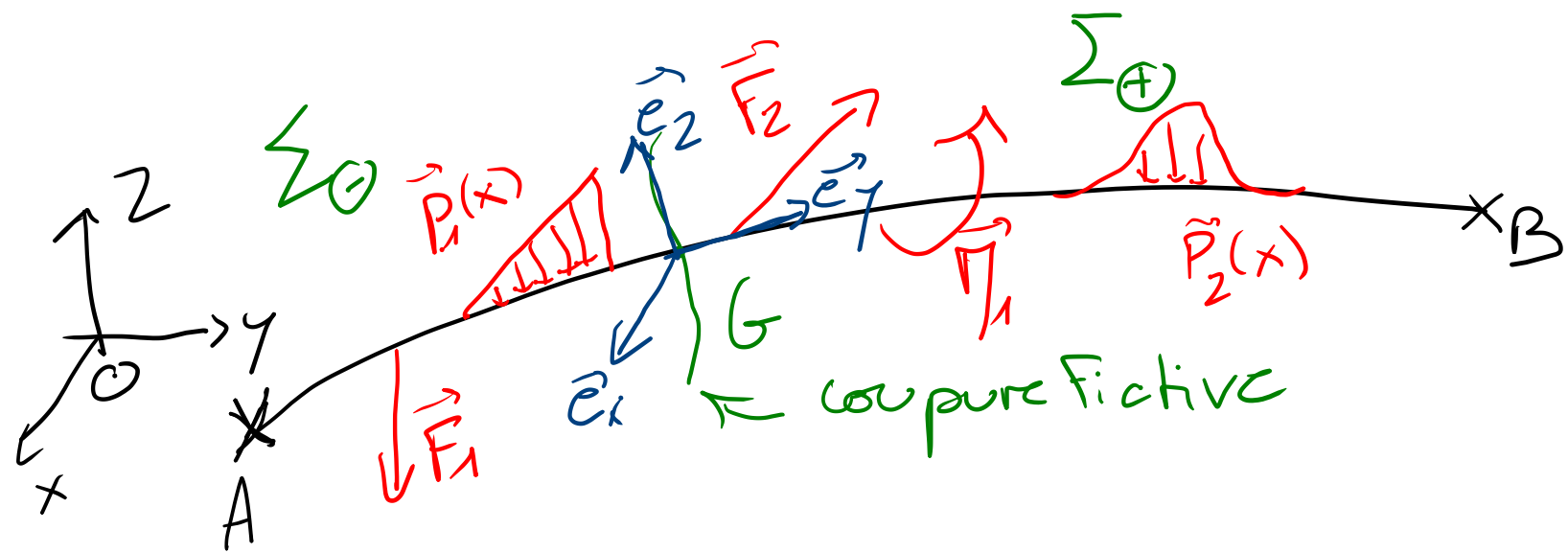


RDM - Méthode des coupures (TD3)



Torseur des efforts de cohésion

$$\begin{aligned}
 \left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G &= \left\{ \mathcal{T}_{\Sigma_+ \rightarrow \Sigma_-} \right\}_G \\
 \vec{R}_{coh} &= T_x \vec{e}_x + N \vec{e}_y + T_z \vec{e}_z \\
 \vec{T}(G, coh) &= \left[\begin{array}{c} \tau_{fx} \vec{e}_x + \tau_{fy} \vec{e}_y + \tau_{fz} \vec{e}_z \\ \tau_{fx} \vec{e}_x + \tau_{fy} \vec{e}_y + \tau_{fz} \vec{e}_z \end{array} \right]_G
 \end{aligned}$$

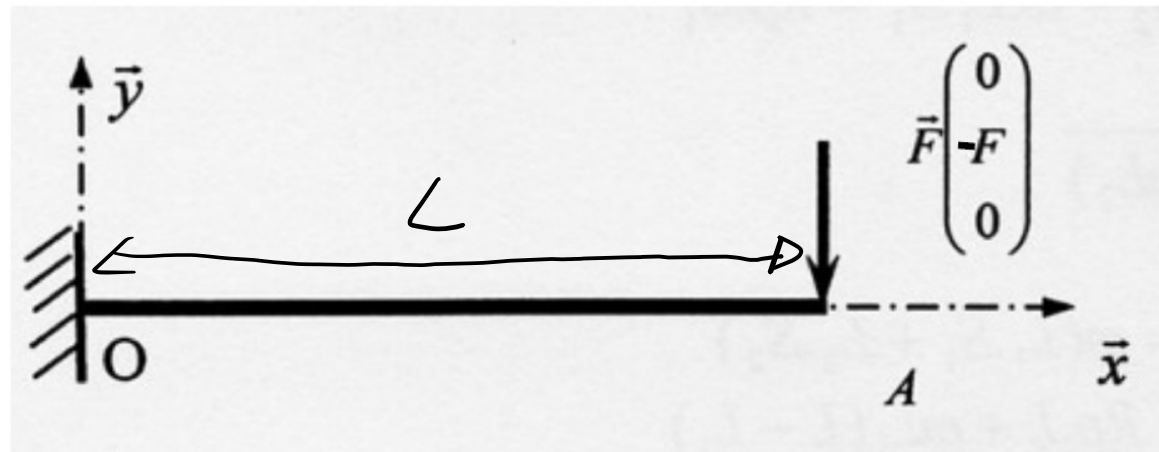
BARTE sur Σ_- : - Torseur des efforts extérieurs

$$\left\{ \mathcal{T}_{Ext \rightarrow \Sigma_-} \right\}_G + \left\{ \mathcal{T}_{\Sigma_+ \rightarrow \Sigma_-} \right\}_G = \{ 0 \}$$

PFS appliqué à Σ_- en G:

$$\left\{ \mathcal{T}_{Ext \rightarrow \Sigma_-} \right\}_G + \left\{ \mathcal{T}_{\Sigma_+ \rightarrow \Sigma_-} \right\}_G = \{ 0 \} \Rightarrow \left\{ \mathcal{T}_{coh} \right\}_G = - \left\{ \mathcal{T}_{Ext \rightarrow \Sigma_-} \right\}_G$$

Exercice 1:



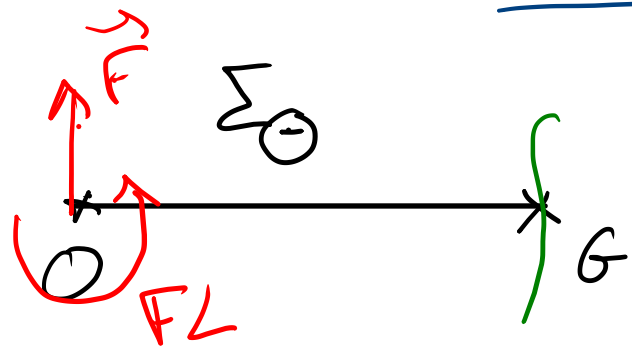
B.A.M. \bar{E} sur la poutre $[OA]$:

$$\left\{ \mathcal{L}_{\mathcal{L}_0} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_0 = x_0 \vec{x} + y_0 \vec{y} \\ \vec{V}(0, \mathcal{L}_0) = N_0 \vec{z} \end{array} \right\}_0 \quad \left\{ \mathcal{L}_{\vec{F}} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = -F \vec{y} \\ \vec{V}(A, \vec{F}) = \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

PFS appliquée à la poutre en O

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 - F = 0 \\ N_0 - FL = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = F \\ N_0 = FL \end{array} \right.$$

Torseur des efforts de cohésion:

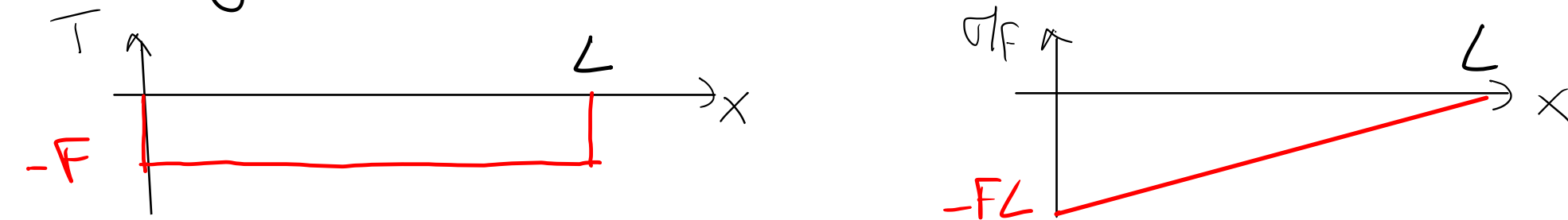


$$\left\{ \mathcal{L}_{\text{Ext} \rightarrow \Sigma_{\ominus}} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} F \vec{y} \\ (FL - Fx) \vec{z} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \mathcal{L}_{\text{coh}} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{\text{coh}} = -F \vec{y} \\ \vec{V}(G, \text{coh}) = F(x-L) \vec{z} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow T = -F \text{ (effort tranchant)}$$

$$\Rightarrow M_f(x) = F(x-L) \text{ (Moment Fléchissant)}$$

Diagramme des efforts intérieurs:



Déformée de la poutre

Loi de comportement $\Rightarrow EI v''''(x) = M'_f(x) \Leftrightarrow EI v''''(x) = F(x-L)$

$$\text{Donc } EI v'(x) = \frac{F(x-L)^2}{2} + K' \text{ or } v'(x=0) = 0 \Rightarrow K' = -\frac{FL^2}{2}$$

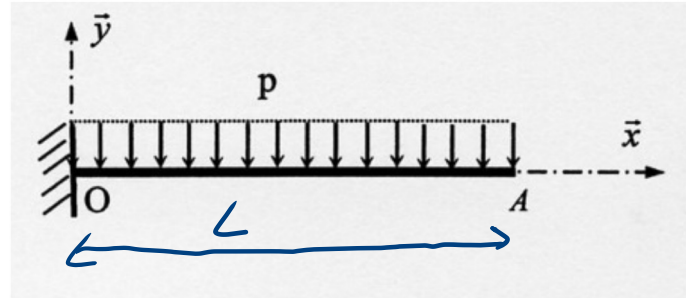
$$\text{ce qui donne } EI v'(x) = \frac{Fx^2}{2} - FLx$$

$$\text{Donc } EI v(x) = \frac{Fx^3}{6} - \frac{FLx^2}{2} + K \text{ or } v(x=0) = 0 \Rightarrow K = 0$$

$$EI v(x) = \frac{Fx^3}{6} - \frac{FLx^2}{2} \Rightarrow v(L) = -\frac{FL^3}{6EI}$$

⚠ matériau homogène
 $\Rightarrow E = \text{cte}$
Poutre de section constante
 $\Rightarrow I(x) = I \forall x$

Exercice 2:



B.A.M.E sur la poutre: $\{ \mathcal{L}_{\mathcal{L}_0} \} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_0 = x_0 \vec{x} + y_0 \vec{y} \\ \vec{\Gamma}(0, \mathcal{L}_0) = N_0 \vec{z} \end{array} \right\}_0$

$\{ \mathcal{L}_{\vec{p}} \} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_p = \int_0^A \vec{p}(p) dp \\ \vec{\Gamma}(0, \vec{p}) = \int_0^A \vec{OM}_1 \wedge \vec{p}(p) dp \end{array} \right\}_0$

$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_p = -pL \vec{y} \\ \vec{\Gamma}(0, \vec{p}) = -p \frac{L^2}{2} \vec{z} \end{array} \right\}_0$

$\Rightarrow \{ \mathcal{L}_{\vec{p}} \} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_p = -p \vec{y} \int_0^L dp \\ \vec{\Gamma}(0, \vec{p}) = \int_0^L -l \vec{x} \wedge p \vec{y} dl \end{array} \right\}_0$

PFS appliquée à la poutre en O \Rightarrow

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ y_0 = pL \\ N_0 = p \frac{L^2}{2} \end{array} \right.$$

Torseur des efforts de cohésion



$\{ \mathcal{L}_{\vec{p} \rightarrow \Sigma} \} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_p = \int_0^x -p \vec{y} dp \\ \vec{\Gamma}(0, \vec{p} \rightarrow \Sigma) = \int_0^x -p l \vec{z} dl \end{array} \right\}_0$

$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_p = -p x \vec{y} \\ \vec{\Gamma}(0, \vec{p} \rightarrow \Sigma) = -p \frac{x^2}{2} \vec{z} \end{array} \right\}_0$

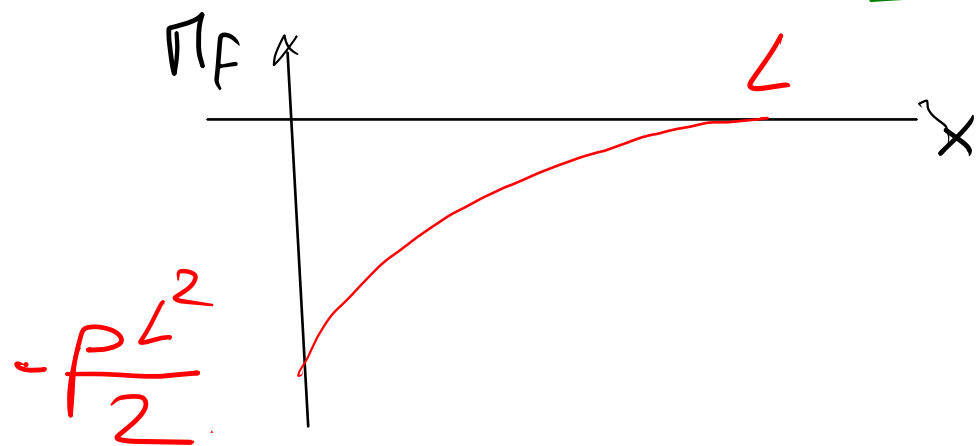
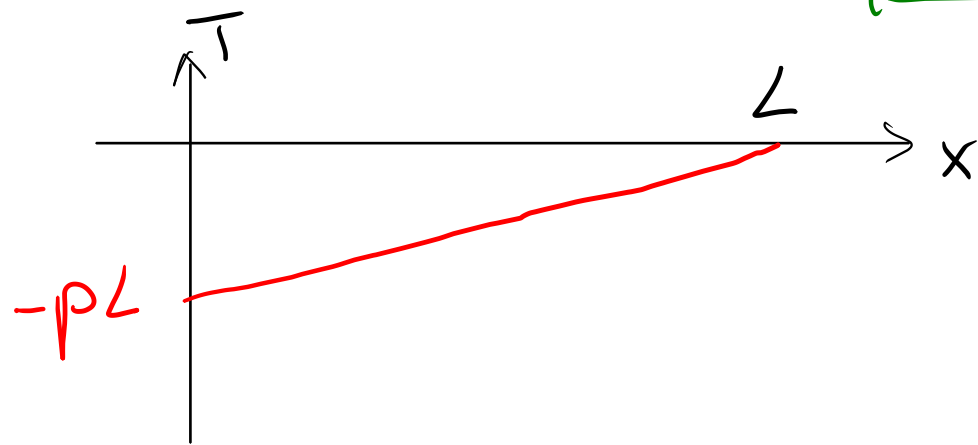
Transport des moments en G :

$$\vec{\gamma}(G, \vec{p} \rightarrow \vec{\Sigma}_-) = \vec{\gamma}(O, \vec{p} \rightarrow \vec{\Sigma}_-) + \vec{R}_{p \rightarrow O} \wedge \vec{OG} = -p \frac{x^2}{2} \vec{z} - p \times \vec{y} \wedge x \vec{x} = p \frac{x^2}{2} \vec{z}$$

$$\vec{\gamma}(G, \vec{L}_0) = \vec{\gamma}(O, \vec{L}_0) + \vec{R}_0 \wedge \vec{OG} = p \frac{L^2}{2} \vec{z} + pL \vec{y} \wedge x \vec{x} = \left(p \frac{L^2}{2} - pLx \right) \vec{z}$$

On a donc $\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{Ext \rightarrow \Sigma_-} \\ \vec{\gamma}(G, Ext \rightarrow \Sigma_-) \end{array} \right. = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{Ext \rightarrow \Sigma_-} = pL \vec{y} - p x \vec{y} = p(L-x) \vec{y} \\ \vec{\gamma}(G, Ext \rightarrow \Sigma_-) = \left(p \frac{x^2}{2} + p \frac{L^2}{2} - pLx \right) \vec{z} = \frac{p}{2} (x-L)^2 \vec{z} \end{array} \right.$

On a donc $\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{coh} \\ \vec{\gamma}(G, coh) \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{coh} = p(x-L) \vec{y} \\ \vec{\gamma}(G, coh) = -\frac{p}{2} (x-L)^2 \vec{z} \end{array} \right\}_G$



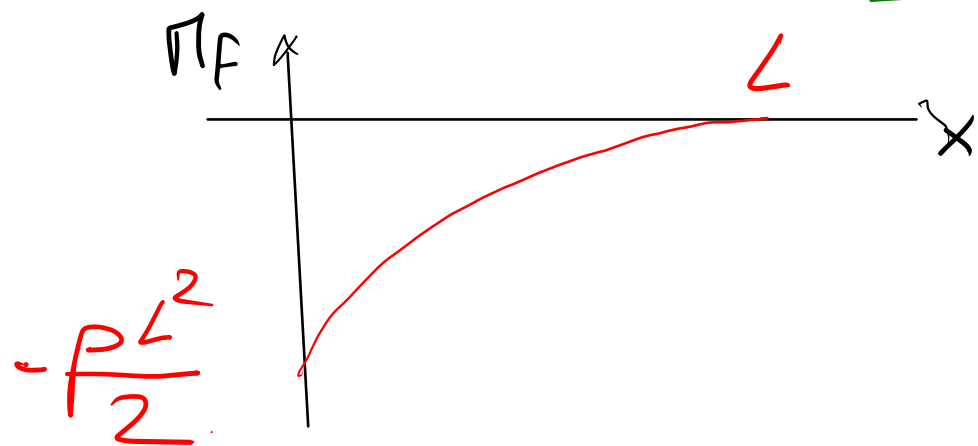
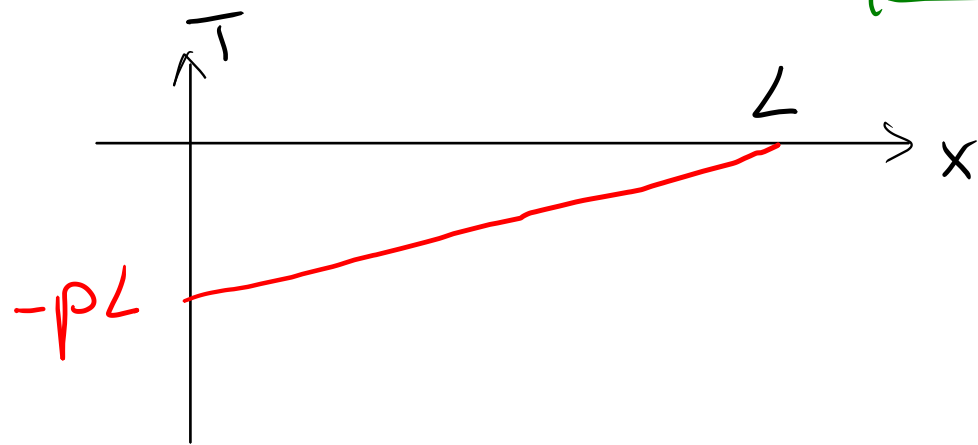
Transport des moments en G :

$$\vec{\gamma}(G, \vec{p} \rightarrow \vec{\Sigma}_-) = \vec{\gamma}(O, \vec{p} \rightarrow \vec{\Sigma}_-) + \vec{R}_{p \rightarrow O} \wedge \vec{OG} = -p \frac{x^2}{2} \vec{z} - p \times \vec{y} \wedge x \vec{x} = p \frac{x^2}{2} \vec{z}$$

$$\vec{\gamma}(G, \vec{L}_0) = \vec{\gamma}(O, \vec{L}_0) + \vec{R}_0 \wedge \vec{OG} = p \frac{L^2}{2} \vec{z} + pL \vec{y} \wedge x \vec{x} = \left(p \frac{L^2}{2} - pLx \right) \vec{z}$$

On a donc $\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{Ext \rightarrow \Sigma_-} \\ \vec{\gamma}(G, Ext \rightarrow \Sigma_-) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{Ext \rightarrow \Sigma_-} = pL \vec{y} - p x \vec{y} = p(L-x) \vec{y} \\ \vec{\gamma}(G, Ext \rightarrow \Sigma_-) = \left(p \frac{x^2}{2} + p \frac{L^2}{2} - pLx \right) \vec{z} = \frac{p}{2} (x-L)^2 \vec{z} \end{array} \right.$

On a donc $\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{coh} \\ \vec{\gamma}(G, coh) \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{coh} = p(x-L) \vec{y} \\ \vec{\gamma}(G, coh) = -\frac{p}{2} (x-L)^2 \vec{z} \end{array} \right\}_G$



Déformée de la poutre:

$$EI v''(x) = \mathcal{M}_f(x) \Leftrightarrow EI v''(x) = -\frac{p}{2}(x-L)^2$$

$$\Rightarrow EI v'(x) = -\frac{p}{2} \frac{(x-L)^3}{3} + \kappa' \quad \text{or } v'(0) = 0 \quad \kappa' = -\frac{pL^3}{6}$$

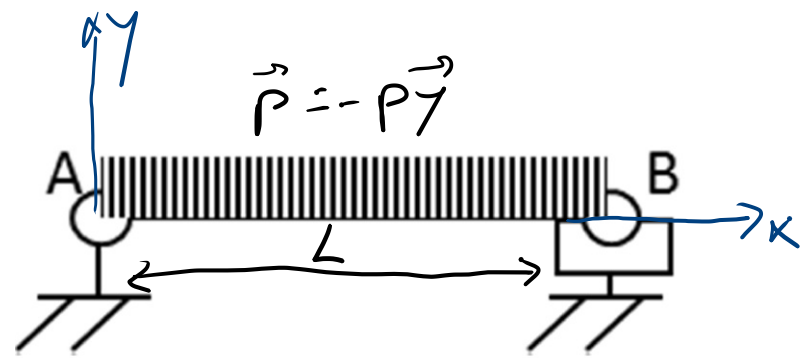
$$\Rightarrow EI v(x) = -\frac{p}{2} \frac{(x-L)^4}{12} - \frac{pL^3}{6}x + \kappa \quad \text{or } v(0) = 0$$

$$\text{donc } \kappa - \frac{pL^4}{6} - \frac{pL^4}{24} = 0 \Rightarrow \kappa = \frac{pL^4}{8}$$

$$\text{On a donc: } EI v(x) = -p \frac{(x-L)^4}{24} - \frac{pL^3}{6}x + p \frac{L^4}{8}$$

$$\Rightarrow v(L) = -\frac{pL^4}{24}$$

Exercice 3



B.A.P. E sur la poutre

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C}_{\mathcal{L}_A} \\ \mathcal{C}_{\mathcal{L}_B} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_A = x_A \vec{x} + \gamma_A \vec{y} \\ \vec{\gamma}(A, \mathcal{L}_A) \cdot \vec{z} = 0 \end{array} \right\}_A \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_B = \gamma_B \vec{y} \\ \vec{\gamma}(B, \mathcal{L}_B) = 0 \end{array} \right\}_B$$

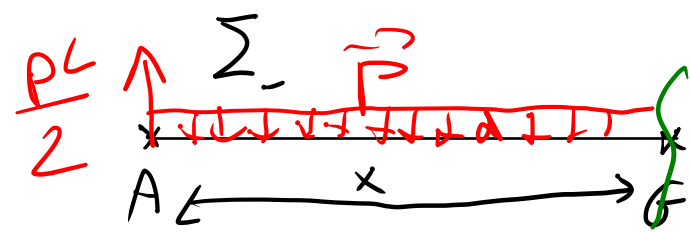
$$\left\{ \mathcal{C}_{\vec{P}} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_P = -P L \vec{y} \\ \vec{\gamma}(A, \vec{P}) = -\frac{P L}{2} \vec{z} \end{array} \right\}_A \quad (\text{Voir d\u00e9mo exo 2})$$

PFS appliqu\u00e9e \u00e0 la poutre en A:

$$x_A = 0$$

$$\gamma_A = \frac{P L}{2} \quad \gamma_B = \frac{P L}{2}$$

Torseur des efforts de coh\u00e9sion:



$$\left\{ \mathcal{C}_{P \rightarrow \Sigma_-} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_P = -P x \vec{y} \\ \vec{\gamma}(G, \vec{P} \rightarrow \Sigma_-) = \frac{P x^2}{2} \vec{z} \end{array} \right\}_G \quad (\text{Voir d\u00e9mo exo 2})$$

$$\left\{ \mathcal{C}_{Ext \rightarrow \Sigma_-} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{Ext \rightarrow \Sigma_-} = \frac{P L}{2} \vec{y} - P x \vec{y} = P \left(\frac{L}{2} - x \right) \vec{y} \\ \vec{\gamma}(G, Ext \rightarrow \Sigma_-) = -\frac{P L}{2} x \vec{z} + \frac{P x^2}{2} \vec{z} = \frac{P}{2} x (L - x) \vec{z} \end{array} \right\}_G = \left\{ \mathcal{C}_{coh} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} P \left(x - \frac{L}{2} \right) \vec{y} \\ \frac{P}{2} x (L - x) \vec{z} \end{array} \right\}_G$$

Déformée de la poutre:

$$EI v''(x) = M_f(x) \Leftrightarrow EI v''(x) = \frac{P}{2} x(L-x) \Leftrightarrow EI v''(x) = \frac{P}{2} Lx - \frac{P}{2} x^2$$

$$\Rightarrow EI v'(x) = \frac{P}{2} L \frac{x^2}{2} - \frac{P x^3}{6} + v' = -\frac{P x^3}{6} + \frac{P L x^2}{4} + v' \quad (\text{les liaisons, pivot et linéaire articulaire, ne permettent pas d'avoir d'infos sur } v'(0) \text{ et } v'(L))$$

$$\Rightarrow EI v(x) = -\frac{P x^4}{24} + \frac{P L x^3}{12} + v' x + v$$

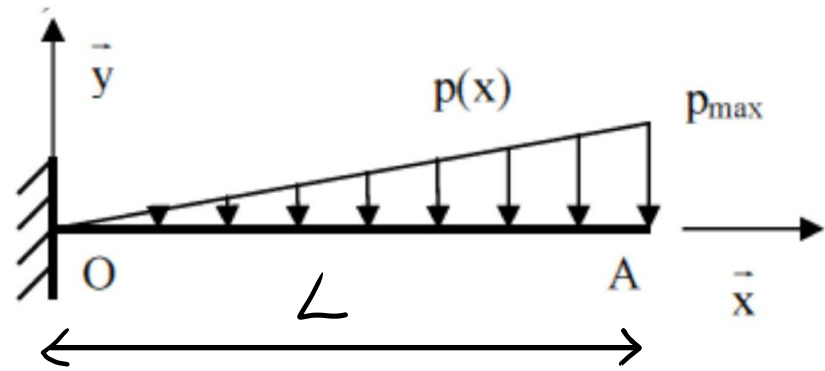
$$\text{or } v(0) = 0 \Rightarrow v = 0 \quad \text{et } v(L) = 0 \Rightarrow -\frac{P L^4}{24} + \frac{P L^4}{12} + v' L = 0$$

$$\Leftrightarrow v' = \frac{P L^3}{24} - \frac{P L^3}{12} = -\frac{P L^3}{24}$$

$$\Rightarrow EI v(x) = -\frac{P x^4}{24} + \frac{P L x^3}{12} - \frac{P L^3}{24} x$$

$$\Rightarrow v\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{P \frac{L^4}{16}}{24} + \frac{P \frac{L^4}{8}}{12} - \frac{P \frac{L^4}{24}}{24} = -\frac{13}{192} P L^4$$

Exercice 4

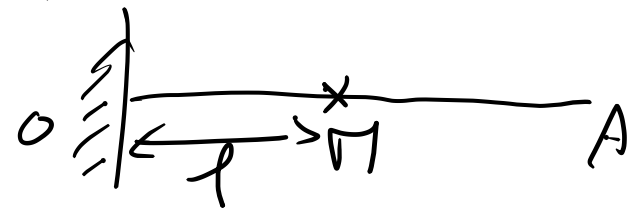


$$\vec{p}(x) = - \frac{p_{max}}{L} x \vec{y}$$

B.A.P.E sur la poutre:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_P = \int_0^A \vec{p}(x) dx \\ \vec{T}(O, P) = \int_0^A x \vec{p}(x) dx \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_0 = X_0 \vec{x} + Y_0 \vec{y} \\ \vec{T}(O, \Sigma_0) = N_0 \vec{z} \end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_P = \int_0^L - \frac{p_{max}}{L} x \vec{y} dx \\ \vec{T}(O, P) = \int_0^L x \vec{x} \wedge - \frac{p_{max}}{L} x \vec{y} dx \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_P = - \frac{p_{max}}{2} L \vec{y} \\ \vec{T}(O, P) = - \frac{p_{max}}{3} L^2 \vec{z} \end{array} \right.$$

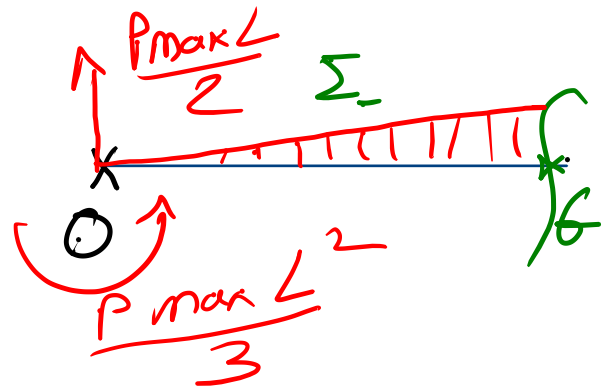
PFS appliquée à la poutre en O:

$$X_0 = 0$$

$$N_0 = \frac{p_{max}}{3} L^2$$

$$Y_0 = \frac{p_{max}}{2} L$$

Torreur des efforts de cohésion:



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{C}_{coh} \\ \vec{C}_{Ext \rightarrow \Sigma} \end{array} \right.$$

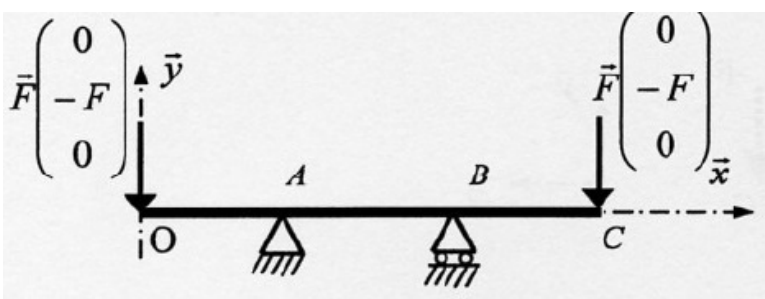
$$\vec{R}_{Ext \rightarrow \Sigma_-} = \frac{P_{max} L}{2} \vec{y} + \int_0^L \vec{p}(l) dl = \frac{P_{max}}{2L} (L^2 - x^2) \vec{y}$$

$$\vec{V}(0, Ext \rightarrow \Sigma_-) = \frac{P_{max} L^2}{3} + \int_0^L \sigma \vec{n}_i \cdot \vec{p}(l) dl = \left(\frac{P_{max}}{3} L^2 - \frac{P_{max}}{L} \frac{x^3}{3} \right) \vec{z}$$

$$\vec{V}(G, Ext \rightarrow \Sigma_-) = \vec{V}(0, Ext \rightarrow \Sigma_-) + \vec{R}_{Ext \rightarrow \Sigma_-} \cdot \vec{OG} = \frac{P_{max}}{6L} [L^3 - 3L^2 x + x^3] \vec{z}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{coh} = \frac{P_{max}}{6L} (x^2 - L^2) \vec{y} \\ \vec{V}(G, coh) = -\frac{P_{max}}{6L} (L^3 - 3L^2 x + x^3) \vec{z} \end{array} \right\}_G$$

Exercice n°5:



$OA=AB=BC=L$

- Poutre rectiligne $OC=3L= 3m$ soumise à deux charges concentrées ($F=800N$).
- La poutre est de section droite constante (tube creux de diamètre extérieur $D=40mm$ et diamètre intérieur $d=35mm$)
- Matériaux : acier $\Rightarrow E=210000Mpa$
- Appui avec frottement en A et sans frottement en B.

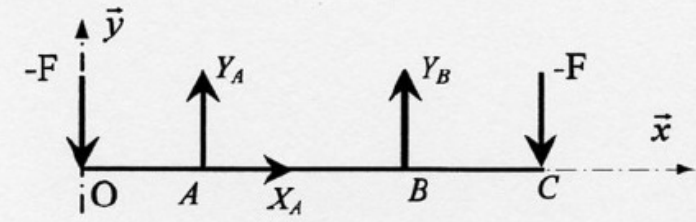
Objectifs :

- déterminer la limite élastique du matériau permettant de respecter le critère de résistance (coefficient de sécurité $k=1.6$)
- déterminer la flèche maximum

Hypothèse : on néglige le poids propre de la poutre

2.3.1. Déterminer les réactions d'appui en A et B

On isole la poutre.



Elle est en équilibre. On peut donc lui appliquer le principe fondamental de la statique :

- Théorème de la résultante statique :
 - $/\bar{x} : X_A=0$
 - $/\bar{y} : -2.F+Y_A+Y_B=0$
- Théorème du moment statique en A et en projection sur \bar{z} :
 - $-F.L+ Y_B.L-F.2L=0$

Ce qui donne: $Y_A=Y_B=F$

Déterminer le torseur de cohésion sur OA, AB et BC

On oriente la poutre vers les x croissants. On définit le torseur de cohésion comme l'action de la partie E_2 sur la partie E_1 : $\{T_{coh}\} = \{T_{E_2/E_1}\}_G$ avec G le point de la ligne moyenne centre de la section de coupure défini par $\vec{OG} = x \cdot \bar{x}$

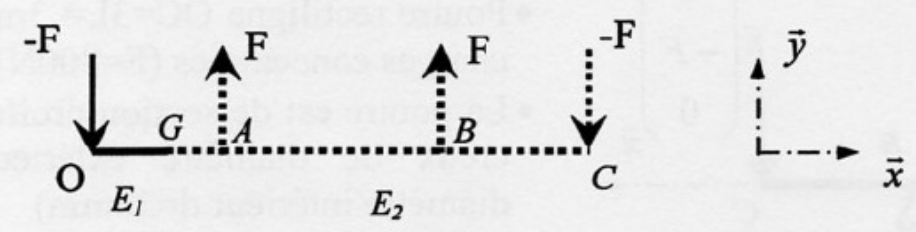
Les liaisons de la poutre en A et B représentent des discontinuités qui nous obligent à considérer trois tronçons de poutre : OA, AB et BC. Sur chaque tronçon nous pouvons déterminer le torseur de cohésion à partir de la traduction de l'équilibre de E_2 ou bien de E_1 :

$\{T_{coh}\} = \{T_{\bar{E}/E_2}\}_G$ ou bien $\{T_{coh}\} = -\{T_{\bar{E}/E_1}\}_G$

Afin de faciliter le calcul, nous choisirons le tronçon soumis au plus faible nombre d'actions mécaniques extérieures.

Torseur de cohésion :

- Sur OA : $x \in]0, L[$



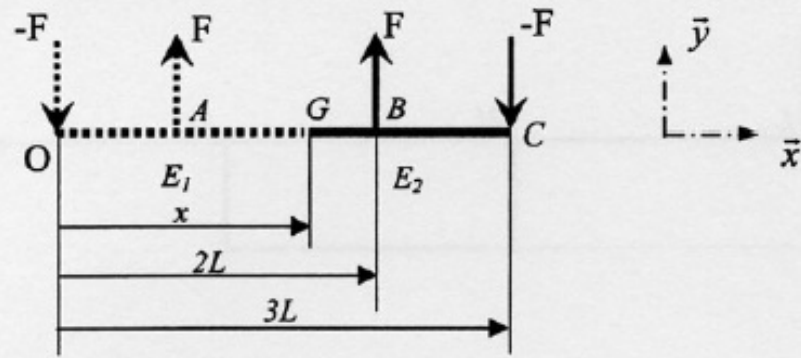
$\{T_{coh}\} = -\{T_{\bar{E}/E_1}\}_G$

Or $\{T_{\bar{E}/E_1}\}_O = \begin{Bmatrix} -F \cdot \bar{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O$. On transporte alors ce torseur en G : $\{T_{\bar{E}/E_1}\}_G = \begin{Bmatrix} -F \cdot \bar{y} \\ Fx \cdot \bar{z} \end{Bmatrix}_G$

On obtient donc : $\{T_{coh}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & -Fx \end{Bmatrix}_{(G, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$ pour $x \in]0, L[$

- Sur AB: $x \in]L, 2L[$

Les tronçons E_1 et E_2 sont soumis au même nombre d'actions mécaniques extérieures. On choisit arbitrairement le tronçon E_2

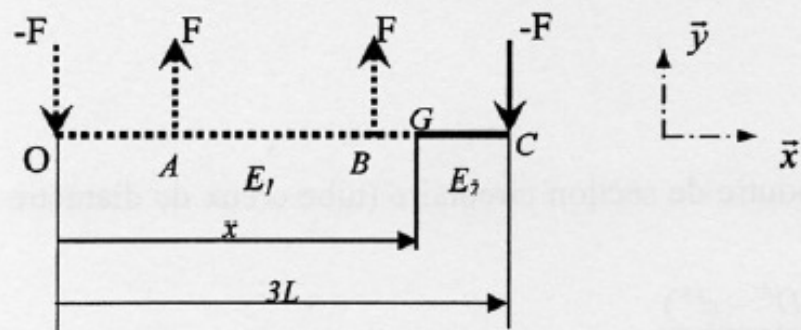


$$\{T_{coh}\} = \{T_{\bar{E}/E_2}\}_G$$

$$\text{avec } \{T_{\bar{E}/E_2}\} = \left\{ \begin{array}{l} (F - F) \cdot \bar{y} \\ [F(2L - x) - F(3L - x)] \cdot \bar{z} \end{array} \right\}_G$$

$$\text{On obtient donc : } \{T_{coh}\} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -FL \end{array} \right\}_{(G, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \quad \text{pour } x \in]L, 2L[$$

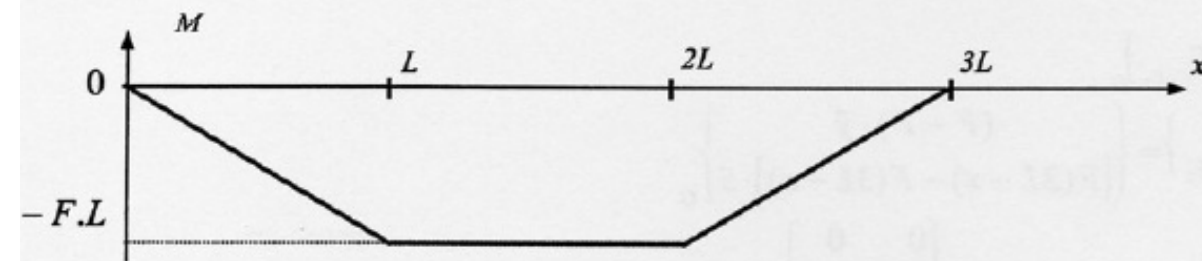
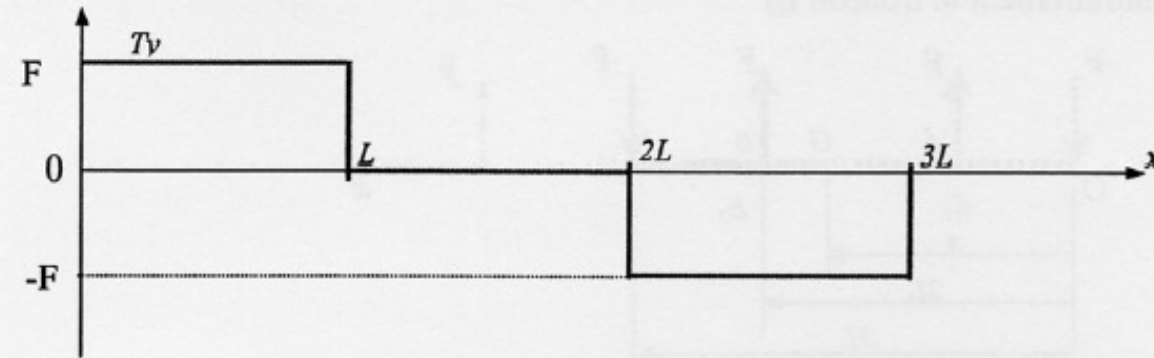
- Sur BC: $x \in]2L, 3L[$



$$\{T_{coh}\} = \{T_{\bar{E}/E_2}\}_G \quad \text{avec } \{T_{\bar{E}/E_2}\} = \left\{ \begin{array}{l} -F \cdot \bar{y} \\ \bar{0} \end{array} \right\}_C$$

$$\text{On obtient donc : } \{T_{coh}\} = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & -F(3L - x) \end{array} \right\}_{(G, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \quad \text{pour } x \in]2L, 3L[$$

2.3.3. Tracer les diagrammes d'effort et identifier les types de sollicitation sur chacun des tronçons (avec $F < 0$)



Sollicitations : Sur OA et BC : flexion simple (T_y et $M_{fz} \neq 0$)
Sur AB : flexion pure (seul $M_{fz} \neq 0$)

2.3.4. Déterminer l'expression de la contrainte normale maximale $|\sigma_{max}|$

$$|\sigma_{max}| = \frac{FL|y|_{max}}{I_{(G, \bar{z})}}$$

Sachant que l'on a une poutre de section circulaire (tube creux de diamètre extérieur D et de diamètre intérieur d ,

$$|y|_{max} = \frac{D}{2} \quad \text{et} \quad I_{(G, \bar{z})} = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{64}$$

$$\text{On a donc : } |\sigma_{max}| = \frac{32 \cdot FL D}{\pi \cdot (D^4 - d^4)}$$

$$\text{Or } |\sigma_{max}| \leq \frac{Re_{0.2}}{k} \quad \text{d'où} \quad Re_{0.2} \geq \frac{32 \cdot k \cdot FL D}{\pi \cdot (D^4 - d^4)}$$

Application numérique : $Re_{0.2} \geq 492.3 \text{ MPa}$

2.3.5. Donner l'expression de la déformée

| Sur OA : $x \in]0, L[$ | Sur AB : $x \in]L, 2L[$ | Sur BC : $x \in]2L, 3L[$ |
|--|---|--|
| $E I_{(G,\bar{x})} Y_1''(x) = -Fx$ | $E I_{(G,\bar{x})} Y_2''(x) = -FL$ | $E I_{(G,\bar{x})} Y_3''(x) = -F(3L-x)$ |
| $E I_{(G,\bar{x})} Y_1'(x) = -F \frac{x^2}{2} + K_1$ | $E I_{(G,\bar{x})} Y_2'(x) = -FLx + K_2$ | $E I_{(G,\bar{x})} Y_3'(x) = \frac{F}{2}(3L-x)^2 - K_3$ |
| $E I_{(G,\bar{x})} Y_1(x) = -F \frac{x^3}{6} + K_1 x + K_1'$ | $E I_{(G,\bar{x})} Y_2(x) = -FL \frac{x^2}{2} + K_2 x + K_2'$ | $E I_{(G,\bar{x})} Y_3(x) = -\frac{F}{6}(3L-x)^3 + K_3(3L-x) + K_3'$ |

| | |
|--|--|
| <p>Appui simple en A :</p> $Y_1(L) = 0$ (1) $Y_2(L) = 0$ (2) Continuité de la ligne moyenne en A: $Y_1(L) = Y_2(L)$ (déjà traduit) Continuité de la pente de la ligne moyenne en A: $Y_1'(L) = Y_2'(L)$ (3) | <p>Appui simple en B :</p> $Y_2(2L) = 0$ (4) $Y_3(2L) = 0$ (5) Continuité de la ligne moyenne en B: $Y_2(2L) = Y_3(2L)$ (déjà traduit) Continuité de la pente de la ligne moyenne en B: $Y_2'(2L) = Y_3'(2L)$ (6) |
|--|--|

On obtient donc un système de 6 équations (de (1) à (6)) à 6 inconnues (K_1, K_2, K_3 et K_1', K_2', K_3'). Sa résolution permet d'obtenir :

$$Y(x) = Y_1(x) = \frac{-F}{6EI_{(G,\bar{x})}} [x^3 - 6L^2x + 5L^3] \text{ pour } x \in]0, L[$$

$$Y(x) = Y_2(x) = \frac{-F}{2EI_{(G,\bar{x})}} [Lx^2 - 3L^2x + 2L^3] \text{ pour } x \in]L, 2L[$$

$$Y(x) = Y_3(x) = \frac{-F}{6EI_{(G,\bar{x})}} [(3L-x)^3 + 6L^2x - 13L^3] \text{ pour } x \in]2L, 3L[$$

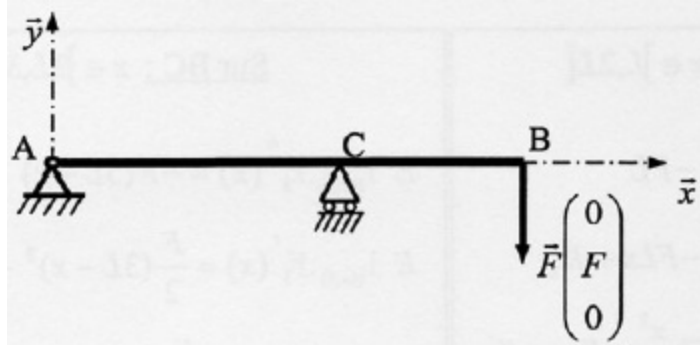
2.3.6. Déterminer la flèche maximale en valeur absolue Y_{\max}

Pour $x = 0$ ou $x = 3L$, $Y(0) = Y(3L) = -\frac{5FL^3}{6EI_{(G,\bar{x})}} = Y_{\max}$

$$Y_{\max} = -\frac{160.FL^3}{3\pi.E.(D^4 - d^4)}$$

Application numérique : $Y_{\max} = -61.05mm$

Exercice 6:



- Poutre rectiligne AC, articulée en A, en appui simple sans frottement en C, charge \vec{F} en B ($F=500\text{N}$).
- (\bar{y}, \bar{z}) axes de symétrie de toutes sections droites ($I_{(G,\bar{z})} = 50000\text{mm}^4$), $|y|_{\max} = 20\text{mm}$.
- $AC = a = 2\text{m}$, $CB = b = 1\text{m}$.
- Matériaux : Aluminium ($E=70000\text{Mpa}$, $Re_{0.2} = 285\text{MPa}$)

Objectif : Vérifier le bon dimensionnement de la structure devant vérifier le critère de résistance : coefficient de sécurité $k=1.3$
 Hypothèse : on néglige le poids propre de la poutre

2.4.1. Déterminer les réactions d'appui en A et C

Le principe fondamental de la statique appliqué à la poutre permet d'obtenir :

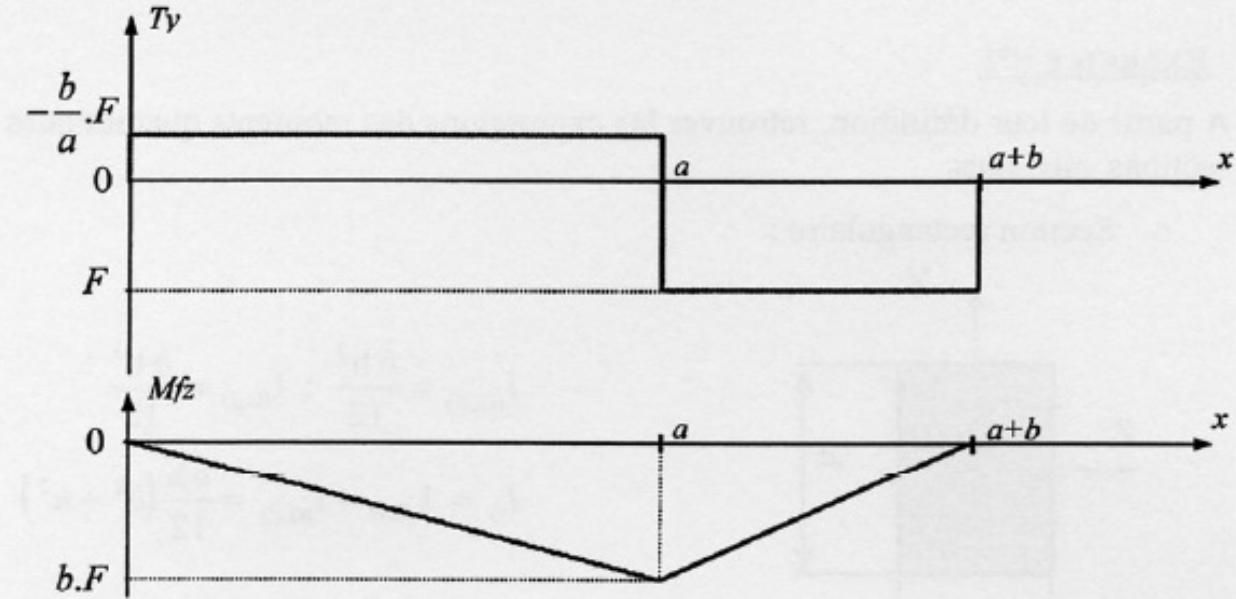
$$X_A = 0, Y_A = \frac{b}{a}F, Y_C = -\frac{(a+b)}{a}F$$

2.4.2. Exprimer le torseur de cohésion sur AC et CB

On oriente la poutre vers les x croissants. On définit le torseur de cohésion comme l'action de la partie E_2 sur la partie E_1 : $\{T_{coh}\} = \{T_{E_2/E_1}\}_G$ avec G le point de la ligne moyenne centre de la section de coupure défini par $\vec{OG} = x \cdot \bar{x}$

- Sur AC: $x \in]0, a[$, $\{T_{coh}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{b}{a}F & 0 \\ 0 & \frac{b}{a}Fx \end{Bmatrix}_{(G,\bar{x},\bar{y},\bar{z})}$
- Sur CB: $x \in]a, a+b[$, $\{T_{coh}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F & 0 \\ 0 & F(a+b-x) \end{Bmatrix}_{(G,\bar{x},\bar{y},\bar{z})}$

2.4.3. Tracer les diagrammes d'effort (avec $F < 0$)



2.4.4. Déterminer l'expression de la contrainte normale maximale $|\sigma_{\max}|$. En déduire si le critère de résistance est vérifié ou non.

Section la plus sollicitée : $x=a$. Dans cette section : $|\sigma_{\max}| = -\frac{Fb|y|_{\max}}{I_{(G,\bar{z})}}$

$$\text{A.N. } |\sigma_{\max}| = 200\text{MPa} \leq \frac{Re_{0.2}}{k} = 203.6\text{MPa} \Rightarrow \text{Le critère de résistance est vérifié.}$$