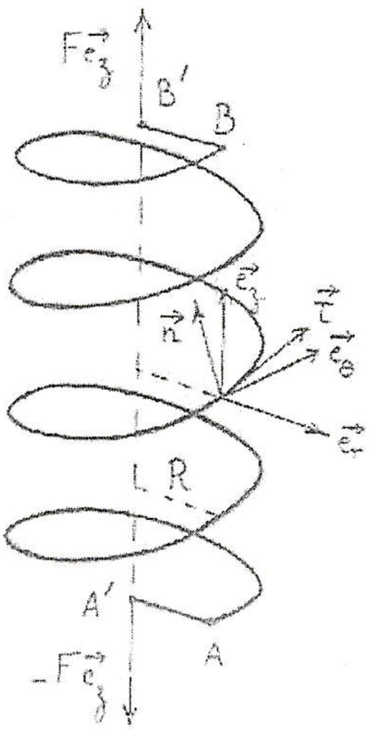
Mécanique des Milieux Continus - Fils, poutres, plaques

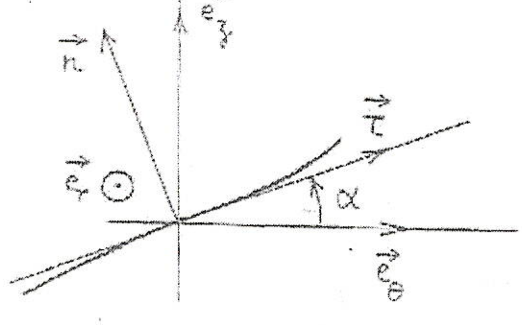
*Examen final - session de juin 1991*

## CALCUL DE LA CONSTANTE DE RAIDEUR D'UN RESSORT

*Avertissement.* Les différentes parties du problème sont d'importance inégale; leur longueur décroit dans l'ordre C, A, B. La partie C est aussi la plus difficile; il est formellement déconseillé de tenter d'utiliser dans cette partie une autre démarche que celle proposée par l'énoncé.

On se propose d'évaluer la raideur d'un ressort hélicoïdal au moyen de la théorie des arcs élastiques. On note $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_z$ la base orthonormée naturellement associée aux coordonnées cylindriques r, θ, z (Oz étant pris confondu avec l'axe du ressort), $\vec{\tau}$ le vecteur unitaire tangent et $\vec{n}$ le vecteur $\vec{e}_r \wedge \vec{\tau}$. Le ressort est caractérisé, du point de vue géométrique, par son rayon R, l'angle α que fait le vecteur $\vec{\tau}$ avec le vecteur $\vec{e}_\theta$ et le nombre n de spires. A ses extrémités A et B sont soudées deux tiges radiales A'A et BB' se terminant sur son axe. Des forces $-F\vec{e}_z$ et $+F\vec{e}_z$ sont exercées en A' et B'. Le ressort est non pesant.




*Vue dans le plan $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_z$*

Dans tout le problème, on notera avec des indices $_{\tau}$, $_{n}$, $_{r}$ les composantes d'un vecteur quelconque dans la base $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{e}_r$, et avec un prime ' la différentiation par rapport à $\theta$.

*Partie A: Etude statique*

1. Montrer que $ds = \dfrac{R d\theta}{\cos\alpha}$ où s désigne l'abscisse curviligne, orientée dans le sens des $\theta$ croissants.

2. Calculer le vecteur $\vec{T}$ et en déduire l'effort normal N et les efforts tranchants $Q_n$, $Q_r$ en tout point du ressort.

3. En intégrant l'équation d'équilibre des moments, calculer $\vec{M}$ sur le ressort à une constante additive près.

4. En étudiant l'équilibre de la tige A'A (ou BB'), déterminer la constante précédemment mentionnée et en déduire le moment de torsion $M_t$ et les moments de flexion $M_{fn}$, $M_{fr}$ en tout point du ressort.

On supposera à partir de maintenant que le matériau constitutif du ressort est élastique, de module d'Young E, coefficient de cisaillement $\mu$; on notera J le module géométrique de rigidité de torsion et $I_n$, $I_r$ les moments d'inertie géométriques de la section par rapport aux axes $\vec{n}$ et $\vec{e}_r$ (supposés principaux d'inertie). On utilisera la théorie de Navier-Bernoulli *en négligeant l'effet de l'effort normal sur la loi de comportement et en supposant que* $\epsilon_\tau = 0$ (allongement nul dans la direction de la tangente). On supposera les tiges A'A et BB' quasi-rigides (modules d'élasticité quasi-infinis).

*Partie B: Utilisation du théorème de Castigliano*

On note $\delta$ l'allongement du ressort, mesuré entre les points A' et B'. Calculer $\delta$ au moyen du théorème de Castigliano. On rappelle l'expression de la densité linéique d'énergie élastique d'une poutre ou d'un arc: $w^* = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{M_t^2}{\mu J} + \dfrac{M_{f2}^2}{EI_2} + \dfrac{M_{f3}^2}{EI_3}\right)$ (en négligeant le terme $N^2/ES$ ). En déduire la rigidité k du ressort, définie par $F = k\delta$.

*Partie C: Calcul du déplacement*

On désire confirmer le résultat précédent au moyen d'un calcul direct du déplacement en tout point du ressort. On fait *a priori* l'hypothèse que les composantes du déplacement $\vec{u}$ dans la base $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{e}_r$ s'écrivent $u_\tau = a\theta$, $u_n = b\theta$, $u_r = c$ où a, b, c sont des constantes.

1. Décrire qualitativement la transformation subie par le ressort.

2. Calculer les vecteurs $\vec{\tau}'$, $\vec{n}'$, $\vec{e}_r'$ dans la base $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{e}_r$ (on rappelle que le symbole ' désigne la différentiation par rapport à $\theta$). Il est conseillé, pour calculer $\vec{\tau}'$ et $\vec{n}'$, d'exprimer $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$ dans la base $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_z$.

3. Calculer les composantes du vecteur $\vec{\gamma}$ dans la base $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{e}_r$ en fonction de celles du vecteur-rotation $\vec{\omega}$, et les relier aux moments de torsion et de flexion.

4. Calculer les composantes du vecteur $\vec{\varepsilon}$ dans la même base en fonction de celles de $\vec{u}$ et $\vec{\omega}$, et écrire les conditions de Navier-Bernoulli ainsi que l'hypothèse $\epsilon_\tau = 0$.

5. Combiner les résultats des questions 3 et 4 pour obtenir des équations reliant $\omega_\tau$, $\omega_\tau'$, a, b et c. Montrer que l'élimination de $\omega_r$ et c conduit aux équations suivantes en a et b:

$$\begin{cases} 2a \sin\alpha\cos\alpha + b\,(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \dfrac{FR^3}{\mu J} \\ a\,(-\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + 2b\cos\alpha\sin\alpha = \dfrac{FR^3\tan\alpha}{EI_n} \end{cases}.$$

6. Résoudre ces équations.

7. Calculer le déplacement vertical $u_z$.

8. Calculer la composante orthoradiale $\omega_\theta$ du vecteur rotation. En déduire que les déplacements verticaux des points A et A' sont les mêmes, ainsi que ceux des points B et B'. Calculer l'allongement $\delta$ du ressort et en déduire sa raideur k.