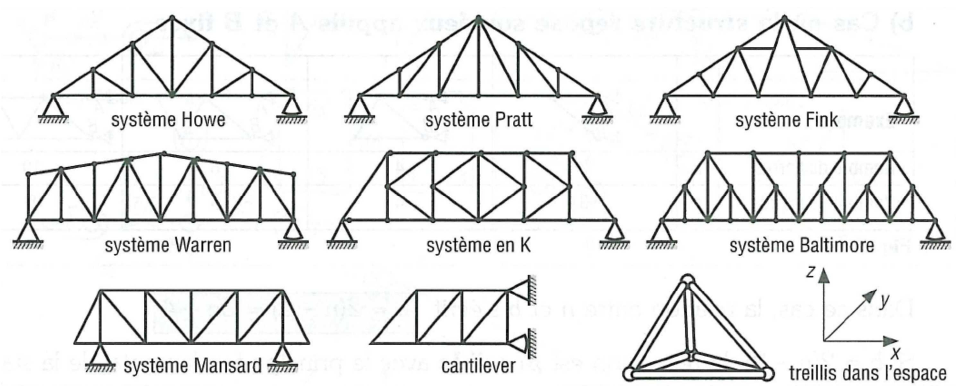
## HLME501 : Résistance des Matériaux - TD

Licence de Mécanique 3ème année Parcours STM et MSM

Département de Mécanique – Faculté des Sciences – Université de Montpellier

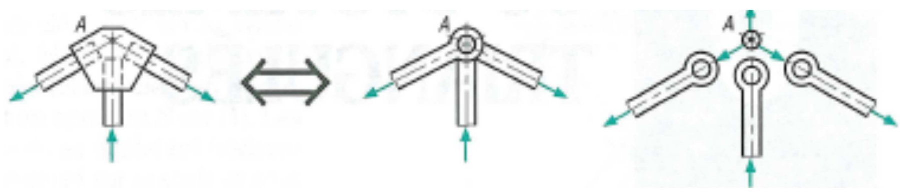
# Feuille TD1 : Les treillis

***Définition :*** Un **système réticulé (ou treillis)** est un système composé de barres droites articulées entre elles à leurs extrémités.
On appelle **nœuds** les points d'articulation communs à plusieurs barres.
Lorsque les barres et les forces appliquées sont dans un même plan, le système est un système réticulé plan. Un **système triangulé** est un système réticulé formé de triangles juxtaposés.




## *Hypothèses*

- Pour déterminer les actions de liaison, on assimilera le système réticulé à un système matériel rigide.
- Les barres sont modélisées par leur ligne moyenne (ligne passant par le CDG des sections droites).
- On suppose les barres articulées sans frottement aux nœuds (articulation parfaite d'axe z perpendiculaire au plan du treillis)



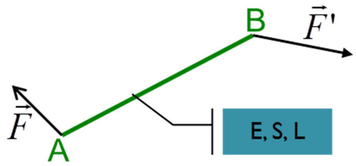

- On néglige le poids propre des barres devant les autres charges sollicitant le treillis.
- Les forces extérieures sont toujours ponctuelles et appliquées aux nœuds.
- Les calculs sont conduits exclusivement en élasticité.
- Les liaisons avec l'extérieur sont des appuis fixes ou des appuis mobiles

# HLME501 : Résistance des Matériaux - TD

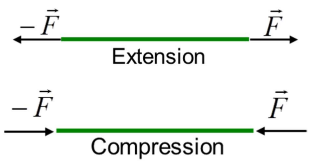
Licence de Mécanique 3ème année Parcours STM et MSM

Département de Mécanique – Faculté des Sciences – Université de Montpellier

## *Sollicitations dans une barre quelque conque*




L : longueur initiale
S : section
E : module d'Young




**Conditions d'équilibres**

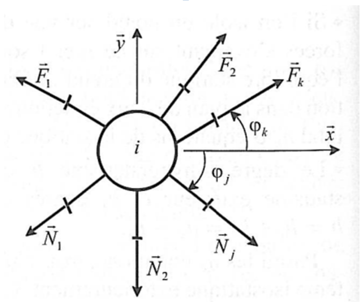
La barre AB, soumise aux forces $\vec{F}$ et $\vec{F'}$ est à l'équilibre si et seulement si $\vec{F}$ et $\vec{F'}$ sont colinéaires à $\overrightarrow{AB}$ , de même normes et, de sens opposés.

Contrainte normale : $\sigma_N = \frac{F}{S}$

Comportement élastique linéaire : $\sigma_N = E\varepsilon = E\frac{\Delta L}{L}$

Allongement : $\Delta L = \frac{FL}{ES}$

## *Méthodes d'équilibre des nœuds*




Soit un système plan à n nœuds articulés dans un repère $(O, \vec{x}, \vec{y})$.
Isolons un nœud quelconque i reliant plusieurs barres.
Sur ce nœud s'exercent un certain nombre d'efforts extérieurs $\vec{F}_k$ et d'efforts normaux $\vec{N}_j$ dans les barres.

L'équilibre du nœud i s'écrit : $\sum_k \vec{F}_k + \sum_j \vec{N}_j = \vec{0}$

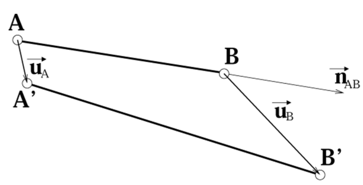
Soit $\varphi_k$ et $\varphi_j$ les angles entre l'axe $\vec{x}$ et respectivement la droite d'action des efforts extérieurs et intérieurs. La projection de la relation vectorielle ci-dessus sur les axes du repère permet d'écrire pour le nœud i deux équations algébriques :

$$\begin{cases} \sum_k F_k \cos\varphi_k + \sum_j N_j \cos\varphi_j = 0 \\ \sum_k F_k \sin\varphi_k + \sum_j N_j \sin\varphi_j = 0 \end{cases}$$

## *Déplacement des nœuds*

Lorsque l'allongement d'une barre est connu, il permet le calcul du déplacement des nœuds par la relation : $\Delta L_{AB} = (\overrightarrow{U_B} - \overrightarrow{U_A}).\vec{n}_{AB}$ *avec* $\vec{n}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$

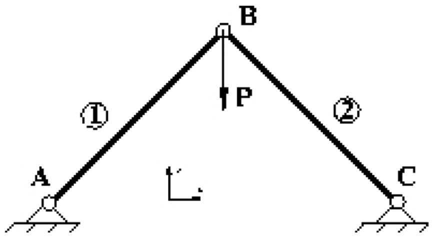
qui exprime que l'allongement d'une barre est lié aux déplacements de ses extrémités notés $\overrightarrow{U_A}$ et $\overrightarrow{U_B}$.




Les déplacements sont notés : $\overrightarrow{U_A} = u_A\vec{x} + v_A\vec{y}$

## Exercice 1 : Treillis isostatique à 2 barres

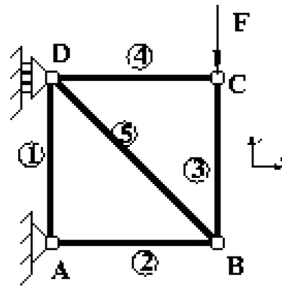
On considère un treillis constitué de deux barres (nommées 1 et 2) disposées selon le schéma de la figure ci-dessous. Les barres sont élastiques et ne travaillent qu'en traction ou en compression. Les appuis *A* et *B* sont fixes. Les deux barres sont élastiques de sections $S_1$ et $S_2$, de même module d'Young E. Le nœud *A* est soumis à un effort vertical descendant P. Les deux barres ont la même longueur L et on pose $AC = \sqrt{2}\,L$.




1. Peut-on calculer les réactions aux appuis en réalisant l'équilibre global du treillis ?
2. Ecrire l'équilibre des nœuds et en déduire les tensions dans chaque barre et les réactions dans les appuis. Quelles sont les barres en traction et les barres en compression ?
3. Calculer les allongements des barres.
4. Donner les relations entre le déplacement du nœud *B* et les allongements des barres. En déduire le déplacement du nœud *B*. Etudier les cas où $S_1 = S_2, S_1 \leq S_2$ et $S_1 \geq S_2$.

## Exercice 2 : Treillis isostatique à 5 barres

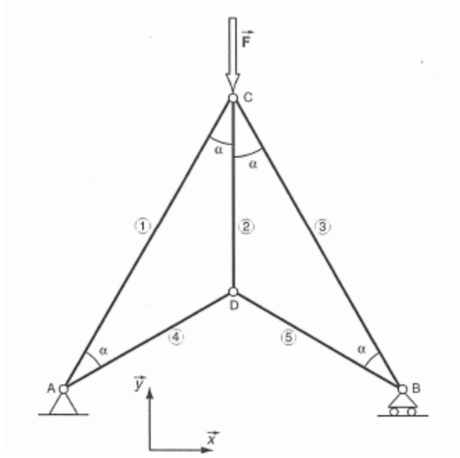
On considère le treillis représenté sur la figure ci-dessous. Les cinq barres sont identiques de même module E, même section S. Les longueurs sont telles qu'indiqué sur la figure. Le nœud *C* est lié au bâtit par un appui mobile et le nœud *A* par un appui fixe. Le nœud *C* est soumis à l'effort *F* représenté sur la figure.




1. Ecrire l'équilibre des nœuds et en déduire les tensions dans chaque barre et les réactions aux appuis. Quelles sont les barres en traction et les barres en compression ?
2. La contrainte limite admissible du matériau est $\sigma_e$. Quelle est la valeur $F_{max}$ maximale admissible pour l'effort *F* ?
3. En écrivant la relation de comportement pour chaque barre. Donner l'expression des allongements en fonction de *F*.
4. Donner la relation générale reliant l'allongement d'une barre aux déplacements de ses extrémités.
5. On note les déplacements des nœuds de la manière suivante :
$$\vec{u}_A = u_A\vec{x} + v_A\vec{y}, \quad \vec{u}_B = u_B\vec{x} + v_B\vec{y}, \quad \vec{u}_C = u_C\vec{x} + v_C\vec{y}$$
   a. Ecrire les conditions d'appuis en *A* et *B.*
   b. Ecrire les relations entre les allongements des trois barres et le déplacement des nœuds.
   c. En déduire le déplacement des nœuds.

## Exercice 4 : Etude d'une charpente métallique

La charpente ABCD représentée sur la figure ci-dessous est liée au bâti par des rotules sans frottement, fixe en A et mobile horizontalement en B. Elle est soumise à une charge $\vec{F} = -F\vec{y}$ en C. Toutes les barres ont même section droite d'aire S, même module d'Young E et même limite élastique en traction-compression (on suppose qu'il n'y a pas de risque de flambement). On pose DA=DB=DC=L, le triangle ABC étant équilatéral avec $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Données numériques : S = 5 mm², E = 75 GPa et $\sigma_e = 100\ MPa$ (aluminium).




1. **Cas isostatique**
    a. Calculez la longueur des barres 1 et 3.
    b. Calculez les réactions d'appui en A et B en fonction de F.
    c. Calculez les tensions dans les barres en fonction de F. Quelle valeur maximale F* peut atteindre F en conservant toutes les barres dans le domaine élastique? On effectuera l'application numérique pour F*.

2. **Cas hyperstatique :** on remplace l'appui mobile en B par un appui fixe
    a. Ecrire le système d'équations pour les tensions dans les barres. Le résoudre en fonction de F et de la tension $N_2$ dans la barre 2.
    b. Ecrire toutes les relations liant les allongements dans les barres et les déplacements.
    c. En déduire la relation de compatibilité.
    d. Calculez $N_2$. Quelle valeur maximale F** peut atteindre *F* en conservant toutes les barres dans le domaine élastique? La configuration hyperstatique autorise-t-elle une charge F** plus grande que la charge maximale admissible dans le cas isostatique F** ? On effectuera l'application numérique pour F** et $N_2$.