égalité. Par conséquent : les solutions de l'équation sont les triplets de la forme $((3/2)y - (7/2)z + 1/2, y, z)$, où y et z où y et z sont des réels quelconques. De manière plus formalisée : l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\mathscr{S} = \left\{ ((3/2)y - (7/2)z + 1/2, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

On pourrait également paramétrer les solutions par x, y ou par x, z (**exercice**).

2. De même, les solutions de l'équation $x + z = -1$ en les variables x, y, z (attention !) sont les triplets de la forme $(-1 - z, y, z)$, où y et z peuvent prendre n'importe quelle valeur réelle.

1.2. Systèmes linéaires

1.2.1. Définitions. — Un **système d'équations linéaires**, ou **système linéaire**, de p équations en les variables $x_1, \ldots, x_n$, est une famille de p équations linéaires en ces variables. Un tel système est écrit en « réunissant » les équations par une accolade [3] :

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ a_{p1}x_1 & + & a_{p2}x_2 & + & \cdots & + & a_{pn}x_n & = & b_p \end{array} \right. \tag{2}$$

Une **solution** du système (2) est un n-uplet $(s_1, \ldots, s_n)$ qui est *simultanément* solution de *chacune* des équations linéaires qui composent le système. Un système linéaire est dit **compatible** s'il admet au moins une solution (donc si son ensemble de solutions est non vide), et **non compatible**, ou **incompatible**, s'il n'admet aucune solution (donc si son ensemble de solutions est vide). Le système est dit **carré** lorsqu'il a autant d'équations que de variables, donc si $n = p$ (on verra plus loin que les systèmes carrés ont des propriétés particulières).

Exemple. — Le système linéaire suivant, en les variables x, y, est carré :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 5y = -1 \\ 3x + 4y = 2. \end{array} \right. \tag{3}$$

1. La notation « $\widehat{a_{i_0} x_{i_0}}$ » signifie que le terme en question (surmonté d'un chapeau) est *oublié* dans la somme.
2. Même convention de notation : la variable x_{i_0} surmontée d'un chapeau est oubliée de la liste.
3. Les coefficients a_{ij} sont repérés par *deux indices* : le premier indice i est l'indice d'équation (indice de ligne), le deuxième indice j est l'indice de variable (indice de colonne, lorsque l'on aligne verticalement les variables de même indice dans l'écriture du système).

Le couple $(2,-1)$ en est une solution. Le couple $(-3,1)$ n'est pas solution.

Remarques. — 1. L'ensemble des solutions d'un système n'est pas modifié si l'on change l'ordre des équations. Il est cependant utile de fixer un ordre, de sorte à pouvoir identifier clairement les équations (la première, la deuxième, etc.)
2. Si un système contient une équation du type $0=1$, il est incompatible.
3. Si un système contient une équation du type $0=0$, cette équation peut être enlevée du système sans modifier l'ensemble des solutions (c'est ce que l'on fait la plupart du temps dans la pratique).

1.3. Résultat fondamental sur l'ensemble des solutions d'un système linéaire

Théorème. — Tout système linéaire admet ou bien zéro solution, ou bien une unique solution, ou bien une infinité de solutions.

En reprenant la terminologie donnée plus haut, les systèmes linéaires se classent donc en trois catégories : (1) les systèmes non compatibles (sans solution); (2) les systèmes compatibles ayant une unique solution; (3) les systèmes compatibles ayant une infinité de solutions.

Dans le cas (3), comment décrire explicitement un ensemble constitué d'une infinité d'éléments? Nous verrons que la méthode du pivot de Gauss permet d'obtenir, comme dans le cas des équations linéaires (voir plus haut), une description *paramétrique* des solutions.

Résoudre un système linéaire, c'est donc (i) déterminer s'il est compatible ou non; (ii) s'il est compatible et possède une unique solution, donner cette solution explicitement; (iii) s'il est compatible et possède une infinité de solutions, donner une description paramétrique de l'ensemble des solutions.

1.4. Méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot est un algorithme qui permet de transformer un système linéaire quelconque, par des opérations dites « élémentaires », en un système simple à résoudre, et cela sans modifier les solutions.

On commence par décrire les opérations élémentaires (paragraphe1.4.1), puis les systèmes « simples à résoudre » auxquels on souhaite se ramener (paragraphe 1.4.2), enfin on étudie trois exemples de résolution illustrant chacune des trois possibilités d'ensemble de solution (paragraphe 1.4.3).

1.4.1. Opérations élémentaires. — Les opérations élémentaires permettent de transformer un système linéaire sans modifier ses solutions.

Soient E et E' deux équations linéaires en les mêmes variables, et soit λ un nombre réel. On note $E+E'$ l'équation obtenue en ajoutant E et E' « membre à membre », et on note λE l'équation obtenue en multipliant tous les termes de E par le réel λ. Par exemple, si E est $2x+y-z=1$ et si E' est $-3x+2y+z=2$, alors $E+E'$ est l'équation $-x+3y+0z=3$, et $-2E$ est l'équation $-4x-2y+2z=-2$.

On numérote (de haut en bas) $E_1, E_2, E_3\dots$ les équations d'un système linéaire. Les trois **opérations élémentaires** de la méthode de Gauss sont :

1. l'**interversion** (ou **permutation**, ou **échange**) de deux équations E_i et E_j ;

2. la **multiplication** d'une équation E_i par un nombre réel λ *non nul*;
3. l'**addition** à une équation E_i d'un multiple d'une *autre* équation E_j.

Ces opérations sont notées de la manière suivante [4] :

$$(1)\ E_i \leftrightarrow E_j \qquad (2)\ E_i \leftarrow \lambda E_i \qquad (3)\ E_i \leftarrow E_i + \lambda E_j.$$

Bien noter que l'on suppose $\lambda \neq 0$ dans (2), et $i \neq j$ dans (3). On écrit

$$\Sigma \underset{\mathrm{OE}}{\longrightarrow} \Sigma'$$

pour signifier que l'on passe du système Σ au système Σ' par l'opération élémentaire OE.

Remarques. — 1. En faisant successivement $E_i \leftarrow \lambda E_i$ puis $E_i \leftarrow E_i - \mu E_j$, on obtient l'opération $E_i \leftarrow \lambda E_i + \mu E_j$ (avec λ réel *non nul* et j indice *différent* de i). Par extension, cette opération est encore appelée élémentaire.

2. Les opérations élémentaires sont *réversibles*, c'est à dire que si on peut passer d'un système à un autre système par une opération élémentaire, alors on peut repasser du nouveau système au système initial par une autre opération élémentaire de même nature (**exercice**).
3. On montre facilement (**exercice**) que toute solution d'un système Σ est également solution de tout système obtenu à partir de Σ par une opération élémentaire (et donc est également solution de tout système obtenu à partir de Σ par un nombre quelconque d'opérations élémentaires).

Proposition. — Les opérations élémentaires sur les systèmes linéaires préservent les ensembles de solutions : si on peut passer d'un système Σ à un système Σ' par une opération élémentaire, ou par une succession d'opérations élémentaires, alors $\mathscr{S}_\Sigma = \mathscr{S}_{\Sigma'}$.

Démonstration. — Application des deux dernières remarques. □

1.4.2. Systèmes linéaires échelonnés. — Les systèmes échelonnés sont des systèmes simples à résoudre auxquels l'algorithme du pivot de Gauss permet de se ramener. On commence par les définir, puis on explique comment les résoudre.

On rappelle qu'une équation linéaire peut être du type $0 = 0$, du type $0 = 1$, ou régulière.

Définition. — Un système linéaire est **échelonné** s'il satisfait les trois conditions suivantes :

1. Il n'y a pas d'équation du type $0 = 0$ ni d'équation du type $0 = 1$.
2. Le premier coefficient non nul de chaque équation autre que la première est situé strictement à droite du premier coefficient non nul de l'équation précédente (lorsqu'on aligne verticalement les variables dans l'écriture du système).

Les **variables principales** d'un système échelonné sont les variables qui apparaissent au début d'une (et une seule) des équations régulières. Les autres variables sont appelées **variables libres** du système

4. Il existe d'autres conventions d'écriture.

Exemples. — Le système suivant est échelonné :

$$\begin{cases} x \quad - z \quad - u + v = 0 \\ \quad y + 3z \quad + 5u - 3v = 1 \\ \qquad\qquad t + 2u - v = 2 \end{cases}$$

Ses variables principales sont x, y, t. Ses variables libres sont z, u, v.

Un système échelonné comporte au moins autant de variables que d'équations, puisque chaque équation commence par une variable différente. Deux cas peuvent alors se produire :

1. Ou bien le système échelonné a autant de variables que d'équations (on parle parfois de **système échelonné triangulaire**).
2. Ou bien le système échelonné a strictement plus de variables que d'équations (**système échelonné non triangulaire**).

Proposition. — 1. Tout système échelonné triangulaire possède une unique solution. [5]
2. Tout système échelonné non triangulaire possède une infinité de solutions, qui sont paramétrées par les variables libres du système. [6]

1.4.3. Trois exemples de résolution. — Les exemples qui suivent illustrent chacune des trois possibilités concernant l'ensemble des solutions : solution unique, infinité de solutions, aucune solution.

Comme précédemment, les équations des systèmes sont désignées par E_1, E_2, E_3... (dans l'ordre de haut en bas).

Premier exemple : solution unique.— Considérons le système suivant en x, y, z :

$$(\Sigma) \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ 4x + 5y - 3z = 4 \\ 6x + 10y - 4z = -2 \end{cases}$$

Pour échelonner ce système, on commence par « éliminer » x de la deuxième et de la troisième équation. Pour cela, on se sert du coefficient 2 de la variable x dans la première équation comme **pivot** pour annuler les coefficients de x dans les équations suivantes : l'opération $E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1$ élimine x de la deuxième équation, et l'opération $E_3 \leftarrow E_3 - 3E_1$ élimine x de la troisième. Comme ces deux opérations élémentaires sont indépendantes (elles modifient des équations différentes à l'aide d'une équation qui reste inchangée), on peut les effectuer simultanément :

$$(\Sigma) \begin{cases} \mathbf{2}x + 3y - z = 0 \\ 4x + 5y - 3z = 4 \\ 6x + 10y - 4z = -2 \end{cases} \xrightarrow[\substack{E_2 \leftarrow E_2 - 2E_1 \\ E_3 \leftarrow E_3 - 3E_1}]{} (\Sigma_1) \begin{cases} \mathbf{2}x + 3y - z = 0 \\ \quad -y - z = 4 \\ \quad y - z = -2 \end{cases}$$

5. Voir le premier exemple ci-dessous.
6. Voir le troisième exemple ci-dessous.

Ensuite, le coefficient -1 de la variable y dans la deuxième équation sert de pivot pour éliminer y de la troisième équation :

$$(\Sigma_1)\begin{cases} \mathbf{2}x + 3y - z = 0 \\ \quad -\mathbf{1}y - z = 4 \\ \quad y - z = -2 \end{cases} \xrightarrow[E_3 \leftarrow E_3 + E_2]{} (\Sigma_2)\begin{cases} \mathbf{2}x + 3y - z = 0 \\ \quad -\mathbf{1}y - z = 4 \\ \quad -2z = 2 \end{cases}$$

Le système (Σ_3) auquel on est arrivé est **échelonné triangulaire** : il y a autant d'équations que de variables, et la première équation commence par la première variable, la deuxième équation commence par la deuxième variable, etc. Un système échelonné triangulaire possède une unique solution, que l'on détermine en résolvant le système en partant du bas : on trouve d'abord $z = -1$, puis $y = 3$ (en reportant la valeur de z dans la deuxième équation), puis $x = 4$ (en reportant les valeurs de y et z dans la première équation).

Conclusion : le système (Σ) possède $(4,3,-1)$ comme unique solution. Son ensemble de solutions est donc :

$$\mathscr{S}_\Sigma = \{(4,3,-1)\}.$$

Deuxième exemple : infinité de solutions.— Résolvons le système suivant en x, y, z, t, u :

$$(\Sigma')\begin{cases} 2x - 5y + 3z - 4t + 2u = 4 \\ 3x - 7y + 2z - 5t + 4u = 9 \\ 5x - 10y - 5z - 4t + 7u = 22 \end{cases}$$

On aimerait se servir du pivot « 2 » dans la première équation pour éliminer la variable x des deux dernières équations, grâce aux opérations élémentaires $E_2 \leftarrow E_2 - (3/2)E_1$ et $E_3 \leftarrow E_3 - (5/2)E_1$. Mais cela ferait apparaître des coefficients fractionnaires qui compliqueraient les calculs suivants. Deux idées se présentent pour éviter ces calculs.

Une première idée est d'effectuer les opérations $E_2 \leftarrow E_2 - E_1$ puis $E_1 \leftrightarrow E_2$ (dans cet ordre), afin d'obtenir un pivot égal à 1 dans la première équation (**exercice :** faire cette transformation et continuer la résolution).

Une deuxième idée (celle que l'on va suivre) est de laisser la première équation telle quelle et d'effectuer les opérations (indépendantes) $E_2 \leftarrow 2E_2 - 3E_1$, $E_3 \leftarrow 2E_3 - 5E_1$:

$$(\Sigma')\begin{cases} \mathbf{2}x - 5y + 3z - 4t + 2u = 4 \\ 3x - 7y + 2z - 5t + 4u = 9 \\ 5x - 10y - 5z - 4t + 7u = 22 \end{cases} \xrightarrow[\substack{E_2 \leftarrow 2E_2 - 3E_1 \\ E_3 \leftarrow 2E_3 - 5E_1}]{} (\Sigma'_1)\begin{cases} \mathbf{2}x - 5y + 3z - 4t + 2u = 4 \\ \quad y - 5z + 2t + 2u = 6 \\ \quad 5y - 25z + 12t + 4u = 24 \end{cases}$$

Dans ce nouveau système (Σ'_1), la variable x a été éliminée des deux dernières équations. On se sert ensuite du pivot « 1 » de la deuxième équation pour éliminer y de la dernière équation :

$$(\Sigma'_1)\begin{cases} \mathbf{2}x - 5y + 3z - 4t + 2u = 4 \\ \quad \mathbf{1}y - 5z + 2t + 2u = 6 \\ \quad 5y - 25z + 12t + 4u = 24 \end{cases} \xrightarrow[E_3 \leftarrow E_3 - 5E_2]{} (\Sigma'_2)\begin{cases} \mathbf{2}x - 5y + 3z - 4t + 2u = 4 \\ \quad \mathbf{1}y - 5z + 2t + 2u = 6 \\ \quad 2t - 6u = -6 \end{cases}$$

Ce dernier système (Σ'_2) est **échelonné non triangulaire** : chaque équation commence par une variable différente, mais il y a strictement plus de variables que d'équations. Ses variables principales sont x, y, t , ses variables libres sont z, u. Si on fait passer les variables libres du côté des seconds membres, on obtient un système triangulaire en les variables principales, dans lequel les variables libres jouent le rôle de paramètres :

$$(\Sigma'_3)\left\{\begin{aligned} 2x-5y-4t &= 4-3z-2u \\ y+2t &= 6+5z-2u \\ 2t &= -6+6u \end{aligned}\right.$$

Pour chaque choix des variables libres z et u, on obtient ainsi un système qui possède une unique solution ; en résolvant (Σ'_3) de bas en haut, on trouve successivement :

$$t=-3+3u,\quad y=12+5z-8u,\quad x=26+11z-15u. \tag{4}$$

Par exemple, au choix $z=u=0$ correspond la solution $(26,12,0,-3,0)$; au choix $z=1, u=0$ correspond la solution $(37,17,1,-3,0)$; au choix $z=0, u=1$ correspond la solution $(11,5,0,0,1)$, etc. On voit ainsi que les solutions de (Σ'_3), et donc de (Σ"), sont paramétrées par les variables libres z et u, qui sont autorisées à varier librement dans $\mathbb{R}$ (d'où leur nom) : à chaque affectation de valeurs à z et u correspond une solution du système en prenant les valeurs de x, y, t déterminées par (4). On obtient ainsi une **description paramétrique** de l'ensemble des solutions :

$$\mathscr{S}_{\Sigma'}=\left\{\,(26+11z-15u, 12+5z-8u, z, -3+3u, u)\mid z,u\in\mathbb{R}\,\right\},$$

ce qui se lit de la manière suivante :

> « l'ensemble des solutions de Σ' est l'ensemble des quintuplets de la forme $(26+11z-15u, 12+5z-8u, z, -3+3u, u)$, où z et u prennent n'importe quelle valeur réelle. »

Troisième exemple : aucune solution.— Résolvons le système suivant en x, y, z, t :

$$(\Sigma'')\left\{\begin{array}{rrrrl} x+ & 2y- & z & & = 3 \\ 2x+ & 4y+ & 2z+ & t & = -1 \\ -3x- & 6y+ & 7z+ & t & = 2 \\ 5x+ & y+ & z- & 3t & = 4 \end{array}\right.$$

On utilise la première équation pour éliminer x des équations suivantes. On peut effectuer les opérations simultanément car elles sont indépendantes.

$$(\Sigma'')\left\{\begin{array}{rrrrl} \mathbf{1}x+ & 2y- & z & & = 3 \\ 2x+ & 4y+ & 2z+ & t & = -1 \\ -3x- & 6y+ & 7z+ & t & = 2 \\ 5x+ & y+ & z- & 3t & = 4 \end{array}\right. \xrightarrow[\substack{E_2\leftarrow E_2-2E_1 \\ E_3\leftarrow E_3+3E_1 \\ E_4\leftarrow E_4-5E_1}]{} (\Sigma''_1)\left\{\begin{array}{rrrrl} \mathbf{1}x+ & 2y- & z & & = 3 \\ & & 4z+ & t & = -7 \\ & & 4z+ & t & = 11 \\ & 9y+ & 6z- & 3t & = -11 \end{array}\right.$$

On peut immédiatement constater que les équations 2 et 3 du nouveau système sont incompatibles, et que par conséquent le système n'a pas de solution.

Et si on ne s'aperçoit pas que ces équations sont incompatibles ? Il est intéressant de poursuivre la méthode du pivot sur cet exemple. Tout d'abord, on échange les équations 2 et 4 pour obtenir en deuxième position une équation dans laquelle y est affectée d'un coefficient non nul :

$$(\Sigma_1'')\left\{\begin{array}{rl} \mathbf{1}x+2y-z\phantom{{}-3t} &= 3\\ 4z+t &= -7\\ 4z+t &= 11\\ 9y+6z-3t &= -11\end{array}\right. \xrightarrow[E_2\leftrightarrow E_4]{} (\Sigma_2'')\left\{\begin{array}{rl} \mathbf{1}x+2y-z\phantom{{}-3t} &= 3\\ 9y+6z-3t &= -11\\ 4z+t &= -7\\ 4z+t &= 11\end{array}\right.$$

On obtient un nouveau pivot 9 dans la deuxième équation, mais on n'a pas à l'utiliser puisque la variable y est déjà éliminée des deux dernières équations. On obtient aussi le pivot 4 dans la troisième équation, qui permet d'éliminer la variable z de la dernière équation. Mais, ce faisant, la variable t est aussi éliminée et la dernière équation devient du type $0 = 1$:

$$(\Sigma_2'')\left\{\begin{array}{rl} \mathbf{1}x+2y-z\phantom{{}-3t} &= 3\\ \mathbf{9}y+6z-3t &= -11\\ \mathbf{4}z+t &= -7\\ 4z+t &= 11\end{array}\right. \xrightarrow[E_2\leftrightarrow E_4]{} (\Sigma_3'')\left\{\begin{array}{rl} \mathbf{1}x+2y-z\phantom{{}-3t} &= 3\\ \mathbf{9}y+6z-3t &= -11\\ \mathbf{4}z+t &= -7\\ 0 &= 11\end{array}\right.$$

Le dernier système (Σ_3'') est incompatible, il en est donc de même du système initial Σ''. Autrement dit :

$$\mathscr{S}_\Sigma = \varnothing.$$