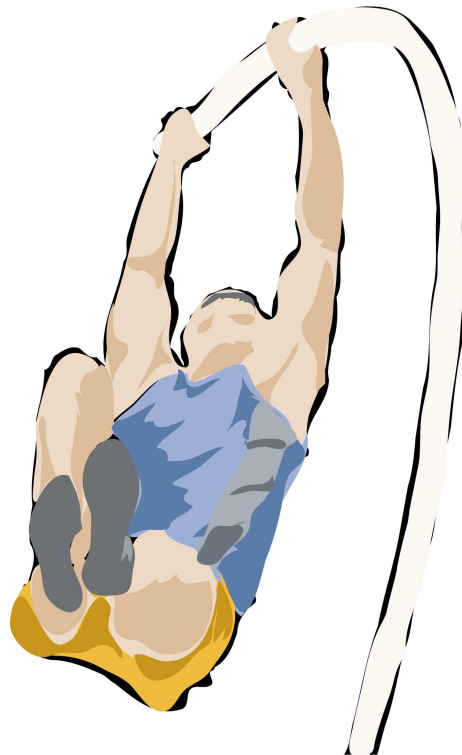


Promotion 2009  
Année 3  
MEC 553

DÉPARTEMENT DE MÉCANIQUE



# Modélisation et calcul des structures élancées

*Patrick Ballard & Alain Millard*

Édition 2011



Promotion 2009  
Année 3  
Période 1  
MEC553

PROGRAMME D'APPROFONDISSEMENT  
DE MÉCANIQUE

# Modélisation et calcul des structures élancées

*Patrick Ballard & Alain Millard*

Édition 2011



# Avant-Propos

Toute théorie de milieu continu repose sur le choix d'une description géométrique de l'objet d'étude : c'est la première étape du processus de modélisation. La deuxième étape est la modélisation des efforts, dont l'utilisation systématique de la dualité permet d'assurer la cohérence avec la description géométrique. L'application du principe fondamental de la dynamique classique fournit alors les équations du mouvement sur lesquelles repose la théorie. Le principe des puissances virtuelles systématise l'ensemble de ce processus à partir de la description géométrique.

Il faut ensuite incorporer dans cette théorie les informations relatives à la nature des matériaux constitutifs : c'est l'objet des lois de comportement dont l'écriture est codifiée par de grands principes axiomatiques : principe d'isotropie de l'espace, premier et second principes de la thermodynamique, etc. . .

Le résultat de ce travail préliminaire (équations du mouvement issues de la description géométrique et loi de comportement) fournit un ensemble d'équation. Le développement complet de la théorie particularise cet ensemble d'équation, dans le cadre d'un certain nombre d'hypothèses de travail qui doivent être clairement identifiées, à des situations génériques. La résolution de ces équations permet alors d'obtenir des prédictions relatives à certaines situations concrètes que l'ingénieur est amené à étudier. Dans certains cas, il est possible d'obtenir des solutions exactes de ces équations sous forme explicite. Cette circonstance est néanmoins exceptionnelle et, en pratique, on ne peut très souvent n'avoir accès qu'à des solutions approchées des équations fournies par la modélisation et de la théorie qui s'appuie dessus.

On supposera ici que le lecteur a déjà été confronté à l'ensemble de cette démarche qui fonde le *calcul des structures*, en ayant étudié la théorie de l'élasticité du milieu continu tridimensionnel classique. Remettant en œuvre le même schéma pour construire la théorie non-linéaire des poutres élastiques, nous espérons ainsi que les deux constructions pourront se nourrir l'une de l'autre et que le lecteur en tirera de la profondeur de compréhension de chacune des théories.

Historiquement, le développement de la théorie des poutres élastiques a précédé celui de l'élasticité du milieu continu tridimensionnel classique. Il n'y a rien d'étonnant à cela car la théorie des poutres est techniquement plus simple que celle du milieu continu tridimensionnel, les équations aux dérivées partielles y disparaissant systématiquement au profit d'équations différentielles ordinaires. Cette simplicité technique enrichit la théorie d'une foule d'exemples explicites qui permettent d'en illustrer avec bonheur la présentation. Cette simplicité est également mise-à-profit ici pour approfondir le propos dans des directions, en général, peu développées dans une première présentation de l'élasticité tridimensionnelle :

- l'étude de l'élasto-dynamique linéarisée à l'aide des modes propres de vibrations dont

de nombreux exemples explicites sont disponibles,

- l'étude des manifestations de non-linéarité que sont les divers types d'instabilité-bifurcation. Comme le caractère élancé favorise l'apparition de ce type de phénomène, il ne peut être question, dans une présentation de la théorie des poutres élastiques, de faire l'impasse sur ces questions qui constituent un mode de ruine fréquemment rencontré dans ce contexte.

Ce cours se conclura par l'analyse systématique des liens entre théorie de l'élasticité tridimensionnelle et théorie des poutres, avec une brève introduction aux développements asymptotiques. Ce formalisme dont le développement est récent (le début des années 1980), s'appuie sur les techniques de l'homogénéisation.

La matière qui est présentée ici dépasse de très loin le contexte du calcul des structures constituées de poutres élastiques. En effet, l'ensemble constitué de la construction de la théorie et des méthodes de calcul présentées se transpose sans beaucoup d'effort au contexte de théories de milieu continu reposant sur d'autres descriptions géométriques : théorie des coques, des milieux micropolaires, des pièces longues en voiles minces, etc. . . Le contexte des poutres est vu ici comme un exemple permettant d'illustrer presque tous les aspects du vaste domaine du calcul des structures (les exceptions notables sont celles des comportements irréversibles qui ne seront pas abordés ici, ainsi que le calcul des singularités).

# Table des matières

<b>1 Cinématique des poutres</b>	<b>3</b>
1.1 Définition de la cinématique poutre . . . . .	3
1.2 Description lagrangienne de la cinématique . . . . .	3
1.2.1 Transformation en cinématique poutre . . . . .	3
1.2.2 Déformation lagrangienne . . . . .	4
1.3 Cinématique eulerienne . . . . .	6
1.3.1 Champ des vitesses en cinématique poutre . . . . .	6
1.3.2 Dérivation d'un champ de distributeur le long d'une courbe . . . . .	6
1.3.3 Caractérisation des champs de vitesse rigidifiants . . . . .	7
1.4 Transformation infinitésimale . . . . .	7
1.5 Taux de déformation lagrangien et eulerien . . . . .	8
1.6 Récapitulatif des formules essentielles . . . . .	10
<b>2 Modélisation des efforts</b>	<b>11</b>
2.1 Le principe des puissances virtuelles . . . . .	11
2.2 Puissance virtuelle des quantités d'accélération . . . . .	12
2.3 Puissance virtuelle des efforts extérieurs . . . . .	13
2.4 Puissance virtuelle des efforts intérieurs . . . . .	15
2.5 Équation du mouvement . . . . .	15
2.6 Transport de l'équation du mouvement . . . . .	17
2.7 Contrainte généralisée lagrangienne . . . . .	18
2.8 Récapitulatif des formules essentielles . . . . .	20
2.9 Exercices . . . . .	21
<b>3 Poutres élastiques</b>	<b>23</b>
3.1 Expression générale de la loi de comportement élastique d'une poutre . . . . .	23
3.2 Prise en compte de liaisons internes . . . . .	25
3.2.1 Cas de la liaison interne d'inextensibilité . . . . .	26
3.2.2 Cas de la liaison interne de Navier-Bernoulli . . . . .	27
3.2.3 Cas des poutres de Navier-Bernoulli inextensibles . . . . .	27
3.3 Bilan des équations . . . . .	27
3.4 Loi de comportement standard . . . . .	28
3.5 Récapitulatif des formules essentielles . . . . .	32

<b>4</b>	<b>Poutres élastiques en petite transformation</b>	<b>35</b>
4.1	Linéarisation autour de l'état naturel . . . . .	35
4.2	Formulations variationnelles en statique linéarisée . . . . .	38
4.2.1	Équilibre d'une poutre naturelle . . . . .	38
4.2.2	Équilibre d'une poutre de Navier-Bernoulli . . . . .	44
4.2.3	Théorème de Castigliano-Menabrea . . . . .	47
4.3	Statique des assemblages de poutres . . . . .	50
4.3.1	Exemple 1 : équilibre d'un treillis . . . . .	52
4.3.2	Exemple 2 : équilibre d'un portique . . . . .	54
4.4	Élasto-dynamique linéarisée . . . . .	58
4.4.1	Vibrations libres . . . . .	60
4.4.2	Vibrations libres à partir d'une condition initiale . . . . .	64
4.4.3	Prise en compte d'effort d'excitation distribué . . . . .	66
4.4.4	Cas de conditions aux limites non-homogènes . . . . .	67
4.5	Récapitulatif des formules essentielles . . . . .	69
4.6	Exercices . . . . .	72
<b>5</b>	<b>Bifurcation et stabilité</b>	<b>89</b>
5.1	Le flambage d'Euler . . . . .	89
5.1.1	Position du problème et analyse en transformation infinitésimale . . . . .	89
5.1.2	Analyse en rotation finie . . . . .	91
5.1.3	Mise en évidence du flambage d'Euler . . . . .	92
5.1.4	Influence des imperfections . . . . .	95
5.1.5	Analyse par linéarisation autour de l'état précontraint . . . . .	97
5.1.6	Influence des conditions aux limites . . . . .	98
5.1.7	Stabilité de la configuration d'équilibre rectiligne . . . . .	100
5.2	Petite transformation à partir d'un état précontraint . . . . .	103
5.2.1	Position du problème et notations . . . . .	104
5.2.2	Transport des équations sur la configuration précontrainte . . . . .	105
5.2.3	Linéarisation autour de l'état précontraint . . . . .	107
5.3	Analyse et classification des instabilités . . . . .	110
5.3.1	Points critiques de courbe d'équilibre . . . . .	110
5.3.2	Rigidités géométrique et globale . . . . .	111
5.3.3	Perte de stabilité sur la courbe d'équilibre fondamentale . . . . .	114
5.4	Exemples d'instabilités de poutres élastiques . . . . .	117
5.4.1	Tube sous pression externe . . . . .	117
5.4.2	Étude d'un claquage . . . . .	121
5.4.3	L'arroseur arrosé . . . . .	124
5.5	Analyse de post-bifurcation à l'ordre supérieur . . . . .	127
5.5.1	Retour sur le flambage d'Euler . . . . .	128
5.5.2	Cas général : la méthode de Lyapunov-Schmidt . . . . .	132
5.6	Récapitulatif des formules essentielles . . . . .	134
5.7	Exercices . . . . .	136



<b>6</b>	<b>Poutres et solides 3D élastiques</b>	<b>163</b>
6.1	Élasticité tridimensionnelle linéarisée	164
6.2	Le principe de Saint-Venant	168
6.3	Problème et solution de Saint-Venant	173
6.3.1	Description du problème et notations	173
6.3.2	Obtention de la solution de Saint-Venant	174
6.3.3	Analyse des résultats	179
6.4	Comportement des poutres homogènes isotropes	188
6.5	Cas des poutres hétérogènes anisotropes	194
6.5.1	Position du problème	194
6.5.2	Problèmes d'élasticité à deux variables d'espace	197
6.5.3	Calcul du développement asymptotique	199
6.6	Hierarchisation des cinématiques de poutre	206
6.7	Récapitulatif des formules essentielles	208
6.8	Exercices	210
<b>A</b>	<b>Mouvement du solide rigide</b>	<b>215</b>
A.1	Cinématique du solide rigide	215
A.1.1	Mouvement rigidifiant en description lagrangienne	215
A.1.2	Mouvement rigidifiant en description eulerienne	216
A.1.3	Cohérence des points-de-vue lagrangien et eulerien	217
A.1.4	Distributeurs et torseurs : définition et propriétés	220
A.2	Modélisation des efforts	222
A.2.1	Puissance virtuelle des efforts extérieurs	222
A.2.2	Puissance virtuelle des quantités d'accélération	223
A.2.3	Équations du mouvement	223
A.2.4	Étude du tenseur d'inertie d'un solide rigide	224
<b>B</b>	<b>Calcul numérique de solutions approchées</b>	<b>227</b>
B.1	Introduction	227
B.2	Solutions approchées en statique linéarisée	228
B.2.1	Approximation : la méthode de Rayleigh-Ritz	228
B.2.2	Systématisation : la méthode des éléments finis	232
B.3	Solutions approchées en dynamique linéarisée	242
B.3.1	Méthode de semi-discrétisation	242
B.3.2	Méthode de discrétisation totale	247
B.4	Calcul approché des bifurcations	253
B.4.1	Méthode générale	254
B.4.2	Étude d'un exemple	256



# Introduction

Le point de départ de toute théorie mécanique est la description géométrique du système que l'on souhaite étudier. Pour un même solide réel, on connaît au moins deux descriptions géométriques possibles.

- Celle du solide rigide. Sa configuration actuelle se déduit de la configuration initiale par la simple donnée d'une translation et d'une rotation. L'espace vectoriel des vitesses virtuelles associé est celui des distributeurs. Les efforts extérieurs n'interviennent alors dans l'expression du principe des puissances virtuelles qu'à travers leur torseur, tandis qu'aucun effort intérieur n'y apparaît. L'équation du mouvement qui en résulte permet alors de déterminer complètement le mouvement lorsqu'elle est associée à des conditions initiales.
- Celle du milieu continu tridimensionnel classique. L'espace vectoriel des vitesses virtuelles est alors celui de tous les champs de vecteurs sur la configuration actuelle. La mise-en-œuvre du principe des puissances virtuelles conduit, sous certaines hypothèses, à la représentation des efforts intérieurs via le champ de tenseur de contrainte de Cauchy. L'équation du mouvement qui en résulte ne permet pas alors de déterminer le mouvement. Elle doit d'abord être complétée par des informations concernant la nature du matériau : c'est la loi de comportement.

Aucune de ces deux descriptions n'est meilleure, ou plus physique, que l'autre. Elles sont toutes les deux des schématisations du réel. La pertinence de l'une ou l'autre réside plutôt dans la finesse des prédictions que l'on souhaite obtenir. Dans le cas où on s'intéresse au mouvement global du solide sans accorder d'intérêt à sa déformation, on adoptera plutôt une description de type solide rigide, alors que lorsque ce sont les changements de forme qui constitueront la préoccupation, on aura recours à la description en terme de milieu continu classique.

Considérons, maintenant, l'exemple d'une poutre console (cf figure 1). Sous l'effet de la pesanteur et du poids qui lui est suspendu, on conçoit que cette poutre fléchisse. Intéressons-nous à ce phénomène. Dans la variation de forme du solide constitué par la poutre, on est alors amené à s'intéresser essentiellement à une partie de l'information : c'est le changement de géométrie d'une fibre longitudinale de la poutre. La partie transversale de la variation de forme (déformation de chacune des sections) devient d'un intérêt accessoire. Dans la pratique, on rencontre fréquemment des assemblages de solides élancés (une dimension caractéristique est beaucoup plus grande que les autres) comme les poutrelles métalliques qui constituent la tour Eiffel. Dans la conception de ces ouvrages, les seules informations relatives au changement de géométrie (sous l'effet d'un chargement) de chacun des solides élancés, qui font l'objet d'attention, sont les changements de géométrie d'une fibre longitudinale (raccourcissement, extension, flexion, etc. . .).

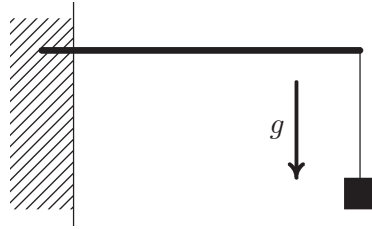


FIG. 1 – Poutre console.

Bien entendu, la modélisation en terme de milieu continu classique permettrait d'accéder à ce type d'information. De la même manière, la modélisation en terme de milieu continu classique d'un solide « faiblement déformable » permet toujours de déterminer son mouvement global. Cependant, dans tous les cas où l'on ne s'intéresse pas à la déformation, sa mise-en-œuvre est beaucoup plus coûteuse, et ce inutilement, que la modélisation en terme de solide rigide. On en vient alors à se demander si l'on ne pourrait pas construire une modélisation mécanique des solides élancés qui, en se focalisant sur les changements de géométrie longitudinaux, serait alors plus économique (d'un point de vue théorique et pratique) que la mécanique des milieux continus classiques.

Ce que l'on se propose de faire maintenant, c'est donc de reprendre les différentes étapes qui nous ont permis de construire la théorie générale des milieux continus classiques, pour essayer de construire une théorie simplifiée de la mécanique des solides élancés pouvant s'appliquer notamment à l'étude et au dimensionnement des ouvrages constitués de poutres et d'arcs.

# Chapitre 1

## Cinématique des poutres

### 1.1 Définition de la cinématique poutre

L'objectif poursuivi dans ce chapitre est la construction d'une description géométrique et d'une cinématique associée qui, tenant compte du caractère élancé de l'objet d'étude, se focalise sur les changements de géométrie « longitudinaux ». La première étape consiste, alors, à associer à l'objet d'étude une *ligne moyenne*, liée à la matière, dont les changements de géométrie mobiliseront l'attention (cf figure 1.1). Il est clair que ce choix de ligne moyenne comporte une part d'arbitraire et cet arbitraire fait partie du choix de la description géométrique de l'objet d'étude et donc du processus de modélisation que l'on opère sur lui.



FIG. 1.1 – Choix d'une ligne moyenne.

L'objet d'étude étant un solide dans l'espace tridimensionnel, à chaque point de cette ligne moyenne est attachée une *section droite*. Dire que l'on focalise l'attention sur les changements de géométrie « longitudinaux » signifie que l'on ne s'intéresse pas aux éventuelles variations de géométrie des sections droites. Or, lorsque l'on s'intéresse au mouvement global d'un solide tridimensionnel, à l'exclusion de ses déformations, on adopte volontiers une description en terme de solide rigide. Cette démarche nous conduit ici à décrire notre objet d'étude (le solide élancé) comme une ligne moyenne déformable à chaque point de laquelle serait attachée une section droite *rigide*.

### 1.2 Description lagrangienne de la cinématique

#### 1.2.1 Transformation en cinématique poutre

En description lagrangienne, se donner une modélisation poutre d'un solide choisi comme objet d'étude consistera donc à se donner la géométrie de la ligne moyenne dans une configu-

ration de référence, c'est-à-dire, concrètement une courbe régulière orientée  $\underline{X}(S)$ , paramétrée par son abscisse curviligne, dans l'espace affine euclidien tridimensionnel. On notera :

$$\underline{T}(S) = \frac{d}{dS}\underline{X}(S),$$

le vecteur unitaire tangent à la ligne moyenne. Cette configuration servira de référence pour évaluer aussi bien les variations de géométrie de la ligne moyenne que les variations d'orientation dans l'espace, des sections droites rigides qui lui sont attachées.

Une *transformation* de la poutre sera alors la donnée d'une position actuelle  $\underline{x}(S)$  de chaque point de la ligne moyenne ainsi que la rotation  $\underline{R}(S)$  de chaque section droite. Dans la suite, on gardera en tête les relations suivantes :

$$\forall S, \quad {}^t\underline{R}(S) \cdot \underline{R}(S) = \underline{\mathbb{1}}, \quad \det(\underline{R}(S)) = 1. \quad (1.1)$$

Dans toute la suite, les fonctions  $\underline{x}(S)$  et  $\underline{R}(S)$  seront supposées dérivables et même dé-

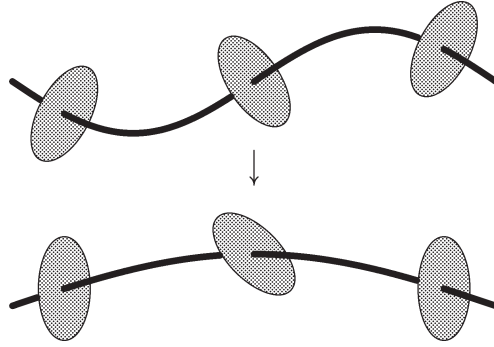


FIG. 1.2 – Transformation d'une poutre.

rivables autant de fois que cela sera nécessaire. En particulier, on disposera de l'abscisse curviligne  $s$  sur la transformée  $\underline{x}(S)$  de la ligne moyenne.

### 1.2.2 Déformation lagrangienne

Comme pour le milieu continu tridimensionnel classique, la transformation du tronçon de poutre de longueur infinitésimale  $dS$ , repéré par son abscisse curviligne  $S$  sur la configuration de référence, est donnée par le *gradient de la transformation* en  $S$ , c'est-à-dire concrètement ici par le couple :

$$\left( \frac{d}{dS}\underline{x}(S), \frac{d}{dS}\underline{R}(S) \right).$$

Ce gradient de la transformation admet la décomposition polaire suivante. On peut le réécrire comme étant le couple :

$$\mathbb{U}(S) = \left( \underline{R}^{-1}(S) \cdot \frac{d}{dS}\underline{x}(S), \underline{R}^{-1}(S) \cdot \frac{d}{dS}\underline{R}(S) \right),$$

suivi de (composé à gauche par) la rotation  $\underline{\underline{R}}(S)$ . Interprétons maintenant chacune des composantes de ce couple.

- Le vecteur

$$\frac{d}{dS}\underline{x}(S)$$

est un vecteur tangent à la déformée de la ligne moyenne en  $\underline{x}(S)$ . Il contient donc l'information locale relative au changement d'orientation de la ligne moyenne dans la transformation. Il contient également l'information relative à la variation de longueur locale de la ligne moyenne puisque sa norme n'est autre que  $ds/dS$ . Il en résulte que le premier vecteur de  $\mathbb{U}$  résume toute l'information concernant la *variation locale de la ligne moyenne dans le référentiel lié à la section droite au point de la poutre caractérisé par  $S$* .

- Pour la deuxième composante du couple, on adopte la notation :

$$\underline{\underline{W}} = {}^t\underline{\underline{R}} \cdot \frac{d}{dS}\underline{\underline{R}}.$$

Une simple dérivation par rapport à  $S$  dans la formule (1.1) montre que  $\underline{\underline{W}}$  est un tenseur antisymétrique. Le pseudo-vecteur<sup>1</sup>  $\underline{W}$  qui lui est associé par la formule :

$$\forall \underline{v}, \quad \underline{\underline{W}} \cdot \underline{v} = \underline{W} \wedge \underline{v},$$

s'interprète comme le vecteur décrivant la rotation infinitésimale de la section droite en  $S + dS$  par rapport à la section droite au point de la poutre caractérisé par  $S$ .

On déduit de l'analyse qui précède que le tronçon infinitésimal de poutre de longueur  $dS$  subit une transformation rigidifiante si et seulement si :

$${}^t\underline{\underline{R}}(S) \cdot \frac{d}{dS}\underline{x}(S) = \underline{T}(S) \quad \text{et} \quad \underline{W}(S) = \underline{0}.$$

On définit alors naturellement la déformation lagrangienne  $\mathbb{E}(S)$  par :

$$\mathbb{E}(S) = \left( {}^t\underline{\underline{R}}(S) \cdot \frac{d}{dS}\underline{x}(S) - \underline{T}(S), \underline{W}(S) \right). \quad (1.2)$$

Le couple  $\mathbb{E}(S)$  n'est autre que le pendant du tenseur de déformation de Green-Lagrange pour la cinématique poutre. On vérifie aisément que la transformation est rigidifiante si et seulement si la déformation lagrangienne est identiquement nulle. Dans la suite, on adoptera la notation :

$$\boxed{\underline{E}(S) = {}^t\underline{\underline{R}}(S) \cdot \frac{d}{dS}\underline{x}(S) - \underline{T}(S), \quad \mathbb{E}(S) = \left( \underline{E}(S), \underline{W}(S) \right).}$$

On remarquera que, si  $\underline{E}$  est une quantité adimensionnelle, il n'en est pas de même pour  $\underline{W}$  qui a la dimension de *l'inverse d'une longueur*.

<sup>1</sup>un pseudo-vecteur se distingue d'un vecteur en ce sens qu'il dépend de l'orientation choisie pour l'espace vectoriel : il doit être transformé en son opposé lorsque l'on change l'orientation de l'espace.

### 1.3 Cinématique eulerienne et champs de distributeur sur une courbe

#### 1.3.1 Champ des vitesses en cinématique poutre

La description eulerienne de la cinématique consiste en la donnée du champ des vitesses sur la configuration actuelle. Celle-ci sera naturellement paramétrée par son abscisse curviligne  $s$ . Il est clair que la cinématique eulerienne cohérente avec la cinématique lagrangienne décrite dans la section précédente est la donnée en chaque point  $\underline{x}(s)$  de la configuration actuelle de la ligne moyenne de sa vitesse  $\underline{U}(s)$  et du vecteur vitesse de rotation instantanée  $\underline{\Omega}(s)$  de la section droite qui lui est attachée. Le champ des vitesses en cinématique eulerienne s'écrit donc :

$$\left\{ \underline{U}(s), \underline{\Omega}(s) \right\}_{\underline{x}(s)},$$

où  $\{ \underline{U}(s), \underline{\Omega}(s) \}$  n'est autre que le couple des éléments de réduction en  $\underline{x}(s)$  du distributeur des vitesses dans le mouvement rigidifiant<sup>2</sup> de la section droite attachée au point  $\underline{x}(s)$  de la poutre. En d'autres termes, le champ des vitesses en cinématique eulerienne d'une poutre n'est autre qu'un *champ de distributeur sur la configuration actuelle de la ligne moyenne*.

#### 1.3.2 Dérivation d'un champ de distributeur le long d'une courbe

Considérons le champ de distributeur  $\{ \underline{U}(s), \underline{\Omega}(s) \}_{\underline{x}(s)}$ , supposé régulier, sur la configuration actuelle. L'ensemble des distributeurs formant un espace vectoriel de dimension 6, ce champ de distributeur s'identifie donc à une application d'un intervalle réel dans un espace vectoriel de dimension finie. La dérivée de cette application est donc elle aussi un champ de distributeur sur la courbe. On se propose ici d'exprimer les éléments de réduction en  $\underline{x}(s)$  du champ de distributeur :

$$\frac{d}{ds} \left\{ \underline{U}(s), \underline{\Omega}(s) \right\}_{\underline{x}(s)},$$

en fonction des dérivées des éléments de réduction du distributeur que l'on s'est donné. L'identification des distributeurs à un espace vectoriel de dimension 6 passe par l'expression des éléments de réduction en un même point de référence (pour calculer la différence de deux distributeurs, il faut commencer par disposer des éléments de réduction au même point). Les éléments de réduction en  $\underline{x}(s)$  du distributeur  $\{ \underline{U}(s'), \underline{\Omega}(s') \}_{\underline{x}(s')}$  sont :

$$\underline{U}(s') + \underline{\Omega}(s') \wedge [\underline{x}(s) - \underline{x}(s')] \quad \text{et} \quad \underline{\Omega}(s').$$

Prenant la dérivée par rapport à  $s'$  et regardant sa valeur en  $s$ , on obtient alors :

$$\boxed{\frac{d}{ds} \left\{ \underline{U}(s), \underline{\Omega}(s) \right\}_{\underline{x}(s)} = \left\{ \frac{d}{ds} \underline{U}(s) + \underline{t}(s) \wedge \underline{\Omega}(s), \frac{d}{ds} \underline{\Omega}(s) \right\}_{\underline{x}(s)}}, \quad (1.3)$$

où

$$\underline{t}(s) = \frac{d}{ds} \underline{x}(s)$$

désigne le vecteur unitaire tangent à la courbe.

<sup>2</sup>cf annexe A pour la définition de distributeur, si nécessaire.



### 1.3.3 Caractérisation des champs de vitesse rigidifiants

Un champ de vitesse rigidifiant pour l'ensemble de la poutre est d'abord un champ de vitesse rigidifiant pour la ligne moyenne :

$$\underline{U}(s) = \underline{V} + \underline{\Omega} \wedge \underline{x}(s),$$

qui doit être complété par le champ des vitesses de rotation de chacune des sections droites qui ne peut être, pour chacune d'entre elle dans la circonstance en jeu, que la vitesse de rotation de l'ensemble. En d'autres termes, dans la cinématique poutre, un champ de vitesse rigidifiant ne peut être qu'un champ de distributeur du type :

$$\left\{ \underline{V} + \underline{\Omega} \wedge \underline{x}(s), \underline{\Omega} \right\}_{\underline{x}(s)},$$

où  $\underline{V}$  et  $\underline{\Omega}$  désignent deux vecteurs quelconques (constants).

Un coup d'œil à la formule (1.3) permet alors de constater qu'un *champ de distributeur est rigidifiant si et seulement s'il est constant (sa dérivée est identiquement nulle)*.

## 1.4 Transformation infinitésimale et déformation linéarisée

Le déplacement  $\bar{\xi}(S)$  de la ligne moyenne est :

$$\bar{\xi}(S) = \underline{x}(S) - \underline{X}(S).$$

Le champ de déplacement en cinématique des poutres sera évidemment défini par le couple :

$$\left( \bar{\xi}(S), \underline{R}(S) - \underline{\mathbb{1}} \right).$$

L'hypothèse de la transformation infinitésimale en cinématique des poutres s'écrit naturellement :

$$\left| \frac{d\bar{\xi}}{dS} \right| \ll 1, \quad \text{et} \quad \left| \underline{R} - \underline{\mathbb{1}} \right| \ll 1,$$

où l'on notera bien que les deux quantités en jeu sont adimensionnelles. L'hypothèse de la transformation infinitésimale a pour but de permettre la linéarisation systématique de toutes les grandeurs. Ici, cela commence par le déplacement lui-même. Si  $\underline{R}$  désigne une rotation quelconque, on a :

$$\underline{R} - \underline{\mathbb{1}} = \underline{\theta} + o\left(\left| \underline{R} - \underline{\mathbb{1}} \right| \right),$$

où  $\underline{\theta}$  est un tenseur antisymétrique<sup>3</sup>. Ainsi, le déplacement s'écrit :

$$\left( \bar{\xi}(S), \underline{\theta}(S) \right) + o\left(\left| \underline{R} - \underline{\mathbb{1}} \right| \right).$$

---

<sup>3</sup>Le contenu précis de cette assertion est le suivant. Considérons une rotation  $\underline{R}(\eta)$  dépendant d'un paramètre réel  $\eta$ . On suppose  $\underline{R}(0) = \underline{\mathbb{1}}$  et que la fonction  $\underline{R}(\eta)$  est suffisamment régulière pour que l'on puisse écrire le développement limité :

$$\underline{R}(\eta) = \underline{\mathbb{1}} + \eta \frac{d\underline{R}}{d\eta}(0) + o(\eta).$$

Dérivant alors l'identité  ${}^t\underline{R} \cdot \underline{R} \equiv \underline{\mathbb{1}}$  par rapport à  $\eta$  et examinant le résultat en  $\eta = 0$ , on voit que le terme d'ordre 1 du développement limité est un tenseur antisymétrique. Ainsi, une rotation infinitésimale se représente par un tenseur antisymétrique.

Introduisant le pseudo-vecteur  $\underline{\theta}$  associé au tenseur antisymétrique  $\underline{\theta}$ , on voit ainsi apparaître, sous l'hypothèse de la transformation infinitésimale, le *champ de distributeur des déplacements linéarisés* :

$$\left\{ \bar{\underline{\xi}}(S), \underline{\theta}(S) \right\}_{\underline{x}(S)}.$$

Linéarisons maintenant la déformation lagrangienne :

$$\mathbb{E} = \left\{ \underline{E}, \underline{W} \right\} = \left\{ ({}^t\underline{R} - \underline{\mathbb{1}}) \cdot \underline{T} + \underline{\underline{R}} \cdot \frac{d\bar{\underline{\xi}}}{dS}, \underline{\underline{R}} \cdot \frac{d\underline{\theta}}{dS} \right\},$$

où l'on a adopté la convention d'écriture qui consiste à identifier systématiquement un tenseur antisymétrique et son pseudo-vecteur associé. Il vient immédiatement :

$$\mathbb{E} = \left\{ \frac{d\bar{\underline{\xi}}}{dS} + \underline{T} \wedge \underline{\theta}, \frac{d\underline{\theta}}{dS} \right\} + o\left( \left| \frac{d\bar{\underline{\xi}}}{dS} \right| + |\underline{\underline{R}} - \underline{\mathbb{1}}| \right).$$

Un coup d'œil à la formule (1.3) permet alors de constater qu'en cinématique des poutres, la *déformation linéarisée* s'identifie à la dérivée

$$\frac{d}{dS} \left\{ \bar{\underline{\xi}}(S), \underline{\theta}(S) \right\}_{\underline{x}(S)}$$

du *champ de distributeur des déplacements linéarisés*. Une conséquence immédiate de ce fait, est qu'à la différence du milieu continu tridimensionnel classique, il n'existe pas de condition de compatibilité géométrique pour qu'un champ de distributeur dérive d'un champ de distributeur de déplacement linéarisé. Ce fait s'étend d'ailleurs à la déformation lagrangienne  $\mathbb{E}(S)$  elle-même.

## 1.5 Taux de déformation lagrangien et eulerien

Dans cette partie, on considère le mouvement d'une poutre paramétré par le temps  $t$ . On définit le *taux de déformation eulerien* (qui est la partie symétrique du gradient du champ des vitesses en cinématique du milieu continu tridimensionnel classique) comme étant la dérivée par rapport à l'abscisse curviligne  $s$  sur la configuration actuelle du champ de distributeur des vitesses :

$$\frac{d}{ds} \left\{ \underline{U}(s), \underline{\Omega}(s) \right\}_{\underline{x}(s)}.$$

Cette définition tire sa cohérence de l'observation faite à la section 1.3.3, que le champ des vitesses à l'instant  $t$  est rigidifiant si et seulement si sa dérivée par rapport à  $s$  est identiquement nulle. On remarquera que, comme dans la cinématique du milieu continu tridimensionnel classique, l'opérateur qui donne le taux de déformation eulerien en fonction du champ des vitesses est identique à l'opérateur qui donne la déformation *linéarisée* en fonction du champ de déplacement.

Comme en cinématique tridimensionnelle classique, on définit le *taux de déformation lagrangien* comme étant la dérivée par rapport au temps de la déformation lagrangienne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E}(t, S).$$

Dans la suite du cours, on aura besoin de l'expression du taux de déformation eulerien en fonction du taux de déformation lagrangien pour des points de la ligne moyenne homologues dans la transformation. On se propose de se débarrasser de ce petit point technique dès maintenant. Les vitesses  $\underline{U}$  et  $\underline{\Omega}$  sont reliées à  $\underline{x}$  et  $\underline{R}$  par les relations suivantes (la deuxième n'étant autre que la formule (A.10) de l'annexe A) :

$$\underline{U} = \frac{\partial \underline{x}}{\partial t}, \quad \text{et} \quad \underline{\Omega} = \frac{\partial \underline{R}}{\partial t} \cdot {}^t \underline{R}.$$

Prenant en compte ces relations, la dérivée partielle par rapport au temps  $t$  de la première composante de  $\mathbb{E}$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( {}^t \underline{R} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial S} \right) &= {}^t \underline{R} \cdot \frac{\partial \underline{U}}{\partial S} + \frac{\partial {}^t \underline{R}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial S}, \\ &= {}^t \underline{R} \cdot \frac{\partial \underline{U}}{\partial S} - {}^t \underline{R} \cdot \underline{\Omega} \cdot \frac{\partial \underline{x}}{\partial S}, \\ &= \frac{\partial s}{\partial S} {}^t \underline{R} \cdot \left( \frac{\partial \underline{U}}{\partial s} + \underline{t} \wedge \underline{\Omega} \right). \end{aligned}$$

Le calcul est similaire pour la dérivée par rapport au temps de la deuxième composante de  $\mathbb{E}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left( {}^t \underline{R} \cdot \frac{\partial \underline{R}}{\partial S} \right) &= - {}^t \underline{R} \cdot \underline{\Omega} \cdot \frac{\partial \underline{R}}{\partial S} + {}^t \underline{R} \cdot \frac{\partial}{\partial S} (\underline{\Omega} \cdot \underline{R}), \\ &= {}^t \underline{R} \cdot \frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial S} \cdot \underline{R}. \end{aligned}$$

Le pseudo-vecteur associé au tenseur antisymétrique  ${}^t \underline{R} \cdot \partial \underline{\Omega} / \partial S \cdot \underline{R}$  n'étant autre que  ${}^t \underline{R} \cdot \partial \underline{\Omega} / \partial S$ , on obtient le résultat suivant :

$$\frac{\partial \underline{W}}{\partial t} = {}^t \underline{R} \cdot \frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial S} = \frac{\partial s}{\partial S} {}^t \underline{R} \cdot \frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial s}.$$

En rassemblant, tenant compte de la formule (1.3), on constate que la relation qui lie les taux de déformation lagrangien et eulerien est étonnamment simple :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E} = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}, \frac{\partial}{\partial t} \underline{W} \right\} = \frac{\partial s}{\partial S} {}^t \underline{R} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \{ \underline{U}, \underline{\Omega} \}_{\underline{x}(s)}}.} \quad (1.4)$$

## 1.6 Récapitulatif des formules essentielles

- Description lagrangienne du mouvement  $(\underline{x}(S), \underline{R}(S))$ .
- Définition de la déformation lagrangienne  $\mathbb{E} = (\underline{E}, \underline{W})$  :

$$\underline{E} = {}^t\underline{R} \cdot \frac{d\underline{x}}{dS} - \underline{T}, \quad \underline{W} \leftrightarrow \underline{\underline{W}} = {}^t\underline{R} \cdot \frac{d\underline{R}}{dS}.$$

- Description eulerienne du mouvement  $\{\underline{U}(s), \underline{\Omega}(s)\}_{\underline{x}(s)}$ .
- Définition du taux de déformation eulerien :

$$\frac{d}{ds} \{\underline{U}(s), \underline{\Omega}(s)\}_{\underline{x}(s)}.$$

- Passage de la description lagrangienne à la description eulerienne :

$$\underline{U} = \dot{\underline{x}}, \quad \underline{\Omega} \leftrightarrow \underline{\underline{\Omega}} = \dot{\underline{R}} \cdot {}^t\underline{R}.$$

- Relation entre taux de déformation lagrangien et eulerien :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E} = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}, \frac{\partial}{\partial t} \underline{W} \right\} = \frac{\partial s}{\partial S} {}^t\underline{R} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \{\underline{U}, \underline{\Omega}\}_{\underline{x}(s)}.$$

- Hypothèse de la transformation infinitésimale :

$$\left| \frac{d\underline{\xi}}{dS} \right| \ll 1, \quad \text{et} \quad |\underline{R} - \underline{\mathbb{1}}| \ll 1.$$

- Distributeur de déplacement linéarisé :  $\{\underline{\bar{\xi}}, \underline{\theta}\}_{\underline{x}(S)}$ .
- Déformation linéarisée :

$$\frac{d}{dS} \{\underline{\bar{\xi}}, \underline{\theta}\}_{\underline{x}(S)} = \left\{ \frac{d\underline{\bar{\xi}}}{dS} + \underline{T} \wedge \underline{\theta}, \frac{d\underline{\theta}}{dS} \right\}_{\underline{x}(S)}.$$

## Chapitre 2

# Modélisation des efforts

L'objectif de ce chapitre est l'application du principe fondamental de la dynamique classique au contexte défini par la cinématique des poutres étudiée au chapitre 1, en vue de l'obtention de l'équation du mouvement. Cette tâche passe nécessairement par l'étape de la modélisation des efforts.

L'utilisation de la forme dualisée du principe fondamental de la dynamique, i.e. le principe des puissances virtuelles, permet de réaliser simultanément la construction des efforts (extérieurs et intérieurs) et l'obtention de l'équation du mouvement. Sa mise-en-œuvre présente, en outre, l'avantage d'assurer par construction la cohérence de la représentation des efforts (notamment intérieurs) avec la cinématique adoptée.

### 2.1 Le principe des puissances virtuelles

L'étude de la cinématique d'une théorie quelconque de milieu continu permet d'associer à toute configuration l'ensemble de toutes les vitesses de variation de cette configuration. Cet ensemble de vitesse a toujours une structure d'espace vectoriel. On l'appelle espace vectoriel des vitesses virtuelles associé à la description géométrique adoptée. On peut citer les exemples suivants.

- Pour le solide rigide (cf annexe A), l'espace vectoriel des vitesses virtuelles est l'espace de tous les distributeurs.
- Pour le milieu continu tridimensionnel classique, l'espace vectoriel des vitesses virtuelles est l'espace de tous les champs de vecteurs (réguliers) sur l'ouvert occupé par la configuration actuelle.
- Pour les poutres naturelles, il ressort de la section 1.3 que l'espace des vitesses virtuelles cohérent avec la cinématique poutre ne peut être que l'espace vectoriel des champs de distributeur (réguliers) sur la configuration actuelle de la ligne moyenne.

Le principe des puissances virtuelles, qui s'écrit sur la *configuration actuelle*, postule l'existence de trois formes linéaires  $\mathcal{A}(\hat{U})$  (dite « puissance virtuelle des quantités d'accélération »),  $\mathcal{P}_e(\hat{U})$  (dite « puissance virtuelle des efforts extérieurs ») et  $\mathcal{P}_i(\hat{U})$  (dite « puissance virtuelle des efforts intérieurs ») sur l'espace des vitesses virtuelles  $\hat{U}$  cohérent avec la cinématique adoptée. Ces trois formes linéaires sont assujetties (dans tout référentiel dit galiléen) à satisfaire les deux axiomes suivants (qui constituent une expression du principe

fondamental de la dynamique) :

- $\forall \hat{U}$ ,  $\mathcal{P}_e(\hat{U}) + \mathcal{P}_i(\hat{U}) = \mathcal{A}(\hat{U})$ ,
- $\forall \hat{U}$  rigidifiant,  $\mathcal{P}_i(\hat{U}) = 0$ ,

et ce, quel que soit le système (ou sous-système) considéré. Le choix de l'expression de  $\mathcal{A}(\hat{U})$  est dicté par la cinématique adoptée, tandis que les choix de  $\mathcal{P}_e(\hat{U})$  et  $\mathcal{P}_i(\hat{U})$  constituent la modélisation des efforts extérieurs et intérieurs.

L'intérêt de cette forme axiomatique dualisée est de mettre en évidence le fait que les efforts sont par nature des cofacteurs de vitesses. La dualité fournit alors un guide commode pour la modélisation des efforts, compte-tenu de l'adoption préalable d'une description géométrique et de la cinématique qui lui est associée. On s'assure ainsi que la modélisation des efforts n'est ni trop fine ni trop grossière, compte-tenu du choix fait pour la description géométrique.

## 2.2 Puissance virtuelle des quantités d'accélération

On notera  $\mathcal{S}(s)$  la section rigide attachée au point de la configuration actuelle de la ligne moyenne repéré par le vecteur position  $\underline{x}(s)$ , et  $l$  la longueur actuelle de la ligne moyenne. On décomposera alors le vecteur position  $\underline{Om}$  du point courant dans le solide tridimensionnel sous la forme :

$$\underline{Om} = \underline{x}(s) + \underline{x}_\perp,$$

où  $\underline{x}(s)$  repère le point de la ligne moyenne auquel est attachée la section  $\mathcal{S}(s)$  contenant le point courant  $m$  et  $\underline{x}_\perp$  le vecteur position<sup>1</sup> dans la section  $\mathcal{S}(s)$ , c'est-à-dire le vecteur joignant les points repérés par  $\underline{x}(s)$  et  $\underline{Om}$ . L'information concernant la distribution de masse n'est accessible, *a priori*, que sous la forme de la donnée de la masse volumique  $\rho$  dans la configuration actuelle. La cinématique adoptée de mouvements rigides de sections attachées à une ligne moyenne déformable conduit alors à écrire :

$$\mathcal{A}(\underline{\hat{U}}, \underline{\hat{\Omega}}) = \int_0^l \int_{\mathcal{S}(s)} \rho \frac{d}{dt} \left[ \underline{U}(s) + \underline{\Omega}(s) \wedge \underline{x}_\perp \right] \cdot \left[ \underline{\hat{U}}(s) + \underline{\hat{\Omega}}(s) \wedge \underline{x}_\perp \right].$$

Cette expression se simplifie notablement sous l'hypothèse que *la ligne moyenne occupe le lieu des centres d'inertie des sections droites* :

$$\forall s, \quad \int_{\mathcal{S}(s)} \rho \underline{x}_\perp = \underline{0}.$$

Les sections droites ayant un mouvement rigide, on remarquera que cette propriété se conserve au cours du temps. En d'autres termes, dans l'étude lagrangienne du mouvement, il suffit d'avoir choisi la ligne moyenne dans la configuration initiale, prise comme référence, suivant le lieu des centres d'inertie des sections droites pour que cette propriété reste constamment acquise. Compte-tenu de la simplification qu'elle apporte dans l'expression de la forme linéaire  $\mathcal{A}$ , ce choix sera systématiquement fait dans l'analyse de la dynamique

<sup>1</sup>on prendra cependant garde à ne pas se laisser abuser par la notation :  $\underline{\dot{t}} \cdot \underline{x}_\perp \neq 0$ , en général.

des poutres. Par contre, en statique, le choix de la ligne moyenne reste libre. On dispose alors de l'expression simplifiée suivante pour  $\mathcal{A}$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\Omega}}) = \int_0^l \int_{\mathcal{S}(s)} \rho \hat{\underline{U}}(s) \cdot \hat{\underline{U}}(s) + \rho \left[ \hat{\underline{\Omega}}(s) \wedge \underline{x}_\perp \right] \cdot \left[ \hat{\underline{\Omega}}(s) \wedge \underline{x}_\perp \right] \\ + \rho \left[ \underline{\Omega}(s) \wedge (\underline{\Omega}(s) \wedge \underline{x}_\perp) \right] \cdot \left[ \hat{\underline{\Omega}}(s) \wedge \underline{x}_\perp \right]. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Cette expression fait intervenir des intégrales sur la section, indépendantes des vitesses réelles et virtuelles. On va maintenant leur attribuer une notation et les interpréter. La première intégrale qui apparaît est :

$$\int_{\mathcal{S}(s)} \rho \stackrel{\text{déf}}{=} \bar{\rho}(s)$$

qui s'interprète, de toute évidence, comme une densité linéique sur la configuration actuelle. Le deuxième terme de l'expression (2.1) est une expression bilinéaire symétrique en  $(\hat{\underline{\Omega}}(s), \hat{\underline{\Omega}}(s))$  qui définit donc un tenseur  $\underline{i}^\rho(s)$ , d'ordre 2, *symétrique*, en chaque point de la configuration actuelle de la ligne moyenne. L'identité :

$$\int_{\mathcal{S}(s)} \rho \left[ \hat{\underline{\Omega}}(s) \wedge \underline{x}_\perp \right] \cdot \left[ \hat{\underline{\Omega}}(s) \wedge \underline{x}_\perp \right] = \hat{\underline{\Omega}}(s) \cdot \underbrace{\left\{ \int_{\mathcal{S}(s)} \rho \left[ |\underline{x}_\perp|^2 \underline{\mathbb{1}} - \rho \underline{x}_\perp \otimes \underline{x}_\perp \right] \right\}}_{\underline{i}^\rho(s)} \cdot \hat{\underline{\Omega}}(s),$$

permet de l'exprimer. Le tenseur  $\underline{i}^\rho(s)$  est le tenseur d'inertie<sup>2</sup> de la section  $\mathcal{S}(s)$ . Il reste maintenant à exprimer le dernier terme de l'expression 2.1. On calcule facilement :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}(s)} \rho \left[ \underline{\Omega}(s) \wedge (\underline{\Omega}(s) \wedge \underline{x}_\perp) \right] \cdot \left[ \hat{\underline{\Omega}}(s) \wedge \underline{x}_\perp \right] &= \int_{\mathcal{S}(s)} \rho \left\{ \underline{x}_\perp \wedge \left[ \underline{\Omega}(s) \wedge (\underline{\Omega}(s) \wedge \underline{x}_\perp) \right] \right\} \cdot \hat{\underline{\Omega}}(s), \\ &= \left\{ \underline{\Omega}(s) \wedge \int_{\mathcal{S}(s)} \rho \left[ \underline{x}_\perp \wedge (\underline{\Omega}(s) \wedge \underline{x}_\perp) \right] \right\} \cdot \hat{\underline{\Omega}}(s), \\ &= \left\{ \underline{\Omega}(s) \wedge \left[ \underline{i}^\rho(s) \cdot \underline{\Omega}(s) \right] \right\} \cdot \hat{\underline{\Omega}}(s). \end{aligned}$$

En rassemblant, on aboutit finalement à l'expression suivante pour la puissance virtuelle des quantités d'accélération :

$$\boxed{\mathcal{A}(\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\Omega}}) = \int_0^l \bar{\rho} \hat{\underline{U}} \cdot \hat{\underline{U}} + \left[ \hat{\underline{\Omega}} \cdot \underline{i}^\rho + \underline{\Omega} \wedge (\underline{i}^\rho \cdot \underline{\Omega}) \right] \cdot \hat{\underline{\Omega}}.}$$

## 2.3 Puissance virtuelle des efforts extérieurs

Les efforts extérieurs vont être fournis en pratique sous la forme d'une densité *volumique*  $\underline{F}^{\text{vol}}$  de force (cas des forces de gravité) et d'une densité surfacique  $\underline{F}^{\text{surf}}$  au contour.

<sup>2</sup>on trouvera l'origine de la terminologie de « tenseur d'inertie » en se reportant à l'annexe A.

L'expression de la puissance virtuelle des efforts extérieurs s'écrit alors naturellement :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_e(\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\Omega}}) &= \int_0^l \int_{\mathcal{S}(s)} \underline{F}^{\text{vol}} \cdot [\hat{\underline{U}}(s) + \hat{\underline{\Omega}}(s) \wedge \underline{x}_\perp] \\ &\quad + \int_{\mathcal{S}(0)} \underline{F}^{\text{surf}} \cdot [\hat{\underline{U}}(0) + \hat{\underline{\Omega}}(0) \wedge \underline{x}_\perp] \\ &\quad + \int_0^l \int_{\partial\mathcal{S}(s)} \underline{F}^{\text{surf}} \cdot [\hat{\underline{U}}(s) + \hat{\underline{\Omega}}(s) \wedge \underline{x}_\perp] \\ &\quad + \int_{\mathcal{S}(l)} \underline{F}^{\text{surf}} \cdot [\hat{\underline{U}}(l) + \hat{\underline{\Omega}}(l) \wedge \underline{x}_\perp]. \end{aligned}$$

On est alors naturellement amené à définir :

- la résultante  $\underline{\overline{F}}(s)$  des efforts extérieurs s'exerçant sur la section  $\mathcal{S}(s)$  par :

$$\underline{\overline{F}}(s) = \int_{\mathcal{S}(s)} \underline{F}^{\text{vol}} + \int_{\partial\mathcal{S}(s)} \underline{F}^{\text{surf}},$$

- le moment  $\underline{\overline{C}}(s)$  en  $\underline{x}(s)$  des efforts extérieurs s'exerçant sur la section  $\mathcal{S}(s)$  par :

$$\underline{\overline{C}}(s) = \int_{\mathcal{S}(s)} \underline{x}_\perp \wedge \underline{F}^{\text{vol}} + \int_{\partial\mathcal{S}(s)} \underline{x}_\perp \wedge \underline{F}^{\text{surf}},$$

- la résultante  $\underline{F}_0$  (respectivement  $\underline{F}_l$ ) des efforts extérieurs s'exerçant sur la section  $\mathcal{S}(0)$  (respectivement  $\mathcal{S}(l)$ ) par :

$$\underline{F}_{0,l} = \int_{\mathcal{S}(0,l)} \underline{F}^{\text{surf}},$$

- le moment  $\underline{C}_0$  (respectivement  $\underline{C}_l$ ) en  $\underline{x}(0)$  (respectivement  $\underline{x}(l)$ ) des efforts extérieurs s'exerçant sur la section  $\mathcal{S}(0)$  (respectivement  $\mathcal{S}(l)$ ) par :

$$\underline{C}_{0,l} = \int_{\mathcal{S}(0,l)} \underline{x}_\perp \wedge \underline{F}^{\text{surf}}.$$

Le couple  $[\underline{\overline{F}}(s), \underline{\overline{C}}(s)]$  apparaît comme les éléments de réduction au point courant  $\underline{x}(s)$  d'un champ de torseur<sup>3</sup> sur la configuration actuelle de la ligne moyenne. Ce champ de torseur est la *distribution linéique de torseur des efforts extérieurs*. De même,  $[\underline{F}_0, \underline{C}_0]_{\underline{x}(0)}$  et  $[\underline{F}_l, \underline{C}_l]_{\underline{x}(l)}$  définissent des torseurs concentrés appliqués aux extrémités. On peut résumer l'analyse qui vient d'être faite en disant que le choix de cinématique adopté implique que l'on n'a besoin de connaître les efforts extérieurs exercés aux extrémités de la poutre qu'au travers de leur torseur. Cette conclusion (et sa contrepartie sur les efforts volumiques) est agréablement synthétisée dans l'expression finale de la puissance virtuelle des efforts extérieurs :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_e(\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\Omega}}) &= \left( \underline{F}_0 \cdot \hat{\underline{U}}(0) + \underline{C}_0 \cdot \hat{\underline{\Omega}}(0) \right) + \int_0^l \left( \underline{\overline{F}}(s) \cdot \hat{\underline{U}}(s) + \underline{\overline{C}}(s) \cdot \hat{\underline{\Omega}}(s) \right) ds \\ &\quad + \left( \underline{F}_l \cdot \hat{\underline{U}}(l) + \underline{C}_l \cdot \hat{\underline{\Omega}}(l) \right), \end{aligned}$$

<sup>3</sup>pour la définition du torseur d'un système de force, ainsi que pour les motivations de cette définition, le lecteur pourra se reporter, si nécessaire, à l'annexe A.



que l'on peut réécrire sous la forme concise :

$$\mathcal{P}_e(\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\Omega}}) = [\underline{F}_0, \underline{C}_0] \cdot \{\hat{\underline{U}}(0), \hat{\underline{\Omega}}(0)\} + \int_0^l [\underline{F}, \underline{C}]_{\underline{x}} \cdot \{\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\Omega}}\}_{\underline{x}} + [\underline{F}_l, \underline{C}_l] \cdot \{\hat{\underline{U}}(l), \hat{\underline{\Omega}}(l)\},$$

où le  $\cdot$  ne désigne rien d'autre que le produit de dualité entre espaces vectoriels des distributeurs et des torseurs.

## 2.4 Puissance virtuelle des efforts intérieurs

La puissance virtuelle des efforts intérieurs doit être nulle dans tout mouvement virtuel rigidifiant. Or, on sait (cf section 1.3.3) que les champs de vitesse virtuelle rigidifiants sont les champs de distributeur constants, ou, ce qui revient au même, dont le taux de déformation (eulerien) est nul. Comme pour le milieu continu tridimensionnel classique, on est donc amené à postuler une puissance virtuelle des efforts intérieurs qui soit une forme linéaire locale en le taux de déformation eulerien du champ des vitesses virtuelles. Le taux de déformation eulerien local étant un distributeur, et toute forme linéaire sur l'espace des champs de distributeur s'identifiant à un torseur, on obtient une expression du type :

$$\boxed{\mathcal{P}_i(\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\Omega}}) = - \int_0^l [\underline{R}(s), \underline{M}(s)]_{\underline{x}(s)} \cdot \frac{d}{ds} \{\hat{\underline{U}}(s), \hat{\underline{\Omega}}(s)\}_{\underline{x}(s)} ds,}$$

où  $[\underline{R}(s), \underline{M}(s)]_{\underline{x}(s)}$  désigne un champ de torseur qui constitue la représentation des efforts intérieurs dans la poutre. Sa signification physique sera développée dans la section suivante. Le champ de torseur  $[\underline{R}(s), \underline{M}(s)]_{\underline{x}(s)}$  constitue le pendant en théorie des poutres du champ de contrainte de Cauchy pour le milieu continu tridimensionnel classique et, pour cette raison, est souvent baptisé « contrainte généralisée ». Si cela est agréable, on pourra utiliser les expressions développées de la puissance virtuelle des efforts intérieurs, où l'utilisation de la formule (1.3) donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i(\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\Omega}}) &= - \int_0^l [\underline{R}(s), \underline{M}(s)]_{\underline{x}(s)} \cdot \frac{d}{ds} \{\hat{\underline{U}}(s), \hat{\underline{\Omega}}(s)\}_{\underline{x}(s)} ds, \\ &= - \int_0^l \left\{ \underline{R}(s) \cdot \left[ \frac{d}{ds} \hat{\underline{U}}(s) + \underline{t}(s) \wedge \hat{\underline{\Omega}}(s) \right] + \underline{M}(s) \cdot \frac{d}{ds} \hat{\underline{\Omega}}(s) \right\} ds, \\ &= - \int_0^l \left\{ \underline{R}(s) \cdot \frac{d}{ds} \hat{\underline{U}}(s) + [\underline{R}(s) \wedge \underline{t}(s)] \cdot \hat{\underline{\Omega}}(s) + \underline{M}(s) \cdot \frac{d}{ds} \hat{\underline{\Omega}}(s) \right\} ds. \end{aligned}$$

## 2.5 Équation du mouvement

Pour obtenir l'équation du mouvement, il suffit maintenant d'écrire le principe des puissances virtuelles :

$$\forall \{\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\Omega}}\}, \quad \mathcal{P}_e(\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\Omega}}) + \mathcal{P}_i(\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\Omega}}) = \mathcal{A}(\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\Omega}}),$$

en rassemblant les résultats obtenus dans les sections 2.2, 2.3 et 2.4. Il vient immédiatement :

$$\begin{aligned} & [\underline{F}_0, \underline{C}_0] \cdot \{\hat{\underline{U}}(0), \hat{\underline{\Omega}}(0)\} + \int_0^l [\underline{F}, \underline{C}]_{\underline{x}} \cdot \{\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\Omega}}\}_{\underline{x}} ds + [\underline{F}_l, \underline{C}_l] \cdot \{\hat{\underline{U}}(l), \hat{\underline{\Omega}}(l)\} \\ & \quad - \int_0^l [\underline{R}, \underline{M}]_{\underline{x}} \cdot \frac{d}{ds} \{\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\Omega}}\}_{\underline{x}} ds \\ & \quad = \int_0^l \bar{\rho} \dot{\underline{U}} \cdot \hat{\underline{U}} + [\dot{\underline{\Omega}} \cdot \underline{i}^\rho + \underline{\Omega} \wedge (\underline{i}^\rho \cdot \underline{\Omega})] \cdot \hat{\underline{\Omega}}, \end{aligned}$$

pour tout champ de distributeur de vitesse virtuelle  $\{\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\Omega}}\}$ . Pour en extraire la forme locale de l'équation du mouvement, on est amené à faire une intégration par parties sur l'intégrale issue de la puissance virtuelle des efforts intérieurs. Or, on a immédiatement :

$$\begin{aligned} & \int_0^l [\underline{R}(s), \underline{M}(s)]_{\underline{x}(s)} \cdot \frac{d}{ds} \{\hat{\underline{U}}(s), \hat{\underline{\Omega}}(s)\}_{\underline{x}(s)} ds \\ & \quad = [\underline{R}(l), \underline{M}(l)] \cdot \{\hat{\underline{U}}(l), \hat{\underline{\Omega}}(l)\} - [\underline{R}(0), \underline{M}(0)] \cdot \{\hat{\underline{U}}(0), \hat{\underline{\Omega}}(0)\} \\ & \quad \quad - \int_0^l \frac{\partial}{\partial s} [\underline{R}(s), \underline{M}(s)]_{\underline{x}(s)} \cdot \{\hat{\underline{U}}(s), \hat{\underline{\Omega}}(s)\}_{\underline{x}(s)} ds, \\ & \quad = [\underline{R}(l), \underline{M}(l)] \cdot \{\hat{\underline{U}}(l), \hat{\underline{\Omega}}(l)\} - [\underline{R}(0), \underline{M}(0)] \cdot \{\hat{\underline{U}}(0), \hat{\underline{\Omega}}(0)\} \\ & \quad \quad - \int_0^l \left[ \frac{\partial}{\partial s} \underline{R}(s), \frac{\partial}{\partial s} \underline{M}(s) + \underline{t}(s) \wedge \underline{R}(s) \right]_{\underline{x}(s)} \cdot \{\hat{\underline{U}}(s), \hat{\underline{\Omega}}(s)\}_{\underline{x}(s)} ds, \end{aligned}$$

où l'expression des éléments de réduction du torseur dérivé est obtenu suivant la démarche de la section 1.3.2. Le lecteur qui trouverait l'argument un peu rapide peut toujours opérer l'intégration par parties sur la forme développée de la puissance virtuelle des efforts intérieurs donnée à la fin de la section 2.4. Il en résulte la forme suivante pour l'équation du mouvement en théorie des poutres.

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial \underline{R}}{\partial s}, \frac{\partial \underline{M}}{\partial s} + \underline{t} \wedge \underline{R} \right] + [\underline{F}, \underline{C}] = [\bar{\rho} \dot{\underline{U}}, \underline{i}^\rho \cdot \dot{\underline{\Omega}} + \underline{\Omega} \wedge (\underline{i}^\rho \cdot \underline{\Omega})], \\ & [\underline{R}(0), \underline{M}(0)] = -[\underline{F}_0, \underline{C}_0], \\ & [\underline{R}(l), \underline{M}(l)] = [\underline{F}_l, \underline{C}_l]. \end{aligned}$$

L'application de ce résultat à un sous-système  $[s_1, s_2]$  arbitraire de la poutre fournit l'interprétation physique du champ de torseur  $[\underline{R}(s), \underline{M}(s)]_{\underline{x}(s)}$  modélisant les efforts intérieurs dans la poutre. Le torseur  $[\underline{R}(s), \underline{M}(s)]_{\underline{x}(s)}$  est le torseur de tous les efforts exercés par la partie de la poutre en aval de  $s$  sur la partie en amont de  $s$ . On voit ainsi se dégager la particularité de cette modélisation des efforts intérieurs (masquée dans l'expression postulée de la puissance virtuelle des efforts intérieurs) qui est qu'elle se réduit à des actions de contact :

il n'y a pas, dans le cadre de notre modélisation, d'efforts à distance exercés par une partie de la poutre sur une autre. Cette interprétation physique du tenseur  $[\underline{R}(s), \underline{M}(s)]_{\underline{x}(s)}$  montre que ce champ torsorien dépend du choix initial de l'orientation de la poutre : il doit être changé en son opposé si on adopte l'orientation contraire pour la poutre. La terminologie usuelle est la suivante. Le champ de tenseur  $[\underline{R}(s), \underline{M}(s)]_{\underline{x}(s)}$  est le champ de « contrainte généralisée » et on appelle :

- « effort normal », la composante suivant  $\underline{t}$  de  $\underline{R}$ ,
- « effort tranchant », la composante orthogonale à  $\underline{t}$  de  $\underline{R}$ ,
- « moment de torsion », la composante suivant  $\underline{t}$  de  $\underline{M}$ ,
- « moment fléchissant », la composante orthogonale à  $\underline{t}$  de  $\underline{M}$ .

L'effort normal et le moment de torsion sont des quantités intrinsèques par rapport à l'orientation de la poutre, tandis que l'effort tranchant et le moment fléchissant sont changés en leurs opposés lorsque l'on renverse cette orientation.

## 2.6 Transport de l'équation du mouvement sur la configuration de référence

Comme pour le milieu continu tridimensionnel classique, l'équation du mouvement est naturellement écrite sur la configuration actuelle. Comme cette dernière est en général inconnue, il est très souvent commode de disposer de l'expression de l'équation du mouvement sur la configuration de référence. Ce transport arrière de l'équation du mouvement s'avère, comme on va le voir, plus facile dans le cas de la théorie des poutres que dans celui du milieu continu tridimensionnel classique.

La transformation induit une relation bi-univoque entre abscisse curviligne  $S$  sur la configuration de référence et abscisse curviligne  $s$  sur la configuration actuelle de la ligne moyenne. Ainsi, toute fonction qui s'exprime naturellement en fonction de  $s$  peut être exprimée, à l'aide d'un simple changement de variable, en fonction de  $S$ . C'est ce simple changement de variable que nous nous proposons d'opérer maintenant sur l'équation du mouvement.

En notant  $L$  la longueur de la ligne moyenne dans la configuration de référence, les conditions aux extrémités se réécrivent simplement, après changement de variable :

$$\begin{aligned} [\underline{R}(0), \underline{M}(0)] &= -[\underline{F}_0, \underline{C}_0], \\ [\underline{R}(L), \underline{M}(L)] &= [\underline{F}_L, \underline{C}_L], \end{aligned}$$

où le tenseur des efforts extérieurs exercés sur l'extrémité aval est noté :

$$[\underline{F}_L, \underline{C}_L] = [\underline{F}_l, \underline{C}_l],$$

par seul souci de cohérence de notation. L'équation du mouvement peut alors se réécrire :

$$\left[ \frac{\partial S}{\partial s} \frac{\partial \underline{R}}{\partial S}, \frac{\partial S}{\partial s} \frac{\partial \underline{M}}{\partial S} + \underline{t} \wedge \underline{R} \right] + [\underline{F}, \underline{C}] = \left[ \bar{\rho} \dot{\underline{U}}, \underline{i}^p \cdot \dot{\underline{\Omega}} + \underline{\Omega} \wedge (\underline{i}^p \cdot \underline{\Omega}) \right].$$

On introduit alors la densité linéique  $\bar{\rho}_0$  par unité de longueur dans la configuration de référence :

$$\bar{\rho}_0 = \frac{\partial s}{\partial S} \bar{\rho},$$

ainsi que la densité de torseur d'efforts extérieurs par unité de longueur dans la configuration de référence :

$$[\underline{F}_0, \underline{C}_0] = \left[ \frac{\partial s}{\partial S} \underline{F}, \frac{\partial s}{\partial S} \underline{C} \right].$$

Enfin, on posera :

$$\underline{i}_0^\rho = \frac{\partial s}{\partial S} \underline{i}^\rho,$$

qui est un objet un peu hybride : il s'agit du tenseur d'inertie des sections dans leur orientation actuelle, les longueurs le long de la fibre moyenne étant mesurées dans la configuration de référence. Avec ces notations, l'équation du mouvement transportée sur la configuration de référence prend la forme finale :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \underline{R}}{\partial S}, \frac{\partial \underline{M}}{\partial S} + \frac{\partial \underline{x}}{\partial S} \wedge \underline{R} \right] + [\underline{F}_0, \underline{C}_0] &= \left[ \bar{\rho}_0 \underline{\dot{U}}, \underline{i}_0^\rho \cdot \underline{\dot{\Omega}} + \underline{\Omega} \wedge (\underline{i}_0^\rho \cdot \underline{\Omega}) \right], \\ [\underline{R}(0), \underline{M}(0)] &= -[\underline{F}_0, \underline{C}_0], \\ [\underline{R}(L), \underline{M}(L)] &= [\underline{F}_L, \underline{C}_L], \end{aligned}$$

où les quantités  $\partial \underline{x} / \partial S$  et  $\underline{U}$  pourront être agréablement exprimées en introduisant le déplacement  $\bar{\xi}$  de la ligne moyenne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{x}}{\partial S} &= \underline{T} + \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S}, \\ \underline{U} &= \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t}. \end{aligned}$$

La simplicité technique du travail mené ne doit pas faire perdre de vue la difficulté sous-jacente suivante. Le transport arrière de l'équation du mouvement que l'on vient d'effectuer est un transport *parallèle*. La conséquence en est que les équations obtenues mélangent la géométrie de la configuration de référence (pour la ligne moyenne) et la géométrie actuelle (pour l'orientation des sections). En particulier, le tenseur  $\underline{i}_0^\rho$  est le tenseur d'inertie de la section droite *dans son orientation actuelle*. Ce fait est habituellement résumé par l'expression : la contrainte généralisée  $[\underline{R}(S), \underline{M}(S)]$ , bien qu'exprimée sur la configuration de référence de la ligne moyenne, n'est pas purement lagrangienne.

## 2.7 Contrainte généralisée lagrangienne

Comme le tenseur de contrainte de Cauchy, la contrainte généralisée  $[\underline{R}(s), \underline{M}(s)]_{\underline{x}(s)}$ , construite par dualité avec le taux de déformation eulerien, est par nature eulerienne. Dans l'écriture de la loi de comportement, apparaîtra la nécessité de disposer d'une contrainte

généralisée purement lagrangienne, construite par dualité avec le taux de déformation lagrangien. Pour ce faire, on part de l'expression de la puissance des efforts intérieurs :

$$\mathcal{P}_i = - \int_0^l [\underline{R}(s), \underline{M}(s)]_{\underline{x}(s)} \cdot \frac{d}{ds} \{ \underline{U}(s), \underline{\Omega}(s) \}_{\underline{x}(s)} ds,$$

dans laquelle, on opère simultanément le changement de variable  $s \rightarrow S$  et l'expression du taux de déformation eulerien en fonction du taux de déformation lagrangien au moyen de la formule (1.4). Il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i &= - \int_0^L [\underline{R}, \underline{M}] \cdot \left\{ \frac{\partial S}{\partial s} \underline{R} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E} \right\} \frac{\partial s}{\partial S} dS, \\ &= - \int_0^L [{}^t \underline{R} \cdot \underline{R}, {}^t \underline{R} \cdot \underline{M}] \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbb{E} dS, \end{aligned}$$

expression qui fait apparaître la *contrainte généralisée lagrangienne* définie par :

$$[\underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{M}}] = [{}^t \underline{R} \cdot \underline{R}, {}^t \underline{R} \cdot \underline{M}] = {}^t \underline{R} \cdot [\underline{R}, \underline{M}].$$

La contrainte généralisée lagrangienne  $[\underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{M}}]$  est le pendant en théorie des poutres du tenseur de contrainte de Piola-Kirchhoff. Elle est obtenue, à partir de la contrainte généralisée eulerienne par simple application de l'inverse de la rotation de la section.

## 2.8 Récapitulatif des formules essentielles

- Expression générale du principe des puissances virtuelles :

$$\begin{aligned} - \forall \hat{U}, & \quad \mathcal{P}_e(\hat{U}) + \mathcal{P}_i(\hat{U}) = \mathcal{A}(\hat{U}), \\ - \forall \hat{U} \text{ rigidifiant}, & \quad \mathcal{P}_i(\hat{U}) = 0. \end{aligned}$$

- Puissance virtuelle des quantités d'accélération d'une poutre naturelle :

$$\mathcal{A}(\hat{U}, \hat{\Omega}) = \int_0^l \bar{\rho} \dot{U} \cdot \hat{U} + \left[ \dot{\Omega} \cdot \underline{i}^\rho + \Omega \wedge (\underline{i}^\rho \cdot \Omega) \right] \cdot \hat{\Omega},$$

où l'on a supposé que la ligne moyenne occupe le lieu des centres d'inertie des sections droites.

- Puissance virtuelle des efforts extérieurs :

$$\mathcal{P}_e(\hat{U}, \hat{\Omega}) = [\underline{F}_0, \underline{C}_0] \cdot \{\hat{U}(0), \hat{\Omega}(0)\} + \int_0^l [\underline{F}, \underline{C}] \cdot \{\hat{U}, \hat{\Omega}\} + [\underline{F}_l, \underline{C}_l] \cdot \{\hat{U}(l), \hat{\Omega}(l)\}.$$

- Puissance virtuelle des efforts intérieurs :

$$\mathcal{P}_i(\hat{U}, \hat{\Omega}) = - \int_0^l [\underline{R}(s), \underline{M}(s)]_{\underline{x}(s)} \cdot \frac{d}{ds} \{\hat{U}(s), \hat{\Omega}(s)\}_{\underline{x}(s)} ds.$$

- Équation du mouvement d'une poutre (naturellement écrite sur la configuration actuelle) :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \underline{R}}{\partial s}, \frac{\partial \underline{M}}{\partial s} + \underline{t} \wedge \underline{R} \right] + [\underline{F}, \underline{C}] &= \left[ \bar{\rho} \dot{U}, \underline{i}^\rho \cdot \dot{\Omega} + \Omega \wedge (\underline{i}^\rho \cdot \Omega) \right], \\ [\underline{R}(0), \underline{M}(0)] &= - [\underline{F}_0, \underline{C}_0], \\ [\underline{R}(l), \underline{M}(l)] &= [\underline{F}_l, \underline{C}_l]. \end{aligned}$$

- Équation du mouvement d'une poutre (transportée sur la configuration de référence) :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial \underline{R}}{\partial S}, \frac{\partial \underline{M}}{\partial S} + \frac{\partial \underline{x}}{\partial S} \wedge \underline{R} \right] + [\underline{F}_0, \underline{C}_0] &= \left[ \bar{\rho}_0 \dot{U}, \underline{i}_0^\rho \cdot \dot{\Omega} + \Omega \wedge (\underline{i}_0^\rho \cdot \Omega) \right], \\ [\underline{R}(0), \underline{M}(0)] &= - [\underline{F}_0, \underline{C}_0], \\ [\underline{R}(L), \underline{M}(L)] &= [\underline{F}_L, \underline{C}_L]. \end{aligned}$$

## 2.9 Exercices

**Exercice 1. Équilibre d'un fil pesant : la chaînette.** On appelle *fil* une poutre telle que, quel que soit le point considéré de la ligne moyenne, la partie aval ne peut exercer de moment sur la partie amont :  $\forall s, \underline{M}(s) = \underline{0}$ .

1) Montrer, dans la circonstance habituelle où la densité linéique de torseur d'efforts extérieurs imposés se réduit à une densité linéique de force :

$$\left[ \underline{F}(s), \underline{C}(s) \right]_{\underline{x}(s)} = \left[ \underline{F}(s), \underline{0} \right]_{\underline{x}(s)},$$

que les efforts intérieurs à l'équilibre se réduisent à l'effort normal (ou tension). En particulier, les forces extérieures exercées aux extrémités du fil sont nécessairement colinéaires à la direction du fil à l'équilibre au point d'application de la force.

2) Quelle est la configuration d'équilibre d'un fil de masse linéique homogène en présence de la gravité ?

**Éléments de réponses.**

1) L'équation d'équilibre :

$$\frac{d\underline{M}}{ds}(s) + \underline{t}(s) \wedge \underline{R}(s) + \underline{C}(s) = \underline{0},$$

particularisée dans la circonstance en jeu  $\underline{M} \equiv \underline{0}$ ,  $\underline{C} \equiv \underline{0}$  donne le résultat de façon immédiate.

2) En désignant par  $T(s)$  l'effort normal ou tension à l'équilibre, et par  $-g \underline{e}_y$  l'accélération de la pesanteur, l'équation d'équilibre fournit :

$$\frac{d}{ds} \left( T(s) \underline{t}(s) \right) - \bar{\rho} g \underline{e}_y = \underline{0},$$

dont l'intégration montre que  $\underline{t}(s)$  varie nécessairement dans un plan contenant la direction verticale. La configuration d'équilibre est donc plane et le plan la contenant sera rapporté au repérage cartésien orthonormé  $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$ . Introduisant l'angle  $\alpha(s)$  formé par le vecteur tangent  $\underline{t}(s)$  avec l'horizontale, l'intégration de l'équation d'équilibre permet d'écrire :

$$T(s) \cos \alpha(s) = a, \quad T(s) \sin \alpha(s) = b + \bar{\rho} g s,$$

où  $a$  et  $b$  sont deux constantes.

- Si  $a = 0$ , alors nécessairement  $\alpha(s)$  est, soit identiquement égal à  $\pi/2$ , soit identiquement égal à  $-\pi/2$  : la configuration d'équilibre est un segment de droite vertical.
- Si  $a \neq 0$ , alors :  $\tan \alpha(s) = (b + \bar{\rho} g s)/a$ . Il en résulte :

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha(s) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + (b + \bar{\rho} g s)^2}}, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha(s) = \frac{b + \bar{\rho} g s}{\sqrt{a^2 + (b + \bar{\rho} g s)^2}},$$

dont l'intégration fournit l'équation cartésienne :

$$\frac{y - y_0}{l} = \cosh \left( \frac{x - x_0}{l} \right) - 1, \quad (2.2)$$

où on a posé  $l = a/(\bar{\rho} g)$ . La configuration d'équilibre est alors un arc quelconque de la courbe d'équation cartésienne donnée par la formule (2.2).





## Chapitre 3

# Poutres élastiques

Comme pour le milieu continu tridimensionnel, et à la différence du solide rigide, l'équation du mouvement n'est pas suffisante pour déterminer le mouvement de la poutre. Elle doit être complétée par des informations sur la nature du matériau constitutif : c'est l'objet de la loi de comportement.

### 3.1 Expression générale de la loi de comportement élastique en théorie des poutres

L'écriture de la loi de comportement est fondée sur le principe *d'action locale* : l'état de contrainte du volume élémentaire est déterminé par la seule connaissance de l'histoire des transformations de ce seul volume élémentaire.

La loi de comportement élastique est fondée sur l'hypothèse de *réversibilité* : l'état de contrainte actuel du volume élémentaire ne dépend de l'histoire des transformations de ce volume élémentaire qu'au travers de la transformation actuelle.

Cette hypothèse conduit à postuler la loi de comportement élastique en théorie des poutres sous la forme d'un lien entre transformation actuelle et contrainte généralisée actuelle. Utilisant les notations introduites aux chapitres 1 et 2, on écrira donc la loi de comportement élastique sous la forme :

$$\left[ \underline{R}, \underline{M} \right] = \mathcal{G}(\underline{R} \cdot \mathbb{U}).$$

Naturellement, si la loi de comportement peut parfaitement privilégier certaines directions liées à la matière, elle ne doit en aucun cas privilégier de direction liée à l'espace : c'est le principe *d'isotropie de l'espace*. Ce principe induit des restrictions sur les fonctions  $\mathcal{G}$  admissibles. Pour les identifier, considérons un volume élémentaire ayant subi la transformation  $\underline{R} \cdot \mathbb{U}$ . L'état de contrainte associé à cette transformation par la loi de comportement est :

$$\left[ \underline{R}, \underline{M} \right] = \mathcal{G}(\underline{R} \cdot \mathbb{U}).$$

Opérons maintenant une rotation supplémentaire  $\underline{P}$  sur ce volume élémentaire, de sorte que la transformation totale est maintenant  $\underline{P} \cdot \underline{R} \cdot \mathbb{U}$ . Le principe d'isotropie de l'espace stipule alors que le nouvel état de contrainte régnant dans le volume élémentaire ne peut être que

le précédent, tourné par la rotation  $\underline{\underline{P}}$ . En d'autres termes, la fonction  $\mathcal{G}$  doit posséder la propriété suivante :

$$\forall \underline{\underline{P}} \text{ rotation, } \quad \mathcal{G}(\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{R}} \cdot \mathbb{U}) = \underline{\underline{P}} \cdot \mathcal{G}(\underline{\underline{R}} \cdot \mathbb{U}).$$

Faisant le choix  $\underline{\underline{P}} = {}^t\underline{\underline{R}}$ , on obtient :

$$\left[ {}^t\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{R}}, {}^t\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{M}} \right] = \mathcal{G}(\mathbb{U}),$$

soit :

$$\left[ \underline{\underline{\mathcal{R}}}, \underline{\underline{\mathcal{M}}} \right] = \mathcal{F}(\mathbb{E}).$$

Ainsi, le principe d'isotropie de l'espace requiert que la loi de comportement élastique soit nécessairement un lien entre déformation lagrangienne et contrainte généralisée lagrangienne. Réciproquement, un tel lien respecte nécessairement le principe d'isotropie de l'espace puisque  $\mathbb{E}$  et  $[\underline{\underline{\mathcal{R}}}, \underline{\underline{\mathcal{M}}}]$ , quantités purement lagrangiennes, ne sont liées qu'à la matière et pas du tout à l'espace (elles restent inchangées si l'on applique une rotation arbitraire  $\underline{\underline{P}}$  à la configuration actuelle).

Une nouvelle restriction sur la loi de comportement élastique est apportée par le *premier principe de la thermodynamique* qui postule l'existence d'une énergie interne  $\psi$  du volume élémentaire qui doit être une fonction d'état. L'expression de la puissance des efforts intérieurs, obtenue à la section 2.7, conduit alors à :

$$\frac{d\psi}{dt} = \left[ \underline{\underline{\mathcal{R}}}, \underline{\underline{\mathcal{M}}} \right] \cdot \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t} = \mathcal{F}(\mathbb{E}) \cdot \frac{\partial \mathbb{E}}{\partial t},$$

quelle que soit la vitesse de déformation  $\partial \mathbb{E} / \partial t$  envisagée, soit :

$$\mathcal{F}(\mathbb{E}) = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbb{E}}(\mathbb{E}).$$

En d'autres termes, le premier principe de la thermodynamique exige que la loi de comportement élastique dérive d'un potentiel. On est maintenant en mesure d'écrire l'expression générale de la loi de comportement d'une poutre élastique :

$$\boxed{\left[ \underline{\underline{\mathcal{R}}}, \underline{\underline{\mathcal{M}}} \right] = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbb{E}}(\mathbb{E}).}$$

Dans toute la suite, on fera l'hypothèse que l'état de référence est dénué de contrainte : on dit alors que la configuration de référence est dans l'état naturel. Cela s'écrit :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \mathbb{E}}(0) = 0.$$

Dans la pratique, l'identification de toute la loi de comportement (i.e. la connaissance totale du potentiel  $\psi$ ) est une gageure. De ce fait, on limitera le plus souvent le cadre d'analyse à l'hypothèse des déformations infinitésimales permettant la linéarisation de la loi de comportement :

$$\psi(\mathbb{E}) = \frac{1}{2} \mathbb{E} \cdot \underline{\underline{\mathcal{A}}} \cdot \mathbb{E} + o(|\mathbb{E}|^2) \quad (3.1)$$

(le terme d'ordre 0 est une constante, arbitraire puisque  $\psi$  est un potentiel, et le terme d'ordre 1 est nul puisque l'on a fait l'hypothèse de l'état de référence naturel). La quantification précise de l'hypothèse des petites déformations (déformations infinitésimales) ne va pas de soi. On a en effet remarqué au chapitre 1 que, si le premier terme  $\underline{E}$  de  $\mathbb{E} = (\underline{E}, \underline{W})$  est, comme dans le cas de la déformation du milieu continu tridimensionnel classique, une quantité adimensionnelle, le second terme  $\underline{W}$  a, lui, la dimension de l'inverse d'une longueur. La quantification de son éventuel caractère infinitésimal doit donc être rapportée à une longueur caractéristique de la circonstance en jeu. On pourrait être tenté de faire intervenir pour cela la longueur initiale  $L$  de la fibre moyenne. Cependant, ce serait passer outre le caractère *local* de la loi de comportement qui exige que l'on fasse référence à une longueur caractéristique liée au tronçon élémentaire de poutre. Il en résulte que la quantification de l'hypothèse des petites déformations doit être rapportée au diamètre  $D$  de la section courante :

$$\left| \underline{\underline{R}} \cdot \frac{d}{dS} \underline{x} - \underline{T} \right| \ll 1, \quad \text{et} \quad D \left| \underline{\underline{R}} \cdot \frac{d}{dS} \underline{\underline{R}} \right| \ll 1. \quad (3.2)$$

Cette précision tire son importance du fait qu'un solide élancé est précisément un solide possédant plusieurs ordres de grandeur de longueurs caractéristiques.

Le tenseur  $\underline{\underline{A}}$  figurant dans l'expression (3.1), est le tenseur  $6 \times 6$  des *modules d'élasticité autour de l'état naturel dans la modélisation poutre*. Ce tenseur est *symétrique*, puisque c'est le Hessien d'une fonction scalaire. En petites déformations de poutres élastiques, la loi de comportement la plus générale fait donc intervenir, comme pour le milieu continu classique, 21 coefficients d'élasticité indépendants. On retiendra cette loi de comportement linéarisée sous la forme :

$$\boxed{\begin{pmatrix} \underline{\mathcal{R}} \\ \underline{\mathcal{M}} \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \cdot \mathbb{E} + o(|\mathbb{E}|) = \underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{E} \\ \underline{W} \end{pmatrix} + o(|\mathbb{E}|)}$$

(cf formule (1.2)). Une toute dernière restriction doit être imposée au tenseur  $\underline{\underline{A}}$ . Elle est issue de la nécessaire *stabilité du matériau élastique* : l'état naturel ne doit pas évoluer spontanément en l'absence de sollicitation. Cela se traduit par le fait que 0 doit être un minimum local strict du potentiel  $\psi$ . Il en résulte que le tenseur  $\underline{\underline{A}}$ , en plus d'être symétrique, sera supposé *défini positif*.

## 3.2 Prise en compte de liaisons internes

L'analyse des transformations finies du milieu continu tridimensionnel classique élastique se fait souvent dans le cadre de la liaison interne d'isochorie (dite aussi d'incompressibilité). Une liaison interne est une idéalisation qui consiste à adopter une valeur infinie pour un (ou plusieurs) module d'élasticité (raideur). On est également souvent amené à opérer ce genre d'idéalisation en théorie des poutres élastiques. Une *liaison interne* sera une restriction locale sur l'ensemble des déformations admissibles par le milieu. Une telle restriction s'écrira en toute généralité :

$$\varphi(\mathbb{E}) = 0, \quad (3.3)$$

où  $\varphi$  désigne une fonction arbitraire. Bien sûr, le respect de cette liaison par le système induira, comme pour les solides rigides, un effort de réaction. La liaison interne sera dite

parfaite si l'effort de réaction ne peut jamais introduire de dissipation dans le mouvement réel. Or, les vitesses de déformation  $\dot{\mathbb{E}}$  compatibles avec le respect de la liaison (3.3) sont caractérisées par la condition :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbb{E}}(\mathbb{E}) \cdot \dot{\mathbb{E}} = 0.$$

Il en résulte que, pour que l'effort de réaction ne puisse jamais introduire de dissipation dans le mouvement réel, quel qu'il soit, il faut que cet effort de réaction soit colinéaire à  $\partial \varphi / \partial \mathbb{E}$ , c'est-à-dire, en quelque sorte, « normal » à la liaison. En d'autres termes, sous l'hypothèse de perfection de la liaison interne, la loi de comportement doit être modifiée en :

$$\left[ \underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{M}} \right] = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbb{E}}(\mathbb{E}) + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbb{E}}(\mathbb{E}),$$

où  $\eta$  désigne le multiplicateur de Lagrange (indéterminé) associé à la liaison interne (parfaite). Bien entendu, sous l'hypothèse des déformations infinitésimales, la fonction  $\varphi$  devra être linéarisée par rapport à  $\mathbb{E}$ .

En théorie des poutres, on rencontre principalement deux liaisons internes : la liaison interne d'inextensibilité (ou d'invariance de longueur) et la liaison interne de Navier-Bernoulli. Une poutre sans liaison interne (cas examiné dans la section précédente) sera appelée *poutre naturelle*<sup>1</sup>.

### 3.2.1 Cas de la liaison interne d'inextensibilité

La liaison interne d'inextensibilité s'écrit  $\partial s / \partial S \equiv 1$ . En terme de  $\mathbb{E} = (\underline{E}, \underline{W})$ , cela se réécrit :

$$\varphi_{\text{in}}(\mathbb{E}) \stackrel{\text{déf}}{=} |\underline{T} + \underline{E}| - 1 = 0.$$

La direction de l'effort de réaction associé est donnée par :

$$\frac{\partial \varphi_{\text{in}}}{\partial \mathbb{E}}(\mathbb{E}) = C^{\text{ste}} \begin{pmatrix} \underline{T} + \underline{E} \\ \underline{0} \end{pmatrix},$$

conduisant à la loi de comportement :

$$\left[ \underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{M}} \right] = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbb{E}}(\mathbb{E}) + \eta \left[ \underline{T} + \underline{E}, \underline{0} \right].$$

Sous l'hypothèse des déformations infinitésimales, la linéarisation de la liaison interne donne :

$$\varphi_{\text{in}}(\mathbb{E}) = \underline{T} \cdot \underline{E} + o(|\mathbb{E}|) = 0,$$

et la loi de comportement linéarisée s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathcal{R}} \\ \underline{\mathcal{M}} \end{pmatrix} = \underline{A} \cdot \begin{pmatrix} \underline{E} \\ \underline{W} \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} \underline{T} \\ \underline{0} \end{pmatrix} + o(|\mathbb{E}|).$$

<sup>1</sup>on rencontre, dans de nombreuses références, la dénomination de « poutre de Timoshenko », synonyme de poutre naturelle.

### 3.2.2 Cas de la liaison interne de Navier-Bernoulli

La liaison interne de Navier-Bernoulli est définie par le fait que les sections droites doivent demeurer orthogonales à la déformée de la fibre moyenne dans le mouvement. L'expérience montrant que les corps suffisamment élancés respectent cette liaison (pour de bonnes raisons qui seront explicitées au chapitre 6), la liaison interne de Navier-Bernoulli se rencontre de façon presque systématique en théorie des poutres, et l'on parle de « poutre de Navier-Bernoulli ». Cette liaison interne s'écrit :

$$\varphi_{\text{NB}}(\mathbb{E}) \stackrel{\text{déf}}{=} \underline{T} \wedge \underline{E} = \underline{0}.$$

Il s'agit en fait d'une double liaison interne, puisque la condition d'orthogonalité de la section à la fibre moyenne se traduit par la nullité de *deux* paramètres angulaires. Il y a donc deux multiplicateurs de Lagrange, scalaires, associés à cette liaison. La loi de comportement s'écrit alors :

$$[\underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{M}}] = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbb{E}}(\mathbb{E}) + [\underline{\eta}, \underline{0}],$$

où  $\underline{\eta}$  désigne un vecteur orthogonal à  $\underline{T}$ , arbitraire. La version linéarisée est :

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathcal{R}} \\ \underline{\mathcal{M}} \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{E} \\ \underline{W} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\eta} \\ \underline{0} \end{pmatrix} + o(|\mathbb{E}|).$$

### 3.2.3 Cas des poutres de Navier-Bernoulli inextensibles

Dans ce cas l'expression de la liaison interne est :

$$\varphi_{\text{NBin}}(\mathbb{E}) \stackrel{\text{déf}}{=} \underline{E} = \underline{0}.$$

La loi de comportement s'écrit :

$$[\underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{M}}] = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbb{E}}(\mathbb{E}) + [\underline{\eta}, \underline{0}],$$

où  $\underline{\eta}$  désigne un vecteur maintenant arbitraire, et la version linéarisée est :

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathcal{R}} \\ \underline{\mathcal{M}} \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{E} = \underline{0} \\ \underline{W} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\eta} \\ \underline{0} \end{pmatrix} + o(|\mathbb{E}|).$$

## 3.3 Bilan des équations régissant le mouvement d'une poutre élastique

Dans cette section, on récapitule l'ensemble des équations, écrites sur la configuration de référence, qui régit le mouvement d'une poutre élastique. On se limitera au cas de l'hypothèse des déformations infinitésimales sans liaison interne, les modifications à opérer dans le cas de liaisons internes étant évidentes. Dans toute la suite, on se référera au cadre d'analyse correspondant à cet ensemble d'équations sous le vocable « déformations infinitésimales—rotations finies » (DI-RF, en abrégé).

Les conditions aux extrémités peuvent porter sur les déplacements ou sur les efforts. À titre d'exemple, on considère la situation où l'on se donne une condition à la limite cinématique en l'extrémité amont  $S = 0$  et une condition à la limite en effort sur l'extrémité aval  $S = L$ .

- Équation du mouvement :

$$\begin{aligned} \left[ \underline{\underline{R}}(L), \underline{\underline{M}}(L) \right] &= \left[ \underline{\underline{F}}_L, \underline{\underline{C}}_L \right], \\ \left[ \frac{\partial \underline{\underline{R}}}{\partial S}, \frac{\partial \underline{\underline{M}}}{\partial S} + \left( \underline{\underline{T}} + \frac{\partial \bar{\underline{\xi}}}{\partial S} \right) \wedge \underline{\underline{R}} \right] + \left[ \bar{\underline{F}}_0, \bar{\underline{C}}_0 \right] \\ &= \left[ \bar{\rho}_0 \dot{\underline{U}}, i_0^\rho \cdot \dot{\underline{\Omega}} + \underline{\underline{\Omega}} \wedge \left( i_0^\rho \cdot \underline{\underline{\Omega}} \right) \right], \end{aligned}$$

- Loi de comportement élastique linéarisée :

$$\begin{pmatrix} {}^t \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{R}} \\ {}^t \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{M}} \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{\underline{E}} \\ \underline{\underline{W}} \end{pmatrix},$$

- Conditions cinématiques :

$$\begin{aligned} \left( \bar{\underline{\xi}}(0), \underline{\underline{R}}(0) - \underline{\underline{1}} \right) &= \left( \bar{\underline{\xi}}_0, \underline{\underline{R}}_0 - \underline{\underline{1}} \right), \\ \underline{\underline{E}} &= \left( {}^t \underline{\underline{R}} - \underline{\underline{1}} \right) \cdot \underline{\underline{T}} + {}^t \underline{\underline{R}} \cdot \frac{\partial \bar{\underline{\xi}}}{\partial S}, & \underline{\underline{W}} &= {}^t \underline{\underline{R}} \cdot \frac{\partial \underline{\underline{R}}}{\partial S}, \\ \underline{\underline{U}} &= \frac{\partial \bar{\underline{\xi}}}{\partial t}, & \underline{\underline{\Omega}} &= \frac{\partial \underline{\underline{R}}}{\partial t} \cdot {}^t \underline{\underline{R}}, \end{aligned}$$

où les données en effort  $[\underline{\underline{F}}_L, \underline{\underline{C}}_L]$  et  $[\bar{\underline{F}}_0, \bar{\underline{C}}_0]$  peuvent être, dans ce cadre d'analyse DI-RF, des fonctions du déplacement actuel. Le système des équations du cadre d'analyse DI-RF est *non-linéaire*, seule la loi de comportement élastique ayant été linéarisée sous l'hypothèse des déformations infinitésimales. On gardera en tête que, compte-tenu de la quantification (3.2) de l'hypothèse des petites déformations, le domaine de validité de cet ensemble d'équations est d'autant plus large que le solide tridimensionnel dont est issue la modélisation poutre, est *élancé*.

### 3.4 Lois de comportement standard et standard inextensible

Considérons un cylindre tridimensionnel élancé constitué d'un matériau élastique homogène isotrope, au cours d'un essai de traction simple. Lors d'un tel essai, on observe une dilatation axiale homogène, associée à une contraction homogène des sections droites (c'est « l'effet Poisson ») qui restent orthogonales dans la transformation à l'axe du cylindre. Dans une analyse de cet essai dans le cadre de la théorie des poutres qui ne prend pas en compte

l'effet Poisson, la déformation lagrangienne se réduit à :

$$\left( \underline{E}, \underline{W} \right) = \left( \left( \frac{ds}{dS} - 1 \right) \underline{T}, \underline{0} \right),$$

où  $ds/dS - 1$  est l'allongement local qui est ici homogène. Notant  $F_l$  l'amplitude de la résultante axiale des efforts extérieurs exercés sur la section d'extrémité aval, la répartition de contrainte généralisée s'écrit facilement :

$$\left[ \underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{M}} \right] = \left[ \underline{R}, \underline{M} \right] = \left[ F_l \underline{T}, \underline{0} \right].$$

La loi de comportement de poutre élastique, particularisée à cet essai, se réduit alors à la fonction permettant d'exprimer  $F_l$  en fonction de l'allongement local  $ds/dS - 1$ . Linéarisée sous l'hypothèse des petites déformations, cette loi de comportement ne fait plus apparaître qu'un réel positif  $A$  :

$$F_l = A \left( \frac{ds}{dS} - 1 \right),$$

que l'on appelle module de rigidité de la poutre en traction simple. On est alors naturellement amené à vouloir utiliser la théorie de l'élasticité du milieu continu tridimensionnel classique pour l'identifier. Cette démarche qui pose, de façon plus générale, la problématique de la cohérence entre théorie de l'élasticité du milieu continu tridimensionnel classique et théorie des poutres sera abordée de façon plus systématique au chapitre 6. L'analyse de l'essai de traction simple du cylindre dans le cadre de l'élasticité tridimensionnelle *linéarisée* (cf chapitre 6) montre que le module de rigidité de la poutre en traction simple s'écrit :

$$A = E |\mathcal{S}|,$$

où  $E$  désigne le module d'Young du matériau constitutif, supposé élastique homogène isotrope, et  $|\mathcal{S}|$ , l'aire commune à toutes les sections droites.

Cette analyse met en évidence une caractéristique importante de la loi de comportement de poutre élastique qui est *qu'elle ne dépend pas seulement du matériau constitutif, mais aussi de caractéristiques géométriques des sections droites*. Cette constatation s'éclaire par le fait que l'élément de volume en théorie des poutres est, en fait, un tronçon de longueur infinitésimale de la poutre. Du point de vue de l'ingénieur qui souhaite appliquer la théorie à l'étude de problèmes concrets, il apparaît alors illusoire d'envisager la constitution de tables, construites à partir de données expérimentales, de lois de comportement de poutre élastique, qui recenseraient les principaux matériaux constitutifs rencontrés en pratique, *ainsi* que toutes les géométries de section. On est ainsi naturellement amené à faire intervenir la théorie de l'élasticité du milieu continu tridimensionnel classique dans le but d'identifier la loi de comportement d'une poutre élastique à partir de la connaissance du matériau constitutif, d'une part, et de la géométrie des sections d'autre part.

L'étude systématique de cette identification théorique de la loi de comportement de poutre élastique à partir de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle est reportée au chapitre 6. On y verra que la situation, très fréquente en pratique, du cylindre élancé constitué d'un matériau élastique homogène isotrope est très favorable pour mener à bien cette analyse. L'utilisation de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle permettra de montrer que la loi de comportement, linéarisée sous l'hypothèse des petites déformations, d'un modèle de

poutre élastique issu de la considération d'un solide tridimensionnel élancé constitué d'un matériau élastique homogène isotrope, et considéré à la limite asymptotique des très grands élancements, obéit, en particulier, aux liaisons internes de Navier-Bernoulli ainsi que d'inextensibilité. Les résultats de la section 3.2 permettent alors d'écrire la loi de comportement sous la forme :

$$\underline{E} = \underline{0}, \quad \begin{pmatrix} \underline{R} \\ \underline{M} \end{pmatrix} = \underline{A} \cdot \begin{pmatrix} \underline{E} \\ \underline{W} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\eta} \\ \underline{0} \end{pmatrix},$$

où  $\underline{\eta}$  désigne un vecteur arbitraire. La loi de comportement laisse donc le vecteur  $\underline{R}$  indéterminé, et il apparaît alors, dans le cas des liaisons internes de Navier-Bernoulli et d'inextensibilité, que la connaissance de la loi de comportement linéarisée  $\underline{A}$  ne nécessite que l'identification de l'application linéaire associant  $\underline{M}$  à  $\underline{W}$ , c'est-à-dire, lorsque le choix du repérage est fait, l'identification d'une matrice symétrique d'ordre 3. On verra au chapitre 6 comment l'utilisation de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle, et son analyse asymptotique pour les grands élancements, permet cette identification lorsque le modèle de poutre élastique est issu de la considération d'un solide tridimensionnel élancé constitué d'un matériau élastique homogène isotrope. Pour en exprimer le résultat, on introduit la décomposition de tout champ de vecteur sur la fibre moyenne  $\underline{V}$  en parties tangentielle  $V_T \underline{T}$  et orthogonale  $\underline{V}_\perp$  :

$$\underline{V} = V_T \underline{T} + \underline{V}_\perp.$$

Avec ces notations, l'application linéaire associant  $\underline{M}$  à  $\underline{W}$ , dans le cas où le matériau est élastique homogène isotrope, s'écrit :

$$\mathcal{M}_T = \mu J W_T, \quad \underline{M}_\perp = E \underline{I} \cdot \underline{W}_\perp,$$

où  $E$  désigne le module d'Young du matériau constitutif et  $\mu = E/(2(1 + \nu))$  son module de cisaillement ( $\nu$  est le coefficient de Poisson). Le scalaire positif  $J$  est le moment d'inertie de torsion de la section. Il s'exprime en  $m^4$  et ne dépend que de la géométrie de la section (cf chapitre 6). Enfin, le tenseur  $\underline{I}$  est le tenseur bidimensionnel d'inertie géométrique de la section droite par rapport à son centre d'inertie géométrique  $g$  dans sa configuration initiale (cf annexe A et chapitre 6) :

$$\underline{I} = \int_S \left( |\underline{gm}|^2 \underline{\mathbb{1}}_2 - \underline{gm} \otimes \underline{gm} \right).$$

En raison de l'importance pratique des modèles de poutres issus de la considération de solides tridimensionnels élancés constitués d'un matériau élastique homogène isotrope, on décide de baptiser *loi de comportement standard inextensible* la loi de comportement :

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{E} &= \underline{0}, \\ \mathcal{M}_T &= \mu J W_T, \\ \underline{M}_\perp &= E \underline{I} \cdot \underline{W}_\perp, \end{aligned}} \quad (3.4)$$

qui intègre donc les liaisons internes de Navier-Bernoulli et d'inextensibilité. La raison de l'apparition de la liaison interne d'inextensibilité est qu'à la limite asymptotique des grands élancements, les effets d'extension deviennent négligeables par rapport aux effets de



flexion. La liaison interne d'inextensibilité apparaît alors comme une idéalisation à l'infini du module de rigidité en traction simple. Néanmoins, lorsque seule l'extension est sollicitée, comme dans l'essai de traction simple, on peut être amené à vouloir conserver la valeur finie  $E|\mathcal{S}|$  à ce module de rigidité en traction. La loi de comportement correspondante, baptisée *loi de comportement standard* s'écrit alors :

$$\begin{array}{l}
 \mathcal{R}_T = E|\mathcal{S}| E_T, \\
 \underline{E}_\perp = \underline{0}, \\
 \mathcal{M}_T = \mu J W_T, \\
 \underline{\mathcal{M}}_\perp = E \underline{I} \cdot \underline{W}_\perp.
 \end{array}
 \tag{3.5}$$

Elle est associée à la seule liaison interne de Navier-Bernoulli. On retiendra cependant (cf chapitre 6) que, dans toute situation où l'extension locale est combinée avec de la flexion, c'est la loi de comportement standard inextensible que l'étude asymptotique impose et non la loi de comportement standard. En d'autre terme, si les calculs ont été menés avec la loi de comportement standard, les prédictions associées à la valeur finie  $E|\mathcal{S}|$  pour le module de rigidité en traction ne sont pas plus pertinentes que celles que l'on obtient en faisant tendre ce module de rigidité en traction  $E|\mathcal{S}|$  vers l'infini dans les résultats.

### 3.5 Récapitulatif des formules essentielles

- Expression générale de la loi de comportement d'une poutre naturelle élastique :

$$\left[ \underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{M}} \right] = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbb{E}}}(\underline{\mathbb{E}}).$$

Cas d'une poutre élastique avec liaison interne :

$$\varphi(\underline{\mathbb{E}}) = 0, \quad \text{et} \quad \left[ \underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{M}} \right] = \frac{\partial \psi}{\partial \underline{\mathbb{E}}}(\underline{\mathbb{E}}) + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\mathbb{E}}}(\underline{\mathbb{E}}).$$

- Hypothèse des déformations infinitésimales :

$$|\underline{E}| = \left| {}^t \underline{R} \cdot \frac{d}{dS} \underline{x} - \underline{T} \right| \ll 1, \quad \text{et} \quad D|\underline{W}| = D \left| {}^t \underline{R} \cdot \frac{d}{dS} \underline{R} \right| \ll 1.$$

- Expression générale de la loi de comportement élastique linéarisée d'une poutre naturelle :

$$\begin{pmatrix} \underline{\mathcal{R}} \\ \underline{\mathcal{M}} \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{E} \\ \underline{W} \end{pmatrix},$$

d'une poutre de Navier-Bernoulli :

$$\underline{T} \wedge \underline{E} = \underline{0}, \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{R}} \\ \underline{\mathcal{M}} \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{E} = E_T \underline{T} \\ \underline{W} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\eta} \\ \underline{0} \end{pmatrix},$$

( $\underline{\eta}$  vecteur orthogonal à  $\underline{T}$  arbitraire), et d'une poutre de Navier-Bernoulli inextensible :

$$\underline{E} = \underline{0}, \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \underline{\mathcal{R}} \\ \underline{\mathcal{M}} \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} \underline{E} = \underline{0} \\ \underline{W} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\eta} \\ \underline{0} \end{pmatrix},$$

( $\underline{\eta}$  vecteur totalement arbitraire).

- Loi de comportement standard :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_T &= E|\mathcal{S}| E_T, \\ \underline{E}_\perp &= \underline{0}, \\ \mathcal{M}_T &= \mu J W_T, \\ \underline{\mathcal{M}}_\perp &= E \underline{I} \cdot \underline{W}_\perp, \end{aligned}$$

et loi de comportement standard inextensible :

$$\begin{aligned} \underline{E} &= \underline{0}, \\ \mathcal{M}_T &= \mu J W_T, \\ \underline{\mathcal{M}}_\perp &= E \underline{I} \cdot \underline{W}_\perp. \end{aligned}$$

- Ensemble des équations gouvernant le mouvement d'une poutre naturelle élastique dans le cadre d'analyse non-linéaire DI-RF (exemple de condition à la limite purement cinématique imposée en l'extrémité amont et purement statique en l'extrémité aval) :

$$\left[ \frac{\partial \underline{R}}{\partial S}, \frac{\partial \underline{M}}{\partial S} + \left( \underline{T} + \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S} \right) \wedge \underline{R} \right] + [\underline{F}_0, \underline{C}_0] = [\bar{\rho}_0 \dot{\underline{U}}, i_0^\rho \cdot \dot{\underline{\Omega}} + \underline{\Omega} \wedge (i_0^\rho \cdot \underline{\Omega})],$$

$$\begin{pmatrix} {}^t \underline{R} \cdot \underline{R} \\ {}^t \underline{R} \cdot \underline{M} \end{pmatrix} = \underline{A} \cdot \begin{pmatrix} \underline{E} \\ \underline{W} \end{pmatrix},$$

$$\left( \bar{\xi}(0), \underline{R}(0) - \underline{\mathbb{1}} \right) = \left( \bar{\xi}_0, \underline{R}_0 - \underline{\mathbb{1}} \right), \quad [\underline{R}(L), \underline{M}(L)] = [\underline{F}_L, \underline{C}_L],$$

$$\underline{E} = \left( {}^t \underline{R} - \underline{\mathbb{1}} \right) \cdot \underline{T} + {}^t \underline{R} \cdot \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S}, \quad \underline{W} = {}^t \underline{R} \cdot \frac{\partial \underline{R}}{\partial S},$$

$$\underline{U} = \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t}, \quad \underline{\Omega} = \frac{\partial \underline{R}}{\partial t} \cdot {}^t \underline{R}.$$

- Ensemble des équations gouvernant le mouvement d'une poutre élastique obéissant à la loi de comportement standard dans le cadre d'analyse non-linéaire DI-RF (exemple de condition à la limite purement cinématique imposée en l'extrémité amont et purement statique en l'extrémité aval) :

$$\left[ \frac{\partial \underline{R}}{\partial S}, \frac{\partial \underline{M}}{\partial S} + \left( \underline{T} + \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S} \right) \wedge \underline{R} \right] + [\underline{F}_0, \underline{C}_0] = [\bar{\rho}_0 \dot{\underline{U}}, i_0^\rho \cdot \dot{\underline{\Omega}} + \underline{\Omega} \wedge (i_0^\rho \cdot \underline{\Omega})],$$

$$\left( {}^t \underline{R} \cdot \underline{R} \right)_T = E|\mathcal{S}| E_T, \quad \left( {}^t \underline{R} \cdot \underline{M} \right)_T = \mu J W_T,$$

$$\underline{E}_\perp = \underline{0}, \quad \left( {}^t \underline{R} \cdot \underline{M} \right)_\perp = E \underline{I} \cdot \underline{W}_\perp,$$

$$\left( \bar{\xi}(0), \underline{R}(0) - \underline{\mathbb{1}} \right) = \left( \bar{\xi}_0, \underline{R}_0 - \underline{\mathbb{1}} \right), \quad [\underline{R}(L), \underline{M}(L)] = [\underline{F}_L, \underline{C}_L].$$

- Ensemble des équations gouvernant le mouvement d'une poutre élastique obéissant à la loi de comportement standard inextensible dans le cadre d'analyse non-linéaire DI-RF (exemple de condition à la limite purement cinématique imposée en l'extrémité amont et purement statique en l'extrémité aval) :

$$\left[ \frac{\partial \underline{R}}{\partial S}, \frac{\partial \underline{M}}{\partial S} + \left( \underline{T} + \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S} \right) \wedge \underline{R} \right] + [\underline{F}_0, \underline{C}_0] = [\bar{\rho}_0 \dot{\underline{U}}, i_0^\rho \cdot \dot{\underline{\Omega}} + \underline{\Omega} \wedge (i_0^\rho \cdot \underline{\Omega})],$$

$$\underline{E} = \underline{0}, \quad \left( {}^t \underline{R} \cdot \underline{M} \right)_T = \mu J W_T,$$

$$\left( {}^t \underline{R} \cdot \underline{M} \right)_\perp = E \underline{I} \cdot \underline{W}_\perp,$$

$$\left( \bar{\xi}(0), \underline{R}(0) - \underline{\mathbb{1}} \right) = \left( \bar{\xi}_0, \underline{R}_0 - \underline{\mathbb{1}} \right), \quad [\underline{R}(L), \underline{M}(L)] = [\underline{F}_L, \underline{C}_L].$$



## Chapitre 4

# Poutres élastiques en transformation infinitésimale

Les équations de la dynamique d'une poutre élastique, obtenues à la fin du chapitre 3, sont *non-linéaires*. On se propose maintenant de les linéariser en acceptant de se restreindre à l'étude des transformations infinitésimales autour de l'état naturel.

### 4.1 Linéarisation des équations autour de l'état naturel

L'hypothèse de la transformation infinitésimale en théorie des poutres s'écrit (cf chapitre 1) :

$$\left| \frac{d\bar{\xi}}{dS} \right| \ll 1, \quad \text{et} \quad |\underline{R} - \underline{\mathbb{1}}| \ll 1.$$

Dire que la transformation est infinitésimale est équivalent à dire que, non seulement la déformation mais aussi la rotation sont infinitésimales. Ainsi, l'hypothèse de la transformation infinitésimale va permettre la linéarisation systématique des équations de la dynamique non-linéaire des poutres élastiques du cadre d'analyse DI-RF obtenues à la fin du chapitre 3. On a vu au chapitre 1, que cette linéarisation commençait par le déplacement lui-même :

$$\left( \bar{\xi}(S), \underline{R}(S) - \underline{\mathbb{1}} \right) \simeq \left( \bar{\xi}(S), \underline{\theta}(S) \right),$$

et permettait l'introduction du pseudo-vecteur  $\underline{\theta}(S)$  de rotation infinitésimale des sections. La linéarisation de la déformation a été obtenue au chapitre 1 :

$$\mathbb{E}(S) \simeq \frac{d}{dS} \left\{ \bar{\xi}(S), \underline{\theta}(S) \right\} = \left\{ \frac{d\bar{\xi}}{dS}(S) + \underline{T}(S) \wedge \underline{\theta}(S), \frac{d\underline{\theta}}{dS}(S) \right\}.$$

Poursuivant cette linéarisation systématique, on obtient :

$$\begin{aligned} \underline{\Omega} &= \frac{d}{dt} \underline{R} \cdot {}^t \underline{R}, \\ &\simeq \frac{d}{dt} (\underline{\mathbb{1}} + \underline{\theta}) \cdot (\underline{\mathbb{1}} - \underline{\theta}), \end{aligned}$$

soit :

$$\underline{\Omega} \simeq \dot{\underline{\theta}}.$$

La loi de comportement qui figure dans les équations du mouvement du cadre d'analyse DI-RF suppose l'état initial naturel et est déjà linéarisée par rapport à la déformation. Sa linéarisation par rapport à la rotation (dite linéarisation géométrique) s'obtient en la composant d'abord à gauche par  $\underline{\underline{R}}$  et il vient :

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{R}} \\ \underline{\underline{M}} \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S} + \underline{\underline{T}} \wedge \underline{\underline{\theta}} \\ \frac{\partial \underline{\underline{\theta}}}{\partial S} \end{pmatrix},$$

relation qui entraîne inévitablement que la contrainte généralisée  $[\underline{\underline{R}}, \underline{\underline{M}}]$  est d'ordre 1 en :

$$\left| \frac{d\bar{\xi}}{dS} \right| + |\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{1}}|.$$

Cette constatation entraîne inévitablement la forme linéarisée suivante pour les équations du mouvement obtenues dans la section 3.3 du chapitre 3 :

- Équation du mouvement :
 
$$\begin{aligned} [\underline{\underline{R}}(L), \underline{\underline{M}}(L)] &= [\underline{\underline{F}}_L, \underline{\underline{C}}_L], \\ \left[ \frac{\partial \underline{\underline{R}}}{\partial S}, \frac{\partial \underline{\underline{M}}}{\partial S} + \underline{\underline{T}} \wedge \underline{\underline{R}} \right] + [\underline{\underline{F}}_0, \underline{\underline{C}}_0] &= [\bar{\rho}_0 \ddot{\bar{\xi}}, \underline{\underline{I}}_0^\rho \cdot \ddot{\underline{\underline{\theta}}}], \end{aligned}$$
- Loi de comportement élastique linéarisée :
 
$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{R}} \\ \underline{\underline{M}} \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S} + \underline{\underline{T}} \wedge \underline{\underline{\theta}} \\ \frac{\partial \underline{\underline{\theta}}}{\partial S} \end{pmatrix},$$
- Condition cinématique :
 
$$\{\bar{\xi}(0), \underline{\underline{\theta}}(0)\} = \{\bar{\xi}_0, \underline{\underline{\theta}}_0\},$$

où  $\underline{\underline{I}}_0^\rho$  désigne le terme d'ordre 0 dans le développement de  $\underline{\underline{i}}_0^\rho$  par rapport à la transformation. Rappelant que  $\underline{\underline{i}}_0^\rho$  désignait le tenseur d'inertie de la section droite dans son orientation actuelle, on en déduit que  $\underline{\underline{I}}_0^\rho$  n'est autre que le tenseur d'inertie de la section droite courante dans sa configuration de référence. Les données en efforts  $[\underline{\underline{F}}_L, \underline{\underline{C}}_L]$  et  $[\underline{\underline{F}}_0, \underline{\underline{C}}_0]$  qui, dans le cadre d'analyse DI-RF, étaient, en toute généralité, des fonctions du déplacement actuel doivent elles aussi subir l'opération de linéarisation. Les équations du mouvement montrent que le terme d'ordre 0 de leur développement est déjà d'ordre 1 en la transformation. Il est donc le seul à devoir être conservé et les données en efforts dans ce nouveau cadre d'analyse *doivent* être indépendantes de la transformation. L'analyse des nouvelles équations obtenues montre que tout se passe comme si l'on avait confondu configurations actuelle et initiale dans l'écriture de l'équation d'équilibre.

Ce nouveau cadre d'analyse, obtenu par linéarisation sous l'hypothèse de la transformation infinitésimale à partir de l'état naturel, sera désigné, en abrégé, dans toute la suite

par la locution : cadre d'analyse TIEN. Ce nouveau cadre d'analyse linéaire correspond aux « déformations infinitésimales—rotations infinitésimales » par opposition au cadre d'analyse DI-RF (« déformations infinitésimales—rotations finies »).

Les équations ci-dessus se réfèrent à une poutre sans liaison interne, ou poutre naturelle. Les équations du mouvement d'une poutre de Navier-Bernoulli (obéissant à la liaison interne de Navier-Bernoulli) dans le cadre d'analyse TIEN s'écrivent immédiatement :

- Équation du mouvement :
 
$$\begin{aligned} [\underline{R}(L), \underline{M}(L)] &= [\underline{F}_L, \underline{C}_L], \\ \left[ \frac{\partial \underline{R}}{\partial S}, \frac{\partial \underline{M}}{\partial S} + \underline{T} \wedge \underline{R} \right] + [\underline{F}_0, \underline{C}_0] &= [\bar{\rho}_0 \ddot{\underline{\xi}}, \underline{I}_0^\rho \cdot \ddot{\underline{\theta}}], \end{aligned}$$
- Loi de comportement :
 
$$\begin{aligned} \underline{T} \wedge \left( \frac{\partial \bar{\underline{\xi}}}{\partial S} + \underline{T} \wedge \underline{\theta} \right) &= \underline{0}, \\ \begin{pmatrix} \underline{R} \\ \underline{M} \end{pmatrix} &= \underline{A} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{\underline{\xi}}}{\partial S} + \underline{T} \wedge \underline{\theta} \\ \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial S} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\eta} \\ \underline{0} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
- Condition cinématique :
 
$$\{ \bar{\underline{\xi}}(0), \underline{\theta}(0) \} = \{ \bar{\underline{\xi}}_0, \underline{\theta}_0 \},$$

où  $\underline{\eta}$  désigne un vecteur *orthogonal* à  $\underline{T}$ , arbitraire. En d'autres termes, le multiplicateur de Lagrange associé à la liaison interne de Navier-Bernoulli s'identifie, dans le cadre TIEN, à l'effort tranchant.

Les équations qui gouvernent le mouvement des poutres de Navier-Bernoulli inextensibles dans le cadre TIEN s'écrivent :

- Équation du mouvement :
 
$$\begin{aligned} [\underline{R}(L), \underline{M}(L)] &= [\underline{F}_L, \underline{C}_L], \\ \left[ \frac{\partial \underline{R}}{\partial S}, \frac{\partial \underline{M}}{\partial S} + \underline{T} \wedge \underline{R} \right] + [\underline{F}_0, \underline{C}_0] &= [\bar{\rho}_0 \ddot{\underline{\xi}}, \underline{I}_0^\rho \cdot \ddot{\underline{\theta}}], \end{aligned}$$
- Loi de comportement :
 
$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\underline{\xi}}}{\partial S} + \underline{T} \wedge \underline{\theta} &= \underline{0}, \\ \begin{pmatrix} \underline{R} \\ \underline{M} \end{pmatrix} &= \underline{A} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{\underline{\xi}}}{\partial S} + \underline{T} \wedge \underline{\theta} \\ \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial S} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\eta} \\ \underline{0} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$
- Condition cinématique :
 
$$\{ \bar{\underline{\xi}}(0), \underline{\theta}(0) \} = \{ \bar{\underline{\xi}}_0, \underline{\theta}_0 \},$$

où  $\underline{\eta}$  désigne un vecteur maintenant totalement arbitraire, le multiplicateur de Lagrange associé à la liaison interne d'inextensibilité s'identifiant, dans le cadre d'analyse linéarisé TIEN, à l'effort normal.

## 4.2 Formulations variationnelles en élasto-statique linéarisée

On se propose ici de revenir aux équations du mouvement des poutres élastiques dans le cadre d'analyse linéarisé TIEN et d'en faire une étude plus approfondie dans le cas particulier de la statique (les termes d'accélération sont nuls ou négligeables). Le corps de connaissance ainsi obtenu, étendu à l'étude de la statique des assemblages de poutres en transformation infinitésimale (section 4.3), est désigné classiquement par le vocable « résistance des matériaux ».

### 4.2.1 Équilibre d'une poutre naturelle

On considère une poutre occupant dans sa configuration initiale, prise comme référence et supposée dénuée de contrainte, une courbe régulière paramétrée par son abscisse curviligne  $S \in ]0, L[$ . Le distributeur de déplacement linéarisé est astreint à prendre les valeurs imposées  $\{\bar{\xi}_0, \underline{\theta}_0\}$  et  $\{\bar{\xi}_L, \underline{\theta}_L\}$  aux deux extrémités. Cette poutre étant supposée élastique sans liaison interne (poutre naturelle) de tenseur de modules d'élasticité  $\underline{\underline{A}}$ , on étudie son équilibre sous l'effet d'une distribution linéique de torseur réparti  $[\bar{F}_0, \bar{C}_0]$  dans le cadre d'analyse linéarisé TIEN.

L'ensemble des équations régissant le champ de distributeur de déplacement linéarisé  $\{\bar{\xi}(S), \underline{\theta}(S)\}$  et le champ de torseur de contrainte généralisée  $[\underline{R}(S), \underline{M}(S)]$  à l'équilibre s'écrit (cf section 4.1) :

- Équation d'équilibre :

$$\left[ \frac{d\underline{R}}{dS}, \frac{d\underline{M}}{dS} + \underline{T} \wedge \underline{R} \right] + [\bar{F}_0, \bar{C}_0] = [\underline{0}, \underline{0}],$$

- Loi de comportement élastique linéarisée :

$$\begin{pmatrix} \underline{R} \\ \underline{M} \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{d\bar{\xi}}{dS} + \underline{T} \wedge \underline{\theta} \\ \frac{d\underline{\theta}}{dS} \end{pmatrix},$$

- Conditions cinématiques :

$$\begin{aligned} (\bar{\xi}(0), \underline{\theta}(0)) &= (\bar{\xi}_0, \underline{\theta}_0), \\ (\bar{\xi}(L), \underline{\theta}(L)) &= (\bar{\xi}_L, \underline{\theta}_L). \end{aligned}$$

Faisant usage de la section 1.3.2, on peut donner une expression plus compacte de ces équations en y reconnaissant la dérivée du champ de torseur et la dérivée du champ de



distributeur :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dS} [\underline{R}, \underline{M}] + [\underline{F}_0, \underline{C}_0] = [\underline{0}, \underline{0}], \\ [\underline{R}, \underline{M}] = \underline{A} \cdot \frac{d}{dS} \{ \underline{\xi}, \underline{\theta} \}, \\ \{ \underline{\xi}(0), \underline{\theta}(0) \} = \{ \underline{\xi}_0, \underline{\theta}_0 \}, \quad \{ \underline{\xi}(L), \underline{\theta}(L) \} = \{ \underline{\xi}_L, \underline{\theta}_L \}. \end{array} \right. \quad S \in ]0, L[,$$

Pour faire l'étude de ce problème aux limites, il est nécessaire de préciser la régularité de la fonction donnée  $S \rightarrow [\underline{F}_0(S), \underline{C}_0(S)]$ . En pratique, on sera confronté à des distributions régulières de torseurs d'efforts extérieurs imposés (cas de la pesanteur), mais également à des efforts *ponctuels* exercés en un nombre fini de points (intérieurs) donnés de la poutre. Il faudra donc pouvoir prendre en compte des distributions d'efforts extérieurs du type :

$$[\underline{F}_0, \underline{C}_0] = [\underline{F}_{\text{rég}}(S), \underline{C}_{\text{rég}}(S)] + \sum_{i=1}^n [\underline{F}_i, \underline{C}_i] \delta_{S_i}(S),$$

où  $\underline{F}_{\text{rég}}$  et  $\underline{C}_{\text{rég}}$  désignent des fonctions intégrables, et  $\delta_{S_i}$ , la mesure de Dirac en  $S = S_i$ . Le lecteur familier de la dérivation au sens des distributions continuera, dans ce cadre, d'écrire l'équation d'équilibre sous la forme :

$$\frac{d}{dS} [\underline{R}, \underline{M}] + [\underline{F}_0, \underline{C}_0] = [\underline{0}, \underline{0}].$$

Le lecteur moins familier de la dérivation au sens des distributions retiendra que l'écriture ci-dessus est équivalente à :

$$\begin{aligned} \forall i \in \{0, 1, \dots, n\}, \quad \forall S \in ]S_i, S_{i+1}[, \quad \frac{d}{dS} [\underline{R}, \underline{M}] + [\underline{F}_{\text{rég}}, \underline{C}_{\text{rég}}] &= [\underline{0}, \underline{0}], \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad [[\underline{R}]](S_i), [[\underline{M}]](S_i) + [\underline{F}_i, \underline{C}_i] &= [\underline{0}, \underline{0}], \end{aligned}$$

où la dérivée est prise ici au sens classique. On a posé  $S_0 = 0$ ,  $S_{n+1} = L$  et  $[[f]](S_i) = f(S_i+) - f(S_i-)$  désigne le *saut* de la fonction  $f$  au point  $S_i$ . Les équations de saut aux points  $S = S_i$  ont une interprétation mécanique claire en terme d'équilibre de point (la somme des torseurs d'efforts s'exerçant sur le point de la poutre défini par  $S = S_i$  est nulle).

Cette régularité supposée de la donnée en effort extérieur  $[\underline{F}_0, \underline{C}_0]$  étant dorénavant acquise, on définit, comme en élasto-statique tridimensionnelle linéarisée, les ensembles *CA* de champs de déplacement *cinématiquement admissibles* avec les données du problèmes et *SA* de champs de contrainte généralisée *statiquement admissibles* avec les données du problème :

$$\begin{aligned} \text{CA} &= \left\{ \left\{ \hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}} \right\} \in H^1(]0, L[; \mathbb{R}^6) \mid \left\{ \hat{\underline{\xi}}(0), \hat{\underline{\theta}}(0) \right\} = \left\{ \underline{\xi}_0, \underline{\theta}_0 \right\}, \right. \\ &\quad \left. \text{et } \left\{ \hat{\underline{\xi}}(L), \hat{\underline{\theta}}(L) \right\} = \left\{ \underline{\xi}_L, \underline{\theta}_L \right\} \right\}, \\ \text{SA} &= \left\{ \left[ \underline{R}^*, \underline{M}^* \right] \in L^2(]0, L[; \mathbb{R}^6) \mid \frac{d}{dS} [\underline{R}^*, \underline{M}^*] + [\underline{F}_0, \underline{C}_0] = [\underline{0}, \underline{0}] \right\}. \end{aligned}$$

Les ensembles  $CA$  et  $SA$  ont clairement des structures d'espaces affines. Leurs espaces vectoriels associés sont :

$$CA_0 = \left\{ \left\{ \hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}} \right\} \in H^1(]0, L[; \mathbb{R}^6) \mid \left\{ \hat{\underline{\xi}}(0), \hat{\underline{\theta}}(0) \right\} = \left\{ \hat{\underline{\xi}}(L), \hat{\underline{\theta}}(L) \right\} = \left\{ \underline{0}, \underline{0} \right\} \right\},$$

$$SA_0 = \left\{ \left[ \underline{R}^*, \underline{M}^* \right] \in L^2(]0, L[; \mathbb{R}^6) \mid \frac{d}{dS} \left[ \underline{R}^*, \underline{M}^* \right] = \left[ \underline{0}, \underline{0} \right] \right\}.$$

Ils sont appelés respectivement espace des champs *cinématiquement admissibles à zéro* et espace des champs *d'auto-contrainte*. L'espace affine  $CA$  est, comme en élasto-statique tridimensionnelle linéarisée, toujours de dimension infinie. Par contre, à l'opposé du cas tridimensionnel, l'espace  $SA$  est toujours de dimension finie. En effet, sa dérivée le long de la poutre étant imposée, un champ de torseur  $[\underline{R}^*(S), \underline{M}^*(S)]$  statiquement admissible est complètement déterminé par la donnée de la valeur qu'il prend sur une des extrémités de la poutre. En conséquence, l'espace  $SA$  est ici de dimension 6. Le fait que l'espace des champs statiquement admissibles soit toujours de dimension finie est une spécificité de la théorie des poutres par rapport à l'élasticité tridimensionnelle et conduit à privilégier, dans de nombreux cas, les formulations en contrainte. On remarquera que, les fonctions de  $H^1(]0, L[; \mathbb{R}^6)$  étant continues et, de plus, se prolongeant par continuité en  $S = 0, L$ , les conditions aux limites qui interviennent dans la définition de l'espace  $CA$  ont bien un sens, ce qui ne serait pas le cas avec des fonctions de  $L^2(]0, L[; \mathbb{R}^6)$ . Dans le cas de la définition de  $SA$ , il se trouve que les fonctions de  $L^2$  qui satisfont l'équation d'équilibre admettent un prolongement par continuité en  $S = 0, L$ . Cela permet de parler des valeurs prises aux extrémités par un champ statiquement admissible. Cela permettrait également de donner un sens et d'incorporer des conditions aux limites en effort dans la définition de  $SA$ , dans toute situation où il y aurait de telles conditions aux limites en effort.

On dispose alors des cinq formulations équivalentes suivantes pour caractériser l'équilibre.

1. **Équations locales.** On recherche  $\{\bar{\underline{\xi}}, \underline{\theta}\} \in CA$  et  $[\underline{R}, \underline{M}] \in SA$  qui satisfont en outre la loi de comportement. L'ensemble des équations satisfaites par ces deux champs s'écrivent donc :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d}{dS} [\underline{R}, \underline{M}] + [\underline{F}_0, \underline{C}_0] = [\underline{0}, \underline{0}], \\ [\underline{R}, \underline{M}] = \underline{A} \cdot \frac{d}{dS} \{\bar{\underline{\xi}}, \underline{\theta}\}, \\ \{\bar{\underline{\xi}}(0), \underline{\theta}(0)\} = \{\bar{\underline{\xi}}_0, \underline{\theta}_0\}, \quad \{\bar{\underline{\xi}}(L), \underline{\theta}(L)\} = \{\bar{\underline{\xi}}_L, \underline{\theta}_L\}. \end{array} \right| S \in ]0, L[,$$

2. **Formulation faible en déplacement.** On recherche  $\{\bar{\underline{\xi}}, \underline{\theta}\} \in CA$  satisfaisant :

$$\forall \{\hat{\underline{u}}, \hat{\underline{\omega}}\} \in CA_0, \quad \int_0^L \frac{d}{dS} \{\bar{\underline{\xi}}, \underline{\theta}\} \cdot \underline{A} \cdot \frac{d}{dS} \{\hat{\underline{u}}, \hat{\underline{\omega}}\} = \int_0^L [\underline{F}_0, \underline{C}_0] \cdot \{\hat{\underline{u}}, \hat{\underline{\omega}}\},$$

et le champ de torseur  $[\underline{R}, \underline{M}]$  qui lui est associé par la loi de comportement.

3. **Formulation variationnelle en déplacement.** On recherche  $\{\bar{\xi}, \underline{\theta}\} \in CA$  réalisant le minimum sur  $CA$  de la fonctionnelle strictement convexe sur  $CA$  définie par :

$$E_p(\{\hat{\xi}, \hat{\theta}\}) = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{d}{dS} \{\hat{\xi}, \hat{\theta}\} \cdot \underline{A} \cdot \frac{d}{dS} \{\hat{\xi}, \hat{\theta}\} - \int_0^L [\underline{F}_0, \underline{C}_0] \cdot \{\hat{\xi}, \hat{\theta}\},$$

et dite « énergie potentielle totale ». En d'autres termes, on recherche  $\{\bar{\xi}, \underline{\theta}\} \in CA$  satisfaisant :

$$\forall \{\hat{\xi}, \hat{\theta}\} \in CA, \quad E_p(\{\bar{\xi}, \underline{\theta}\}) \leq E_p(\{\hat{\xi}, \hat{\theta}\}),$$

et le champ de tenseur  $[\underline{R}, \underline{M}]$  qui lui est associé par la loi de comportement.

4. **Formulation faible en contrainte.** On recherche  $[\underline{R}, \underline{M}] \in SA$  satisfaisant :

$$\forall [\underline{R}^*, \underline{M}^*] \in SA_0, \quad \int_0^L [\underline{R}, \underline{M}] \cdot \underline{A}^{-1} \cdot [\underline{R}^*, \underline{M}^*] = \{\bar{\xi}_L, \underline{\theta}_L\} \cdot [\underline{R}^*(L), \underline{M}^*(L)] - \{\bar{\xi}_0, \underline{\theta}_0\} \cdot [\underline{R}^*(0), \underline{M}^*(0)],$$

et le champ de distributeur  $\{\bar{\xi}, \underline{\theta}\}$  qui lui est associé par la loi de comportement (et une des deux conditions aux limites).

5. **Formulation variationnelle en contrainte.** On recherche  $[\underline{R}, \underline{M}] \in SA$  réalisant le minimum sur  $SA$  de la fonctionnelle strictement convexe sur  $SA$  définie par :

$$E_c([\underline{R}^*, \underline{M}^*]) = \frac{1}{2} \int_0^L [\underline{R}^*, \underline{M}^*] \cdot \underline{A}^{-1} \cdot [\underline{R}^*, \underline{M}^*] - \{\bar{\xi}_L, \underline{\theta}_L\} \cdot [\underline{R}^*(L), \underline{M}^*(L)] + \{\bar{\xi}_0, \underline{\theta}_0\} \cdot [\underline{R}^*(0), \underline{M}^*(0)],$$

et dite « énergie complémentaire ». Autrement dit, on recherche  $[\underline{R}, \underline{M}] \in SA$  satisfaisant :

$$\forall [\underline{R}^*, \underline{M}^*] \in SA, \quad E_c([\underline{R}, \underline{M}]) \leq E_c([\underline{R}^*, \underline{M}^*]),$$

et le champ de distributeur  $\{\bar{\xi}, \underline{\theta}\}$  qui lui est associé par la loi de comportement (et une des deux conditions aux limites).

L'équivalence entre ces cinq formulations se démontre de la manière suivante.

(1)  $\Leftrightarrow$  (2). Intégration par parties.

(2)  $\Leftrightarrow$  (3). La fonctionnelle  $E_p$  est convexe différentiable sur  $CA$  (muni de la norme  $H^1$ ) et (2) exprime que sa différentielle en  $\{\bar{\xi}, \underline{\theta}\}$  est nulle, ce qui pour une fonctionnelle convexe différentiable est une caractérisation de minimum.

(1)  $\Leftrightarrow$  (4). Intégration par parties.

(4)  $\Leftrightarrow$  (5). La fonctionnelle  $E_c$  est convexe différentiable sur  $SA$  et (4) exprime que sa différentielle en  $[\underline{R}, \underline{M}]$  est nulle.

On a alors le résultat fondamental suivant.

*Le problème d'équilibre (dans une quelconque des cinq formulations équivalentes ci-dessus) admet une unique solution  $(\{\bar{\xi}, \underline{\theta}\}, [\underline{R}, \underline{M}]) \in CA \times SA$ .*

Cette affirmation se vérifie aisément sur les équations locales, où, injectant la loi de comportement dans l'équation d'équilibre, on constate que le champ de distributeur de déplacement à l'équilibre est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2. L'ensemble des solutions est donné par une solution particulière à laquelle on ajoute l'ensemble des solutions de l'équation homogène qui n'est autre que l'ensemble des fonctions affines. Comme on dispose de *deux* conditions aux limites, cette fonction affine se trouve totalement déterminée. On peut également fournir une autre démonstration à partir de la formulation variationnelle en contrainte qui a l'avantage par rapport à la précédente de se transposer immédiatement au cas de l'équilibre de structures constituées d'un nombre fini de poutres distinctes. La fonctionnelle  $E_c$  est strictement convexe sur l'espace affine de dimension finie  $SA$ . En outre, elle tend vers l'infini à l'infini. Il en résulte l'existence et l'unicité d'un minimum.

Concluons cette section par quelques commentaires liés à la terminologie.

- Les fonctionnelles quadratiques :

$$\begin{aligned} W(\{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\}) &= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{d}{dS} \{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\} \cdot \underline{A} \cdot \frac{d}{dS} \{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\}, \\ W^*([\underline{R}^*, \underline{M}^*]) &= \frac{1}{2} \int_0^L [\underline{R}^*, \underline{M}^*] \cdot \underline{A}^{-1} \cdot [\underline{R}^*, \underline{M}^*], \end{aligned}$$

sont classiquement baptisées respectivement « énergie élastique de déformation » et « énergie élastique de contrainte ». L'usage conduit également à noter :

$$\begin{aligned} \Phi(\{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\}) &= \int_0^L [\underline{F}_0, \underline{C}_0] \cdot \{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\}, \\ \Phi^*([\underline{R}^*, \underline{M}^*]) &= \{\bar{\underline{\xi}}_L, \underline{\theta}_L\} \cdot [\underline{R}^*(L), \underline{M}^*(L)] \\ &\quad - \{\bar{\underline{\xi}}_0, \underline{\theta}_0\} \cdot [\underline{R}^*(0), \underline{M}^*(0)], \end{aligned}$$

ce qui a l'avantage de mettre en évidence que  $\Phi$  est construite à partir des données statiques, tandis que  $\Phi^*$  est construite à partir des données cinématiques. Avec ces notations, on a :

$$\begin{aligned} E_p(\{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\}) &= W(\{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\}) - \Phi(\{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\}), \\ E_c([\underline{R}^*, \underline{M}^*]) &= W^*([\underline{R}^*, \underline{M}^*]) - \Phi^*([\underline{R}^*, \underline{M}^*]). \end{aligned}$$

- Si  $(\{\bar{\underline{\xi}}, \underline{\theta}\}, [\underline{R}, \underline{M}]) \in CA \times SA$  est la solution du problème d'équilibre, une simple intégration par parties donne la formule de Clapeyron :

$$\begin{aligned} W(\{\bar{\underline{\xi}}, \underline{\theta}\}) &= W^*([\underline{R}, \underline{M}]) = \frac{1}{2} \int_0^L [\underline{R}, \underline{M}] \cdot \frac{d}{dS} \{\bar{\underline{\xi}}, \underline{\theta}\} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L [\underline{F}_0, \underline{C}_0] \cdot \{\bar{\underline{\xi}}, \underline{\theta}\} + \frac{1}{2} ([\underline{R}(L), \underline{M}(L)] \cdot \{\bar{\underline{\xi}}_L, \underline{\theta}_L\} - [\underline{R}(0), \underline{M}(0)] \cdot \{\bar{\underline{\xi}}_0, \underline{\theta}_0\}), \\ &= \frac{1}{2} \Phi(\{\bar{\underline{\xi}}, \underline{\theta}\}) + \frac{1}{2} \Phi^*([\underline{R}, \underline{M}]). \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement :

$$E_p(\{\bar{\underline{\xi}}, \underline{\theta}\}) + E_c([\underline{R}, \underline{M}]) = 0,$$

c'est-à-dire que les minima des fonctionnelles « énergie potentielle totale » et « énergie complémentaire » sont *opposés*. C'est là l'origine de la terminologie d'énergie « complémentaire ». Cela conduit à la réécriture condensée suivante des deux théorèmes de minimum.

$$\forall \left( \{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\}, [\underline{R}^*, \underline{M}^*] \right) \in CA \times SA, \\ - E_c([\underline{R}^*, \underline{M}^*]) \leq -E_c([\underline{R}, \underline{M}]) = E_p(\{\bar{\underline{\xi}}, \underline{\theta}\}) \leq E_p(\{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\}).$$

- On a vu que l'espace  $SA$  des champs statiquement admissibles a une structure d'espace affine de *dimension* 6. La terminologie consacrée est de dire que l'on a affaire à un problème *hyperstatique de degré* 6. C'est la situation que l'on obtient en posant l'équilibre d'une poutre avec uniquement des conditions aux limites cinématiques. Dans le cas du problème mixte (condition à la limite en déplacement à une extrémité et en effort à l'autre extrémité), l'espace affine  $SA$  se réduit à un seul élément, avec pour conséquence immédiate que la distribution d'effort intérieur à l'équilibre est indépendante de la loi de comportement de la poutre. Dans cette situation, on dit que le problème d'équilibre en jeu est *isostatique*. Dans le cas où les deux conditions aux limites sont données en effort, deux cas peuvent se produire, suivant que la condition :

$$[\underline{F}_0, \underline{C}_0] + [\underline{F}_L, \underline{C}_L] + \int_0^L [\bar{\underline{F}}_0, \bar{\underline{C}}_0] = [\underline{0}, \underline{0}],$$

traduisant la compatibilité des données en effort avec l'équilibre, est satisfaite ou non.

- Si elle est satisfaite, l'espace affine  $SA$  se réduit toujours à un seul élément. Le problème d'équilibre est isostatique et la distribution d'effort à l'équilibre est indépendante du comportement. L'unicité de la solution en déplacement est perdue et ne subsiste que modulo l'espace des champs de déplacement rigidifiant le système (ici les champs de distributeur constants). Cela se traduit par le fait que l'énergie potentielle totale n'est plus strictement convexe sur  $CA$ , mais le redevient si on la définit sur l'espace  $CA$  quotienté par l'espace des champs rigidifiants infinitésimaux (qui est de dimension 6).
- Si elle n'est pas satisfaite, l'espace affine  $SA$  est vide et le problème d'équilibre considéré n'a pas de solution. On dit que le problème d'équilibre est *hypostatique*. Il est alors nécessaire de prendre en compte l'accélération pour étudier le mouvement. De façon plus générale, il est possible de considérer des problèmes d'équilibre sur une poutre dans lesquels, les conditions à la limite à chaque extrémité sont données, partie en effort, partie en déplacement. Le problème d'équilibre associé reste bien posé sous deux conditions.

1. Les conditions aux extrémités doivent être telles que la quantité :

$$[\underline{R}(L), \underline{M}(L)] \cdot \{\bar{\underline{\xi}}(L), \underline{\theta}(L)\} - [\underline{R}(0), \underline{M}(0)] \cdot \{\bar{\underline{\xi}}(0), \underline{\theta}(0)\},$$

définit une forme linéaire aussi bien en les données qu'en les inconnues. C'est, par exemple, le cas si, à chaque extrémité, on impose la valeur d'un seul élément du couple  $(R_i, \bar{\xi}_i)$  ( $i = x, y, z$ ), ainsi que la valeur d'un seul élément du couple  $(M_i, \theta_i)$  ( $i = x, y, z$ ).

2. Les conditions statiques aux extrémités doivent être compatibles avec la condition d'équilibre global :

$$[\underline{R}(L), \underline{M}(L)] - [\underline{R}(0), \underline{M}(0)] + \int_0^L [\underline{F}_0, \underline{C}_0] = [\underline{0}, \underline{0}],$$

cette condition étant elle-même équivalente au fait que  $SA$  soit non vide.

### 4.2.2 Équilibre d'une poutre de Navier-Bernoulli

Dans cette section, on considère encore une poutre occupant dans sa configuration initiale, prise comme référence et supposée dénuée de contrainte, une courbe régulière paramétrée par son abscisse curviligne  $S \in ]0, L[$ . Le distributeur de déplacement linéarisé est astreint à prendre les valeurs imposées  $\{\underline{\xi}_0, \underline{\theta}_0\}$  et  $\{\underline{\xi}_L, \underline{\theta}_L\}$  aux deux extrémités. Cette fois, la modélisation poutre est supposée issue de la considération d'un cylindre tridimensionnel élancé constitué d'un matériau élastique homogène et isotrope de module d'Young  $E$  et de module de cisaillement  $\mu$ . En conséquence, cette poutre sera supposée obéir à la loi de comportement standard (3.5), c'est-à-dire à la liaison interne de Navier-Bernoulli et aux relations de comportement :

$$\begin{aligned} R_T &= E|\mathcal{S}| \left( \frac{d\underline{\xi}}{dS} \cdot \underline{T} \right), \\ \underline{M} &= \mu J \left( \frac{d\underline{\theta}}{dS} \cdot \underline{T} \right) \underline{T} + E \underline{I} \cdot \left( \frac{d\underline{\theta}}{dS} \right)_{\perp}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

où  $|\mathcal{S}|$  est l'aire de la section droite courante,  $\underline{I}$  son tenseur d'inertie géométrique,  $J$  son moment d'inertie de torsion et où l'on a fait usage de la décomposition  $\underline{V} = V_T \underline{T} + \underline{V}_{\perp}$ , de tout vecteur  $\underline{V}$  attaché à un point de la ligne moyenne, en partie tangentielle  $V_T \underline{T}$  et partie orthogonale  $\underline{V}_{\perp}$ . On étudie l'équilibre de cette poutre de Navier-Bernoulli sous l'effet d'une distribution linéique de torseur réparti  $[\underline{F}_0, \underline{C}_0]$ , le cadre d'analyse étant celui de la transformation infinitésimale autour de l'état naturel.

L'ensemble des équations régissant le champ de distributeur de déplacement linéarisé  $\{\underline{\xi}(S), \underline{\theta}(S)\}$  et le champ de torseur de contrainte généralisée  $[\underline{R}(S), \underline{M}(S)]$  à l'équilibre s'écrit (cf section 4.1) :

- Équation d'équilibre :

$$\frac{d}{dS} [\underline{R}, \underline{M}] + [\underline{F}_0, \underline{C}_0] = [\underline{0}, \underline{0}],$$

- Loi de comportement élastique linéarisée :

$$\underline{\theta}_{\perp} = \underline{T} \wedge \frac{d\underline{\xi}}{dS},$$

$$R_T = E|\mathcal{S}| \left( \frac{d\underline{\xi}}{dS} \cdot \underline{T} \right),$$

$$\underline{M} = \mu J \left( \frac{d\underline{\theta}}{dS} \cdot \underline{T} \right) \underline{T} + E \underline{I} \cdot \left( \frac{d\underline{\theta}}{dS} \right)_{\perp},$$

- Conditions cinématiques :

$$\left\{ \underline{\xi}(0), \underline{\theta}(0) \right\} = \left\{ \underline{\xi}_0, \underline{\theta}_0 \right\}, \quad \left\{ \underline{\xi}(L), \underline{\theta}(L) \right\} = \left\{ \underline{\xi}_L, \underline{\theta}_L \right\},$$

où les relations de comportement qui font intervenir les multiplicateurs de Lagrange associés à la liaison interne de Navier-Bernoulli n'ont pas été écrites, puisque, les multiplicateurs de Lagrange étant indéterminés, ces équations n'apportent aucune information supplémentaire (ce sont en fait celles qui déterminent la valeur des multiplicateurs lors de la résolution).

Du point de vue de la régularité de la donnée statique  $[\bar{\underline{E}}_0, \bar{\underline{C}}_0]$ , on supposera, comme dans la section précédente, qu'elle est la somme d'une partie régulière (c'est-à-dire d'une fonction intégrable à valeur dans  $\mathbb{R}^6$ ) et éventuellement d'une somme finie de torseurs ponctuels exercés en des points intérieurs à la poutre. La liaison interne étant d'expression purement cinématique, elle est maintenant incorporée dans la définition de l'espace affine  $CA$  des champs cinématiquement admissibles, l'espace affine  $SA$  demeurant inchangé :

$$CA = \left\{ \left\{ \hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}} \right\} \in H^1(]0, L[; \mathbb{R}^6) \mid \hat{\underline{\theta}}_{\perp} = \underline{T} \wedge \frac{d\hat{\underline{\xi}}}{dS}, \quad \left\{ \hat{\underline{\xi}}(0), \hat{\underline{\theta}}(0) \right\} = \left\{ \bar{\underline{\xi}}_0, \underline{\theta}_0 \right\}, \right. \\ \left. \text{et } \left\{ \hat{\underline{\xi}}(L), \hat{\underline{\theta}}(L) \right\} = \left\{ \bar{\underline{\xi}}_L, \underline{\theta}_L \right\} \right\},$$

$$SA = \left\{ \left[ \underline{R}^*, \underline{M}^* \right] \in L^2(]0, L[; \mathbb{R}^6) \mid \frac{d}{dS} \left[ \underline{R}^*, \underline{M}^* \right] + [\bar{\underline{E}}_0, \bar{\underline{C}}_0] = [\underline{0}, \underline{0}] \right\}.$$

On notera encore  $CA_0$  et  $SA_0$ , les espaces vectoriels associés à ces espaces affines (espaces des champs cinématiquement admissibles à zéro et des champs d'auto-contrainte). On retiendra que la prise en compte de liaison interne ne change pas le degré d'hyperstaticité du problème d'équilibre. Comme dans la section précédente, on a alors les cinq formulations équivalentes suivantes de l'équilibre.

1. **Équations locales.** On recherche  $\{\bar{\underline{\xi}}, \underline{\theta}\} \in CA$  et  $[\underline{R}, \underline{M}] \in SA$  qui satisfont en outre la partie déterminée (4.1) de la loi de comportement. L'ensemble des équations satisfaites par ces deux champs s'écrivent donc :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d}{dS} [\underline{R}, \underline{M}] + [\bar{\underline{E}}_0, \bar{\underline{C}}_0] = [\underline{0}, \underline{0}], \\ \underline{\theta}_{\perp} = \underline{T} \wedge \frac{d\bar{\underline{\xi}}}{dS}, \\ R_T = E|\mathcal{S}| \left( \frac{d\bar{\underline{\xi}}}{dS} \cdot \underline{T} \right), \\ \underline{M} = \mu J \left( \frac{d\theta}{dS} \cdot \underline{T} \right) \underline{T} + E \underline{I} \cdot \left( \frac{d\theta}{dS} \right)_{\perp}, \\ \left\{ \bar{\underline{\xi}}(0), \underline{\theta}(0) \right\} = \left\{ \bar{\underline{\xi}}_0, \underline{\theta}_0 \right\}, \quad \left\{ \bar{\underline{\xi}}(L), \underline{\theta}(L) \right\} = \left\{ \bar{\underline{\xi}}_L, \underline{\theta}_L \right\}. \end{array} \right\} S \in ]0, L[,$$

2. **Formulation faible en déplacement.** On recherche  $\{\bar{\underline{\xi}}, \underline{\theta}\} \in CA$  satisfaisant :

$$\forall \{\hat{\underline{u}}, \hat{\underline{\omega}}\} \in CA_0, \\ \int_0^L E|\mathcal{S}| \left( \frac{d\bar{\underline{\xi}}}{dS} \right)_T \left( \frac{d\hat{\underline{u}}}{dS} \right)_T + \mu J \left( \frac{d\theta}{dS} \right)_T \left( \frac{d\hat{\underline{\omega}}}{dS} \right)_T + E \left( \frac{d\theta}{dS} \right)_{\perp} \cdot \underline{I} \cdot \left( \frac{d\hat{\underline{\omega}}}{dS} \right)_{\perp} \\ = \int_0^L [\bar{\underline{E}}_0, \bar{\underline{C}}_0] \cdot \{\hat{\underline{u}}, \hat{\underline{\omega}}\},$$

et le champ de torseur  $[\underline{R}, \underline{M}]$  qui lui est associé par la loi de comportement et l'équation d'équilibre (pour la détermination de l'effort tranchant).

3. **Formulation variationnelle en déplacement.** On recherche  $\{\bar{\xi}, \underline{\theta}\} \in CA$  réalisant le minimum sur  $CA$  de l'énergie potentielle totale qui est la fonctionnelle strictement convexe sur  $CA$  définie par :

$$E_p(\{\hat{\xi}, \hat{\theta}\}) = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ E|\mathcal{S}| \left( \frac{d\hat{\xi}}{dS} \right)_T^2 + \mu J \left( \frac{d\hat{\theta}}{dS} \right)_T^2 + E \left( \frac{d\hat{\theta}}{dS} \right)_\perp \cdot \underline{I} \cdot \left( \frac{d\hat{\theta}}{dS} \right)_\perp \right\} - \int_0^L [\bar{F}_0, \bar{C}_0] \cdot \{\hat{\xi}, \hat{\theta}\},$$

et le champ de torseur  $[\underline{R}, \underline{M}]$  qui lui est associé par la loi de comportement et l'équation d'équilibre (pour la détermination de l'effort tranchant).

4. **Formulation faible en contrainte.** On recherche  $[\underline{R}, \underline{M}] \in SA$  satisfaisant :

$$\forall [\underline{R}^*, \underline{M}^*] \in SA_0, \\ \int_0^L \frac{R_T R_T^*}{E|\mathcal{S}|} + \frac{M_T M_T^*}{\mu J} + \frac{\underline{M}_\perp \cdot \underline{I}^{-1} \cdot \underline{M}_\perp^*}{E} = \{\bar{\xi}_L, \underline{\theta}_L\} \cdot [\underline{R}^*(L), \underline{M}^*(L)] - \{\bar{\xi}_0, \underline{\theta}_0\} \cdot [\underline{R}^*(0), \underline{M}^*(0)],$$

et le champ de distributeur  $\{\bar{\xi}, \underline{\theta}\}$  qui lui est associé par la loi de comportement (et une des deux conditions aux limites).

5. **Formulation variationnelle en contrainte.** On recherche  $[\underline{R}, \underline{M}] \in SA$  réalisant le minimum sur  $SA$  de l'énergie complémentaire qui est la fonctionnelle strictement convexe sur  $SA$  définie par :

$$E_c([\underline{R}^*, \underline{M}^*]) = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \frac{(R_T^*)^2}{E|\mathcal{S}|} + \frac{(M_T^*)^2}{\mu J} + \frac{\underline{M}_\perp^* \cdot \underline{I}^{-1} \cdot \underline{M}_\perp^*}{E} \right\} - \{\bar{\xi}_L, \underline{\theta}_L\} \cdot [\underline{R}^*(L), \underline{M}^*(L)] + \{\bar{\xi}_0, \underline{\theta}_0\} \cdot [\underline{R}^*(0), \underline{M}^*(0)],$$

et le champ de distributeur  $\{\bar{\xi}, \underline{\theta}\}$  qui lui est associé par la loi de comportement (et une des deux conditions aux limites).

La démonstration de l'équivalence entre ces cinq formulations s'opère exactement comme dans la section précédente. De même, la transposition au mot à mot de la preuve donnée dans la section précédente permet d'obtenir :

*le problème d'équilibre (dans une quelconque des cinq formulations équivalentes ci-dessus) admet une unique solution  $(\{\bar{\xi}, \underline{\theta}\}, [\underline{R}, \underline{M}]) \in CA \times SA$ .*

On montrerait de la même manière que dans la section précédente que les minima des énergies potentielle totale et complémentaire sont encore opposés.



On retiendra que la prise en compte d'une liaison interne se fait dans la définition de l'espace affine  $CA$  des champs cinématiquement admissibles et se traduit par l'évanouissement des termes correspondant dans la définition des énergies potentielle totale et complémentaire. À titre d'exercice le lecteur pourra écrire les cinq formulations équivalentes de l'équilibre lorsque la poutre est supposée, en sus, obéir à la liaison interne d'inextensibilité.

### 4.2.3 Théorème de Castigliano-Menabrea

On a vu dans les sections précédentes qu'une spécificité de l'élasto-statique linéarisée des poutres par rapport à l'élasto-statique tridimensionnelle linéarisée est que l'espace affine  $SA$  des champs statiquement admissibles y est systématiquement de *dimension finie*. Cette constatation conduit à privilégier, au moins pour la recherche de solution exacte, la formulation de l'équilibre en terme de minimum de l'énergie complémentaire.

Le théorème de Castigliano-Menabrea intervient dans ce cadre lorsque l'on a affaire à un problème paramétré. Plutôt que de présenter une théorie générale du problème paramétré, qui pourrait paraître inutilement abstraite, on choisit de présenter le théorème de Castigliano-Menabrea sur un exemple. Néanmoins, on gardera en tête que, tant la démarche que le résultat, ont une portée générale.

On considère une poutre rectiligne dans sa configuration initiale prise comme référence et supposée dénuée de contrainte. Cette configuration est paramétrée par  $x \in ]0, L[$ . Cette modélisation poutre est issue de la considération d'un cylindre élastique homogène et isotrope de module d'Young  $E$ , et sera donc supposée obéir à la loi de comportement standard inextensible (3.4). En particulier, cette poutre obéira aux liaisons internes de Navier-Bernoulli et d'inextensibilité. Les directions du repérage cartésien orthonormé  $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$  sont choisies suivant les directions principales d'inertie géométrique des sections droites. On notera  $I$  le moment (principal) d'inertie géométrique (commun à toutes les sections) dans la direction  $\underline{e}_z$ . On considère alors le problème d'équilibre *plan* de cette poutre, tel qu'il est décrit par la figure 4.1. L'absence de rotule à l'extrémité  $x = 0$  signifie, par convention, que l'on est en présence d'une condition d'encastrement (distributeur de déplacement imposé nul). Par contre, la présence d'une rotule en l'extrémité  $x = L$  exprime une condition à la limite de moment fléchissant nul, l'angle de rotation  $\theta_z$  de la section en ce point étant laissé libre. Une force ponctuelle est appliquée au point de la poutre défini par  $x = L/2$ .

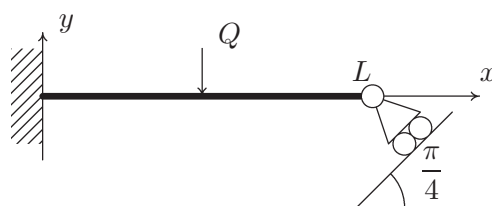


FIG. 4.1 – Équilibre d'une poutre de Navier-Bernoulli inextensible.

Dire que le problème d'équilibre considéré est *plan* signifie :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_z &\equiv 0, & \theta_x &\equiv 0, & \theta_y &\equiv 0, \\ R_z &\equiv 0, & M_x &\equiv 0, & M_y &\equiv 0. \end{aligned}$$



Les données cinématiques étant homogènes, l'énergie complémentaire se réduit ici à l'énergie élastique de contrainte.

$$W^*(Q, X) = \frac{1}{2EI} \int_0^L [M_z(x)]^2 dx = \frac{L^3}{48EI} (8X^2 + 5QX + Q^2). \quad (4.2)$$

Le minimum est réalisé par :

$$X(Q) = -\frac{5Q}{16},$$

qui donne la répartition des efforts intérieurs dans la poutre. On en déduit notamment le torseur des efforts exercés par le chariot mobile sur la poutre à l'équilibre :

$$\left[ -\frac{5Q}{16} (\underline{e}_x - \underline{e}_y), \underline{0} \right].$$

Connaissant maintenant la répartition des efforts intérieurs à l'équilibre, la loi de comportement permet de remonter au distributeur de déplacement linéarisé à l'équilibre. On se propose cependant de développer une technique permettant d'accéder seulement à une partie de cette information. On appelle  $q(Q)$  la composante de déplacement à l'équilibre, au point d'application de la force extérieure dans la direction de cette force :

$$q(Q) = -\bar{\xi}_y(L/2).$$

On dit que  $q$  est le « paramètre cinématique associé au paramètre de chargement  $Q$  ». De façon générale, le paramètre cinématique associé au paramètre de chargement  $Q$  sera le cofacteur de  $Q$  dans l'expression de la fonctionnelle  $\Phi(\{\hat{\xi}, \hat{\theta}\})$ . Au lieu de fixer l'amplitude de la force à sa valeur  $Q$ , considérons-la maintenant comme inconnue et imposons, en contrepartie, la valeur du paramètre cinématique associé  $q = q(Q)$ . On obtient alors un nouveau problème d'équilibre hyperstatique de degré 2, dont les inconnues hyperstatiques peuvent être identifiées à  $X$  et  $Q^*$ , l'amplitude, maintenant inconnue, de la force ponctuelle. Bien entendu, la solution de ce nouveau problème d'équilibre sera identique à celle du précédent. Cela signifie que le minimum de la nouvelle énergie complémentaire :

$$E_c(Q^*, X) = W^*(Q^*, X) - q(Q) Q^*$$

sera atteint en  $(Q^*, X) = (Q, X(Q))$ . Il en résulte le théorème de Castigliano-Menabrea :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} W^*(Q, X(Q)) &= 0, \\ q(Q) &= \frac{\partial}{\partial Q^*} W^*(Q, X(Q)) = \frac{d}{dQ^*} W^*(Q, X(Q)), \end{aligned}$$

où la toute dernière égalité est une conséquence de la première ligne. Ce résultat permet d'accéder facilement à un paramètre cinématique donné. Ainsi, dans l'exemple en jeu, on obtient :

$$-\bar{\xi}_y(L/2) = \frac{7}{768} \frac{L^3}{EI} Q,$$

où ce résultat est obtenu indifféremment à partir de l'expression (4.2), soit en prenant la dérivée partielle par rapport à  $Q$ , puis en remplaçant  $X$  par sa valeur d'équilibre  $X(Q)$ , soit en faisant dès le départ  $X = X(Q)$ , puis en prenant la dérivée de l'expression obtenue par rapport à  $Q$ .

Cette technique permet également d'évaluer des paramètres cinématiques qui ne sont initialement associés à aucun paramètre de chargement. Il suffit pour cela d'introduire un nouveau paramètre de chargement  $\tilde{Q}$  *ad hoc*, destiné à avoir la valeur nulle. Il ne reste alors qu'à évaluer sa contribution à l'énergie complémentaire pour pouvoir appliquer le théorème de Castigliano-Menabrea. On verra un exemple d'application de cette technique dite de « Castigliano-Menabrea avec charge évanescence » dans la section suivante.

### 4.3 Statique linéarisée des assemblages de poutres

Dans cette section, on étudie l'équilibre, dans le cadre d'analyse TIEN, de structures constituées d'un nombre fini de poutres élastiques. On pourra rencontrer différentes conditions d'assemblage de ces poutres dont quelques exemples sont représentés sur la figure 4.2.



FIG. 4.2 – Conditions d'assemblages de poutres.

Dans le premier exemple, la rotule parfaite exige que le déplacement  $\bar{\xi}$  à l'extrémité de chacune des poutres prenne la même valeur, le moment fléchissant ayant la valeur imposée nulle, tandis que l'angle  $\underline{\theta}_\perp$  à l'extrémité de chacune des poutres reste libre. Dans le deuxième exemple, il s'agit d'une condition d'assemblage qui exige que la totalité du distributeur de déplacement  $\{\bar{\xi}, \underline{\theta}\}$  à l'extrémité de chacune des poutres prenne la même valeur, les efforts permettant la réalisation de cette condition cinématique restant inconnus.

De façon générale, les équations locales gouvernant l'équilibre de chaque poutre de l'assemblage devront être complétées par :

- d'une part, des relations linéaires purement cinématiques, traduisant des conditions de compatibilité géométrique aux nœuds de l'assemblage,
- d'autre part, des relations linéaires purement statiques, traduisant des conditions d'équilibre aux nœuds de l'assemblage.

De façon naturelle, les premières viendront compléter la définition de l'espace affine  $CA$  des champs cinématiquement admissibles avec les données du problème, tandis que les secondes viendront compléter la définition de l'espace affine  $SA$  des champs statiquement admissibles. Il en résulte notamment que le degré d'hyperstaticité d'un problème d'équilibre d'un assemblage de  $n$  poutres est toujours inférieur ou égal à  $6n$ . On dispose alors des cinq formulations équivalentes de l'équilibre comme dans la section 4.2.1. De la même manière, le problème d'équilibre admet une unique solution sous réserve que :

- l'espace  $SA$  des champs statiquement admissibles soit non vide, ou, autrement dit, que le problème ne soit pas hypostatique,

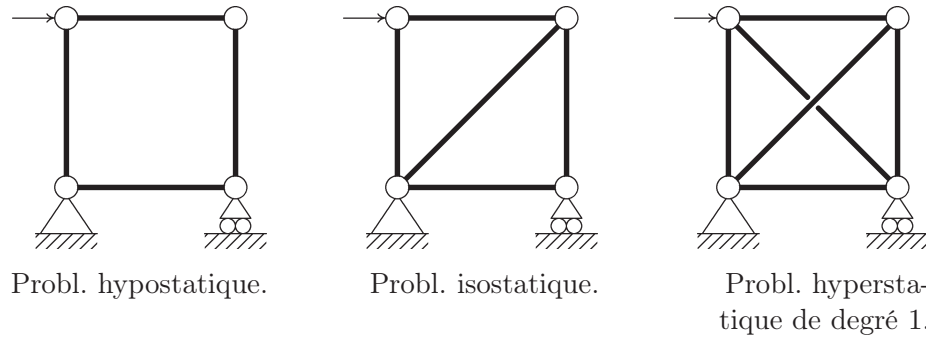


FIG. 4.3 – Hyperstaticité des problèmes d'équilibre de treillis.

- l'espace  $CA$  des champs statiquement admissibles soit non vide, cette circonstance pouvant se rencontrer comme le montre l'exemple d'une poutre rectiligne inextensible sur laquelle on voudrait imposer des composantes axiales non identiques du déplacement de la fibre moyenne aux extrémités.

La résolution se fera à partir de la formulation de l'équilibre en terme de minimum de l'énergie complémentaire et l'on mettra en œuvre les étapes suivantes.

1. On pratiquera dans la structure un nombre *ad hoc* de « coupures », de manière à la rendre isostatique. Le champ de contrainte généralisée correspondant  $\mathcal{C}_0$  fournira alors un élément particulier de l'espace affine  $SA$ . Il restera alors à construire une base  $(\bar{\mathcal{C}}_1, \bar{\mathcal{C}}_2, \dots, \bar{\mathcal{C}}_n)$  de l'espace vectoriel des auto-contraintes  $SA_0$ , en annulant le chargement par la pensée, et en appliquant des efforts unité successivement à toutes les lèvres de coupures. À l'issue de cette étape, l'espace affine  $SA$  pourra s'exprimer sous la forme :

$$SA = \left\{ \mathcal{C}_0 + \sum_{i=1}^n X_i \bar{\mathcal{C}}_i \mid (X_1, X_2, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

L'entier  $n$  est le degré d'hyperstaticité du problème et les  $X_i$  les inconnues hyperstatiques.

2. Injectant l'expression d'un champ statiquement admissible en terme des inconnues hyperstatiques dans la définition de l'énergie complémentaire, on obtiendra une expression de la forme :

$$E_c(\underline{X}) = \frac{1}{2} \underline{X} \cdot \underline{S} \cdot \underline{X} - \underline{D} \cdot \underline{X} + C,$$

où la matrice symétrique définie positive  $\underline{S}$  apparaissant dans cette expression est appelée « matrice de souplesse » du problème.

3. En vertu de la formulation de l'équilibre en terme de minimum de l'énergie complémentaire, la valeur des inconnues hyperstatiques à l'équilibre est alors donnée par :

$$\underline{X} = \underline{S}^{-1} \cdot \underline{D}.$$

4. L'utilisation des lois de comportement des poutres permettra alors de remonter aux champs de distributeur de déplacement dans toute la structure si cela est désiré.

Sinon, l'utilisation du théorème de Castigliano-Menabrea permettra d'extraire économiquement la partie de l'information désirée.

L'étude des deux exemples qui suivent permettra de s'approprier cette démarche.

### 4.3.1 Exemple 1 : équilibre d'un treillis

On considère le problème d'équilibre représenté sur la figure 4.4. Les six barres sont supposées être des cylindres de même section d'aire  $|\mathcal{S}|$ . Le matériau constitutif est homogène de module d'Young  $E$ . Le chargement consiste en la seule force « horizontale »  $Q$  appliquée au point  $A$ . L'écriture de l'équation d'équilibre dans chacune des barres montre,

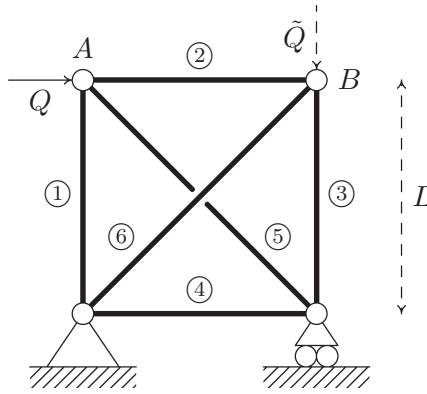


FIG. 4.4 – Équilibre d'un treillis.

dans un premier temps que  $\underline{R}_y$  est nécessairement constant, puis, dans un deuxième temps, compte-tenu des conditions de moment nul à chaque extrémité, que  $\underline{M}_y$  est identiquement nul. On en déduit alors que l'effort tranchant  $\underline{R}_\perp$  est également identiquement nul et que l'effort intérieur dans chacune des barres se réduit à une tension homogène :

$$\left[ R_T \underline{T}, \underline{0} \right].$$

On voit facilement que le problème est hyperstatique de degré 1. Pour identifier l'espace  $SA$ , on procède alors en deux temps.

1. Dans un premier temps, on détermine un élément particulier de  $SA$ . Pour cela, on « coupe » une barre de manière à rendre le problème isostatique. On choisit de couper la barre ⑥ de sorte que la tension  $R_T^{⑥}$  qui y règne est nulle. Pour identifier la tension dans les autres barres, on utilisera au choix l'équilibre de chaque rotule ou le principe des puissances virtuelles.

- Les champs de vitesses virtuelles associés aux mouvements virtuels de  $B$ , toutes les autres articulations étant fixes, donnent :

$$R_T^{②} = R_T^{③} = 0.$$

- Un mouvement virtuel « horizontal » du point  $A$  donne :

$$R_T^{⑤} = -\sqrt{2}Q.$$

- Un mouvement virtuel « vertical » du point  $A$  donne :

$$R_T^{①} = -\frac{\sqrt{2}}{2} R_T^{⑤} = Q.$$

- Enfin, un mouvement virtuel « horizontal » du chariot donne :

$$R_T^{④} = -\frac{\sqrt{2}}{2} R_T^{⑤} = Q.$$

Au total, on dispose de l'élément de  $SA$  suivant :

$$R_T^{①} = Q, \quad R_T^{②} = R_T^{③} = 0, \quad R_T^{④} = Q, \quad R_T^{⑤} = -\sqrt{2}Q, \quad R_T^{⑥} = 0.$$

2. Dans un deuxième temps, on identifie l'espace vectoriel des champs d'auto-contrainte en choisissant  $X = R_T^{⑥}$  comme inconnue hyperstatique. L'utilisation du principe des puissances virtuelles donne alors facilement l'espace des champs d'auto-contrainte :

$$R_T^{①} = R_T^{②} = R_T^{③} = R_T^{④} = -\frac{\sqrt{2}}{2} X, \quad R_T^{⑤} = X, \quad R_T^{⑥} = X \quad (X \in \mathbb{R}).$$

Au final, l'espace affine  $SA$  est l'ensemble des sextuplets :

$$\begin{aligned} R_T^{①} &= Q - \frac{\sqrt{2}}{2} X, & R_T^{②} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} X, & R_T^{③} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} X, \\ R_T^{④} &= Q - \frac{\sqrt{2}}{2} X, & R_T^{⑤} &= X - \sqrt{2}Q, & R_T^{⑥} &= X, \end{aligned}$$

où  $X$  désigne un réel quelconque (inconnue hyperstatique).

Les données cinématiques étant homogènes, l'énergie complémentaire se réduit à l'énergie élastique de contrainte. On calcule très facilement :

$$W^*(Q, X) = \frac{(1 + \sqrt{2})L}{E|S|} \{X^2 - \sqrt{2}QX + Q^2\}.$$

Le minimum, lorsque  $X$  varie, est obtenu pour :

$$X(Q) = \frac{\sqrt{2}}{2} Q,$$

qui donne la répartition des efforts intérieurs (ici, la tension dans chaque barre à l'équilibre). Pour achever la résolution du problème et identifier les déplacements, il suffit d'écrire la loi de comportement dans chaque barre, qui donne :

$$\bar{\underline{\xi}}^{(i)}(S) = \bar{\underline{\xi}}_0^{(i)} + \underline{\theta}_0^{(i)} \wedge \underline{AM} + \frac{R_T^{(i)}}{E|S|} S \underline{T}^{(i)},$$

et de la compléter par les conditions cinématiques de continuité aux nœuds, pour identifier les déplacements rigidifiants infinitésimaux dans chaque barre.

Le théorème de Castigliano-Menabrea permet également l'accès à des informations partielles sur le déplacement d'équilibre. Ainsi, la composante « horizontale »  $q(Q)$  du déplacement de l'articulation  $A$  à l'équilibre est donnée par :

$$q(Q) = \frac{\partial}{\partial Q^*} W^*(Q, X(Q)) = \frac{d}{dQ^*} W^*(Q, X(Q)),$$

soit, ici :

$$q(Q) = \frac{(1 + \sqrt{2})L}{E|\mathcal{S}|} Q.$$

Appliquons maintenant le théorème de Castigliano-Menabrea et la technique de la charge évanescente pour calculer la composante « verticale » du déplacement de l'articulation  $B$ . On introduit alors une force « verticale »  $\tilde{Q}$  en  $B$  (destinée à devenir évanescente) de sorte que la quantité cherchée est le paramètre cinématique associé. Un champ statiquement admissible avec la seule donnée  $\tilde{Q}$  est :

$$R_T^{(1)} = R_T^{(2)} = 0, \quad R_T^{(3)} = -\tilde{Q}, \quad R_T^{(4)} = R_T^{(5)} = R_T^{(6)} = 0,$$

de sorte que l'espace des champs d'effort statiquement admissibles est maintenant l'ensemble des sextuplets :

$$\begin{aligned} R_T^{(1)} &= Q - \frac{\sqrt{2}}{2} X, & R_T^{(2)} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} X, & R_T^{(3)} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} X - \tilde{Q}, \\ R_T^{(4)} &= Q - \frac{\sqrt{2}}{2} X, & R_T^{(5)} &= X - \sqrt{2} Q, & R_T^{(6)} &= X, \end{aligned}$$

où  $X$  désigne un réel quelconque (inconnue hyperstatique). L'énergie complémentaire est alors :

$$W^*(Q, \tilde{Q}, X) = \frac{L}{2ES} \left\{ 2(1 + \sqrt{2})X^2 - 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2}) Q X + 2(1 + \sqrt{2})Q^2 + \sqrt{2} \tilde{Q} X + \tilde{Q}^2 \right\}.$$

Le résultat cherché est alors, en vertu du théorème de Castigliano-Menabrea :

$$\tilde{q}(\tilde{Q} = 0) = \frac{\partial}{\partial \tilde{Q}} W^*(Q, 0, X(Q)) = \frac{\sqrt{2}L}{2E|\mathcal{S}|} X(Q) = \frac{L}{2E|\mathcal{S}|} Q$$

(déplacement compté positivement vers le « bas »).

### 4.3.2 Exemple 2 : équilibre d'un portique

On considère l'assemblage de poutres en portique représenté sur la figure 4.5. Les deux extrémités inférieures des poutres « verticales » sont encastées dans un support rigide. La modélisation poutre est issue de cylindres élastiques homogènes isotropes (module d'Young  $E$ ), et sera donc supposée obéir à la loi de comportement standard inextensible (3.4). En particulier, cette poutre obéira aux liaisons internes de Navier-Bernoulli et d'inextensibilité. On suppose que la direction  $\underline{e}_z$  orthogonale au plan du portique est direction principale d'inertie géométrique de toutes les sections droites et on notera  $I$  le moment principal d'inertie géométrique, supposé identique pour toutes les poutres, dans cette direction. Les conditions d'assemblage de ces poutres sont telles que l'angle reste droit en toute circonstance, ce qui revient à considérer le portique comme constitué d'une seule poutre dont le vecteur tangent à la fibre moyenne présente des sauts (discontinuités). Le cadre d'analyse est celui de la transformation infinitésimale autour de l'état naturel.



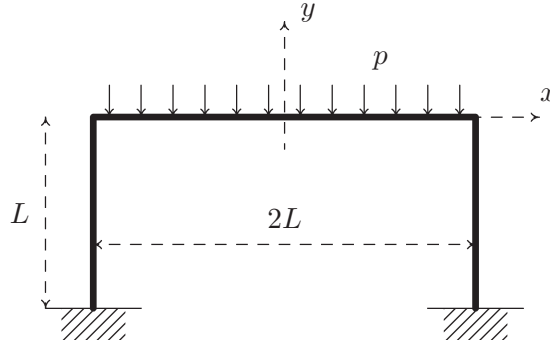


FIG. 4.5 – Équilibre d'un portique.

Le problème d'équilibre considéré étant plan, on dispose, pour chacune des poutres, de :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_z &\equiv 0, & \theta_x &\equiv 0, & \theta_y &\equiv 0, \\ R_z &\equiv 0, & M_x &\equiv 0, & M_y &\equiv 0. \end{aligned}$$

Comme les conditions de chargement sont symétriques par rapport à l'axe  $Oy$ , que le problème est linéaire et admet une solution unique, on déduit que la solution conserve la symétrie<sup>1</sup> par rapport à l'axe  $Oy$  (la différence de la solution et de sa symétrisée est solution du problème d'équilibre homogène). On en déduit immédiatement que les fonctions  $R_x(x)$  et  $M_z(x)$  sont paires et que la fonction  $R_y(x)$  est impaire<sup>2</sup>. De l'absence de torseur ponctuel exercé en  $x = 0$  et de la continuité des contraintes généralisées qui en résulte, on déduit alors les conditions aux limites en  $x = 0$  pour l'équilibre du demi-portique :

$$\bar{\xi}_x(0) = 0, \quad R_y(0) = 0, \quad \theta_z(0) = 0.$$

En conséquence, on travaillera sur le demi-portique (cf figure 4.6) et le problème (plan) est hyperstatique de degré 2.

On fabrique aisément un élément particulier de  $SA$  en cherchant une distribution d'effort intérieur telle que la poutre « verticale » soit en compression simple :

$$\begin{aligned} R_x^h(x) &= 0 \quad (= R_T^h(x)), & R_y^h(x) &= px, & M_z^h(x) &= \frac{p}{2}(L^2 - x^2), \\ R_x^v(y) &= 0, & R_y^v(y) &= -pL \quad (= R_T^v(y)), & M_z^v(y) &= 0. \end{aligned}$$

L'espace vectoriel des champs d'auto-contrainte est évalué à l'aide de la méthode des coupures (cf figure 4.7) qui donne facilement les champs d'auto-contrainte :

$$\begin{aligned} R_x^h(x) &= -X_1 \quad (= R_T^h(x)), & R_y^h(x) &= 0, & M_z^h(x) &= 0, \\ R_x^v(y) &= X_1, & R_y^v(y) &= 0 \quad (= R_T^v(y)), & M_z^v(y) &= X_1 y. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>L'étude du chapitre 5 montrera que ce type de conclusion *ne s'étend pas* hors du cadre de linéarité et d'unicité de solution qui est acquis dans le cas présent.

<sup>2</sup>Il est à noter que le champ de torseur  $[R, M]$  modélisant les efforts intérieurs dans une poutre n'est pas intrinsèque : il est à transformer en son opposé lorsque l'on inverse le sens de description de la poutre.

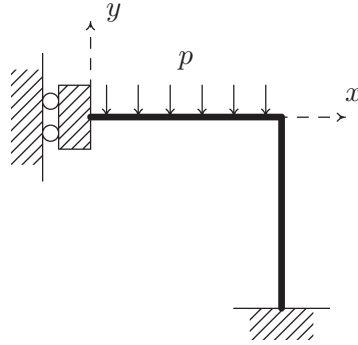


FIG. 4.6 – Équilibre du demi-portique.

et :

$$\begin{aligned} R_x^h(x) &= 0 \quad (= R_T^h(x)), & R_y^h(x) &= 0, & M_z^h(x) &= -X_2, \\ R_x^v(y) &= 0, & R_y^v(y) &= 0 \quad (= R_T^v(y)), & M_z^v(y) &= X_2. \end{aligned}$$

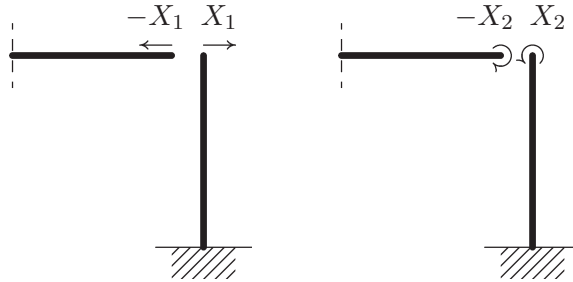


FIG. 4.7 – Détermination des auto-contraintes par la méthode des coupures.

Au total, l'ensemble des éléments de l'espace affine SA est donné par :

$$\begin{aligned} R_x^h(x) &= -X_1, & R_y^h(x) &= px, & M_z^h(x) &= -X_2 + \frac{p}{2}(L^2 - x^2), \\ R_x^v(y) &= X_1, & R_y^v(y) &= -pL, & M_z^v(y) &= X_2 + X_1y, \end{aligned}$$

où  $X_1$  et  $X_2$  désignent deux réels arbitraires.

Les données cinématiques étant homogènes, l'énergie complémentaire se réduit ici à l'énergie élastique de contrainte.

$$\begin{aligned} W^*(p, X_1, X_2) &= \frac{1}{2EI} \int_0^L \left[ X_2^2 - p(L^2 - x^2)X_2 + \frac{p^2}{4}(x^4 - 2L^2x^2 + L^4) \right] dx \\ &\quad + \frac{1}{2EI} \int_{-L}^0 [X_2^2 + 2yX_1X_2 + y^2X_1^2] dy, \\ &= \frac{L^3}{6EI} X_1^2 - \frac{L^2}{2EI} X_1X_2 + \frac{L}{EI} X_2^2 - \frac{pL^3}{3EI} X_2 + \frac{p^2L^5}{15EI}. \end{aligned}$$

Le minimum est réalisé par le couple  $(X_1, X_2)$  solution du système linéaire :

$$\begin{aligned} \frac{L^3}{3EI}X_1 - \frac{L^2}{2EI}X_2 &= 0, \\ -\frac{L^2}{2EI}X_1 + \frac{2L}{EI}X_2 &= \frac{pL^3}{3EI}, \end{aligned}$$

qui donne :

$$X_1 = \frac{2pL}{5}, \quad X_2 = \frac{4pL^2}{15}.$$

Le paramètre cinématique associé au paramètre de chargement  $p$  est :

$$-\int_0^L \bar{\xi}_y(x) dx.$$

Le théorème de Castigliano-Menabrea donne alors la moyenne du déplacement « vertical » dans la poutre « horizontale » :

$$\frac{1}{L} \int_0^L \bar{\xi}_y(x) dx = -\frac{1}{L} \frac{\partial W^*}{\partial p} = \frac{L^2}{3EI}X_2 - \frac{2pL^4}{15EI} = -\frac{2pL^4}{45EI}.$$

Pour calculer le déplacement vertical du point central défini par  $x = 0$ , appliquons la force  $Q\mathbf{e}_y$  (destinée à devenir évanescence) sur l'extrémité  $x = 0$  du demi-portique. On constate aisément que le nouvel espace  $SA$  des champs statiquement admissibles est donné par :

$$\begin{aligned} R_x^h(x) &= -X_1, & R_y^h(x) &= px - Q, & M_z^h(x) &= -X_2 + \frac{p}{2}(L^2 - x^2) - Q(L - x), \\ R_x^v(y) &= X_1, & R_y^v(y) &= Q - pL, & M_z^v(y) &= X_2 + X_1y, \end{aligned}$$

où  $X_1$  et  $X_2$  désignent deux réels arbitraires. Le théorème de Castigliano-Menabrea donne alors :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_y(x=0) &= \frac{\partial}{\partial Q} W^*(p, X_1, X_2, Q=0), \\ &= \frac{1}{EI} \int_0^L \left[ X_2(L-x) - \frac{p}{2}(L^2 - x^2)(L-x) \right] dx, \\ &= \frac{1}{EI} \left[ \frac{L^2}{2}X_2 - \frac{5pL^4}{24} \right], \\ &= -\frac{3pL^4}{40EI}. \end{aligned}$$

On aurait pu également appliquer la force  $Q\mathbf{e}_y$  au point  $x = 0$  du portique entier. L'imparité de la fonction  $R_y^h(x)$  associée à la connaissance de la discontinuité d'amplitude  $Q$  en  $x = 0$  montre alors que, pour obtenir l'espace  $SA$  pour ce nouveau problème, il faut remplacer  $Q$  par  $Q/2$  dans l'expression de  $SA$  obtenue précédemment. Naturellement, comme l'énergie élastique de contrainte pour le portique entier est le double de celle du demi-portique, l'application du théorème de Castigliano-Menabrea dans cette nouvelle circonstance redonne le résultat obtenu précédemment.

On laisse au lecteur qui souhaiterait visualiser la déformée du portique à l'équilibre sous l'effet du chargement, l'intégration du champ de distributeur de déplacement à partir de la connaissance du champ de contrainte généralisée et de la loi de comportement.

#### 4.4 Analyse de l'élasto-dynamique linéarisée par superposition modale

Dans cette section, on revient sur les équations, obtenues à la section 4.1, de la dynamique des poutres dans le cadre d'analyse TIEN, pour en faire une analyse plus approfondie. L'analyse sera menée ici dans le cadre des mouvements plans d'une poutre de Navier-Bernoulli rectiligne, mais le lecteur doit garder en tête que les techniques employées ont une portée générale et s'appliquent en particulier à l'étude de la dynamique, dans le cadre d'analyse TIEN des assemblages de poutres, éventuellement courbes.

On considère donc une poutre rectiligne dans sa configuration initiale prise comme référence et supposée dénuée de contrainte. Cette configuration est paramétrée par  $x \in ]0, L[$ . Cette modélisation poutre est issue de la considération d'un cylindre élastique homogène et isotrope de module d'Young  $E$  et de masse volumique homogène  $\rho_0$ , et sera supposée obéir à la loi de comportement standard (3.5). Les directions du repérage cartésien orthonormé  $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$  sont choisies suivant les directions principales d'inertie géométrique des sections droites. On notera  $|\mathcal{S}|$  l'aire commune à toutes les sections droites et  $I$  leur moment (principal) d'inertie géométrique suivant la direction  $\underline{e}_z$ . Les conditions aux limites seront, dans toute la suite, de type distributeur de déplacement imposé en l'extrémité  $x = 0$  et torseur des efforts extérieurs imposé en l'autre extrémité  $x = L$ .

Conformément aux résultats obtenus à la section 4.1, les équations gouvernant les petits mouvements dynamiques de cette poutre s'écrivent :

- Équation du mouvement :

$$\begin{aligned} \left[ \underline{R}(t, L), \underline{M}(t, L) \right] &= \left[ \underline{F}_L(t), \underline{C}_L(t) \right], \\ \left[ \frac{\partial \underline{R}}{\partial x}, \frac{\partial \underline{M}}{\partial x} + \underline{e}_x \wedge \underline{R} \right] + \left[ \underline{F}_0, \underline{C}_0 \right] &= \left[ \bar{\rho}_0 \ddot{\underline{\xi}}, \underline{I}_0^\rho \cdot \ddot{\underline{\theta}} \right], \end{aligned}$$

- Loi de comportement :

$$\begin{aligned} \underline{e}_x \wedge \left( \frac{\partial \bar{\underline{\xi}}}{\partial x} + \underline{e}_x \wedge \underline{\theta} \right) &= \underline{0}, \\ R_x &= E |\mathcal{S}| \frac{\partial \bar{\xi}_x}{\partial x}, \\ \underline{M} &= \mu J \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \underline{e}_x + E \underline{I} \cdot \frac{\partial \underline{\theta}_\perp}{\partial x}, \end{aligned}$$

- Condition cinématique :

$$\left\{ \bar{\underline{\xi}}(t, 0), \underline{\theta}(t, 0) \right\} = \left\{ \bar{\underline{\xi}}_0(t), \underline{\theta}_0(t) \right\}.$$

La restriction de l'analyse aux mouvements dans le plan  $Oxy$  :

$$\bar{\xi}_z = \theta_x = \theta_y = 0,$$

et l'élimination de la fonction  $\theta_z = \partial \bar{\xi}_y / \partial x$  (au profit de la fonction  $\bar{\xi}_y$ ), compte-tenu de la liaison interne de Navier-Bernoulli, conduit à l'observation que les équations gouvernant les

vibrations axiales (c'est-à-dire la fonction  $\bar{\xi}_x(t, x)$ ) se découplent des équations gouvernant les vibrations transverses (c'est-à-dire la fonction  $\bar{\xi}_y(t, x)$ ). Cette propriété de découplage est une spécificité de la configuration initiale rectiligne et disparaît en dehors de ce cadre. Elle n'apporte cependant strictement rien d'essentiel dans l'analyse qui va suivre, si ce n'est une facilité d'écriture.

L'ensemble des équations gouvernant les vibrations axiales s'écrit alors :

$$\begin{aligned} E|\mathcal{S}|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{\xi}_x(t, x) + \bar{F}_{0x}(t, x) &= \rho_0|\mathcal{S}|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{\xi}_x(t, x), \\ \bar{\xi}_x(t, 0) &= \bar{\xi}_{0x}(t), \\ E|\mathcal{S}|\frac{\partial}{\partial x}\bar{\xi}_x(t, L) &= F_{Lx}(t), \end{aligned} \quad (4.3)$$

où l'on reconnaît une équation des ondes de célérité  $c = \sqrt{E/\rho_0}$ .

L'ensemble des équations gouvernant les vibrations transverses s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}R_y(t, x) + \bar{F}_{0y}(t, x) &= \rho_0|\mathcal{S}|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{\xi}_y(t, x), \\ \frac{\partial}{\partial x}M_z(t, x) + R_y(t, x) + \bar{C}_{0z}(t, x) &= \rho_0I\frac{\partial^3}{\partial t^2\partial x}\bar{\xi}_y(t, x), \\ R_y(t, L) = F_{Ly}(t), \quad M_z(t, L) &= C_{Lz}(t), \\ M_z(t, x) &= EI\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{\xi}_y(t, x), \\ \bar{\xi}_y(t, 0) = \bar{\xi}_{0y}(t), \quad \frac{\partial}{\partial x}\bar{\xi}_y(t, 0) &= \theta_{0z}(t). \end{aligned}$$

On dérive alors la deuxième équation par rapport à  $x$  pour pouvoir éliminer les composantes de la contrainte généralisée à l'aide de la première équation et de la loi de comportement. Il vient :

$$EI\frac{\partial^4}{\partial x^4}\bar{\xi}_y(t, x) + \left(\frac{\partial\bar{C}_{0z}}{\partial x} - \bar{F}_{0y}\right)(t, x) = -\rho_0|\mathcal{S}|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{\xi}_y(t, x) + \rho_0I\frac{\partial^4}{\partial t^2\partial x^2}\bar{\xi}_y(t, x).$$

Les deux termes comportant des dérivées temporelles dans cette équation s'interprètent respectivement comme un terme d'inertie associé aux déplacements transverses, d'une part, et la dérivée par rapport à  $x$  d'un terme d'inertie associé aux rotations des sections, d'autre part. L'ordre de grandeur du rapport entre ces termes est donné par :

$$\frac{I}{|\mathcal{S}|L^2},$$

qui est très petit devant 1 pour les solides élancés. Cette constatation justifie l'approximation généralement retenue qui consiste à négliger systématiquement le deuxième terme d'accélération devant le premier et à retenir le système d'équation simplifié :

$$\begin{aligned} EI\frac{\partial^4}{\partial x^4}\bar{\xi}_y(t, x) + \left(\frac{\partial\bar{C}_{0z}}{\partial x} - \bar{F}_{0y}\right)(t, x) + \rho_0|\mathcal{S}|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{\xi}_y(t, x) &= 0, \\ \bar{\xi}_y(t, 0) = \bar{\xi}_{0y}(t), \quad \frac{\partial}{\partial x}\bar{\xi}_y(t, 0) &= \theta_{0z}(t), \\ EI\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{\xi}_y(t, L) = C_{Lz}(t), \quad EI\frac{\partial^3}{\partial x^3}\bar{\xi}_y(t, L) &= -\bar{C}_{0z}(t, L) - F_{Ly}(t), \end{aligned} \quad (4.4)$$

pour l'étude des vibrations transverses. Cette approximation, qui revient à négliger l'inertie de rotation des sections devant leur inertie de translation, ou, ce qui équivalent, à considérer que toute la masse de la poutre est concentrée sur la fibre moyenne, n'est cependant nullement essentielle pour l'analyse qui va être menée dans la suite. À titre d'exercice, le lecteur est invité à reprendre l'analyse hors du cadre de cette simplification. Il constatera alors que l'ensemble des résultats obtenus est identique, à l'ordre 1 près en  $I/|\mathcal{S}|L^2$ , à ceux obtenus dans ce cadre simplifié.

#### 4.4.1 Vibrations libres

On s'intéresse d'abord aux conditions de chargement homogènes : le torseur des efforts extérieur  $[\underline{F}_0, \underline{C}_0]$  est supposé identiquement nul ainsi que les données aux limites  $\{\underline{\xi}_0, \underline{\theta}_0\}$  et  $[\underline{F}_L, \underline{C}_L]$ . On recherche alors des solutions des équations de la dynamique découplées en temps et en espace, c'est-à-dire de la forme :

$$\underline{\xi}(t, x) = q(t) \underline{\tilde{\xi}}(x).$$

De telles solutions sont appelées, pour des raisons qui apparaîtront clairement dans la suite, *vibrations propres* du système.

#### Vibrations propres axiales

Injectant la forme générale  $q(t) \underline{\tilde{\xi}}_x(x)$  dans le système (4.3), on obtient :

$$\begin{aligned} E|\mathcal{S}| \frac{d^2}{dx^2} \underline{\tilde{\xi}}_x(x) q(t) &= \rho_0 |\mathcal{S}| \underline{\tilde{\xi}}_x(x) \ddot{q}(t), \\ \underline{\tilde{\xi}}_x(0) &= 0, \quad E|\mathcal{S}| \frac{d}{dx} \underline{\tilde{\xi}}_x(L) = 0, \end{aligned}$$

ce qui exige :

$$\begin{aligned} E|\mathcal{S}| \frac{d^2}{dx^2} \underline{\tilde{\xi}}_x(x) + \frac{1}{\lambda} \rho_0 |\mathcal{S}| \underline{\tilde{\xi}}_x(x) &= 0, \\ \underline{\tilde{\xi}}_x(0) &= 0, \quad E|\mathcal{S}| \frac{d}{dx} \underline{\tilde{\xi}}_x(L) = 0, \\ \ddot{q}(t) + \frac{1}{\lambda} q(t) &= 0, \end{aligned} \tag{4.5}$$

pour un certain  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Les deux premières lignes s'interprètent en terme de problème spectral.

Précisons ce point. On considère l'espace  $CA$  des champs cinématiquement admissibles :

$$CA = \left\{ \underline{\tilde{\xi}}_x \in H^1(]0, L[; \mathbb{R}) \mid \underline{\tilde{\xi}}_x(0) = 0 \right\},$$

muni du produit scalaire « en énergie élastique de déformation » :

$$\left( \xi_1, \xi_2 \right)_{\text{élast}} = E|\mathcal{S}| \int_0^L \frac{d\xi_1}{dx} \frac{d\xi_2}{dx},$$

qui induit sur  $CA$  une norme équivalente à celle de  $H^1$ . L'espace  $CA$  s'injecte dans l'espace de Hilbert  $L^2(]0, L[; \mathbb{R})$  qui sera muni du produit scalaire :

$$(f_1, f_2)_{\text{cin}} = \rho_0 |\mathcal{S}| \int_0^L f_1 f_2,$$

baptisé, pour des raisons destinées à apparaître clairement dans la suite, produit scalaire « en énergie cinétique ». Soit maintenant  $\Lambda$  l'endomorphisme de  $L^2$  qui, à  $f \in L^2$ , associe l'unique solution  $\tilde{\xi}_x = \Lambda(f) \in CA \subset L^2$  du problème aux limites :

$$\begin{aligned} E|\mathcal{S}| \frac{d^2}{dx^2} \tilde{\xi}_x(x) + \rho_0 |\mathcal{S}| f(x) &= 0, \\ \tilde{\xi}_x(0) &= 0, \quad E|\mathcal{S}| \frac{d}{dx} \tilde{\xi}_x(L) = 0. \end{aligned}$$

Une simple intégration par parties suffit alors pour obtenir l'identité :

$$\forall f_1, f_2 \in L^2, \quad (\Lambda(f_1), f_2)_{\text{cin}} = (\Lambda(f_1), \Lambda(f_2))_{\text{élas}} = (f_1, \Lambda(f_2))_{\text{cin}}. \quad (4.6)$$

Il en résulte que  $\Lambda$  est un endomorphisme auto-adjoint défini positif de  $L^2$ . L'injection de  $H^1(]0, L[; \mathbb{R})$  dans  $L^2(]0, L[; \mathbb{R})$  étant compacte, l'endomorphisme  $\Lambda$  est, de plus, compact. Le théorème de réduction des endomorphismes auto-adjoints compacts d'un espace de Hilbert permet alors de conclure à l'existence d'une suite  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de réels strictement positifs, tendant vers 0, et d'une base Hilbertienne  $(\tilde{\xi}_x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $L^2$  constituée de vecteurs propres de  $\Lambda$  :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Lambda(\tilde{\xi}_x^n) = \lambda_n \tilde{\xi}_x^n.$$

L'identité (4.6) permet alors facilement de montrer que  $(\sqrt{\lambda_n} \tilde{\xi}_x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base Hilbertienne de  $CA$ . Posant  $\omega_n = 1/\sqrt{\lambda_n}$  de sorte que  $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est maintenant une suite de réels strictement positifs tendant vers  $+\infty$ , on constate aisément que les  $\omega_n$  et les  $\tilde{\xi}_x^n$  satisfont :

$$\begin{aligned} E \frac{d^2}{dx^2} \tilde{\xi}_x^n(x) + \omega_n^2 \rho_0 \tilde{\xi}_x^n(x) &= 0, \\ \tilde{\xi}_x^n(0) &= 0, \quad E|\mathcal{S}| \frac{d}{dx} \tilde{\xi}_x^n(L) = 0, \\ \ddot{q}(t) + \omega_n^2 q(t) &= 0, \end{aligned}$$

et fournissent donc une réponse au problème spectral (4.5). On obtient ainsi les vibrations libres découplées en espace et en temps  $\tilde{\xi}_x(x, t) = q(t) \tilde{\xi}_x(x)$  sous la forme :

$$C \cos(\omega_n t + \phi) \tilde{\xi}_x^n(x),$$

où  $C$  (amplitude) et  $\phi$  (phase) sont arbitraires. La terminologie usuelle est la suivante :

- les  $\omega_n$  sont les *pulsations propres de vibrations* du système,
- les  $\tilde{\xi}_x^n$  sont les *modes propres de vibrations* du système.

En conséquence de l'analyse qui précède, on retiendra les résultats généraux suivants.

- Les pulsations propres  $\omega_n$  forment une suite infinie tendant vers l'infini.
- Les modes propres  $\tilde{\xi}_x^n$  sont orthogonaux deux à deux, aussi bien pour le produit scalaire « en énergie élastique de déformation » que pour le produit scalaire « en énergie cinétique ».

- Aussi bien la suite des pulsations propres de vibrations que celle des modes propres dépend de manière essentielle des conditions aux limites. Par exemple, deux conditions aux limites en déplacement conduiraient à des suites différentes.

Ajoutons enfin que, dans le cas présent, on a accès explicitement aussi bien aux pulsations propres qu'aux modes propres. On constate en effet aisément directement sur la formulation (4.5) du problème spectral que l'on a :

$$\begin{aligned}\omega_n &= \left(n + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \frac{\pi}{L}, \\ \tilde{\xi}_x^n(x) &= \sqrt{\frac{2}{\rho_0 |\mathcal{S}| L}} \sin \left[ \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi x}{L} \right].\end{aligned}$$

### Vibrations propres transverses

Injectant la forme générale  $q(t) \tilde{\xi}_y(x)$  dans le système (4.4), on obtient comme précédemment un problème spectral :

$$\begin{aligned}EI \frac{d^4}{dx^4} \tilde{\xi}_y(x) - \frac{1}{\lambda} \rho_0 |\mathcal{S}| \tilde{\xi}_y(x) &= 0, \\ \tilde{\xi}_y(0) = 0, \quad \frac{d}{dx} \tilde{\xi}_y(0) &= 0, \\ EI \frac{d^2}{dx^2} \tilde{\xi}_y(L) = 0, \quad EI \frac{d^3}{dx^3} \tilde{\xi}_y(L) &= 0,\end{aligned}$$

pour un certain  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Les adaptations de l'analyse précédente à cette nouvelle situation sont immédiates. On continue de travailler dans l'espace  $L^2$  muni du produit scalaire « en énergie cinétique » :

$$(f_1, f_2)_{\text{cin}} = \rho_0 |\mathcal{S}| \int_0^L f_1 f_2,$$

mais l'espace des champs cinématiquement admissibles est maintenant :

$$CA = \left\{ \tilde{\xi}_y \in H^2(]0, L[; \mathbb{R}) \mid \tilde{\xi}_y(0) = 0, \quad \frac{d}{dx} \tilde{\xi}_y(0) = 0 \right\}.$$

Il est muni du produit scalaire « en énergie élastique de déformation » :

$$(\xi_1, \xi_2)_{\text{élast}} = EI \int_0^L \frac{d^2 \xi_1}{dx^2} \frac{d^2 \xi_2}{dx^2},$$

qui induit sur  $CA$  une norme équivalente à celle de  $H^2$ . L'endomorphisme  $\Lambda$  de  $L^2$  est alors l'application qui, à  $f \in L^2$ , associe l'unique solution  $\tilde{\xi}_y = \Lambda(f) \in CA \subset L^2$  du problème aux limites :

$$\begin{aligned}EI \frac{d^4}{dx^4} \tilde{\xi}_y(x) - \rho_0 |\mathcal{S}| f(x) &= 0, \\ \tilde{\xi}_y(0) = 0, \quad \frac{d}{dx} \tilde{\xi}_y(0) &= 0, \\ EI \frac{d^2}{dx^2} \tilde{\xi}_y(L) = 0, \quad EI \frac{d^3}{dx^3} \tilde{\xi}_y(L) &= 0.\end{aligned}$$



L'identité :

$$\forall f_1, f_2 \in L^2, \quad \left( \Lambda(f_1), f_2 \right)_{\text{cin}} = \left( \Lambda(f_1), \Lambda(f_2) \right)_{\text{élas}} = \left( f_1, \Lambda(f_2) \right)_{\text{cin}},$$

est maintenant la conséquence de *deux* intégrations par parties. Il en résulte que  $\Lambda$  est un endomorphisme compact, auto-adjoint défini positif de  $L^2$ , et l'on conclut comme précédemment à l'existence d'une suite  $(\Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de pulsations propres, strictement positives, tendant vers l'infini, et d'une base Hilbertienne  $(\xi_y^n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $L^2$ , constituée de modes propres. Ces suites constituent la réponse au problème spectral :

$$\begin{aligned} EI \frac{d^4}{dx^4} \tilde{\xi}_y^n(x) - \Omega_n^2 \rho_0 |\mathcal{S}| \tilde{\xi}_y^n(x) &= 0, \\ \tilde{\xi}_y^n(0) &= 0, \quad \frac{d}{dx} \tilde{\xi}_y^n(0) = 0, \\ EI \frac{d^2}{dx^2} \tilde{\xi}_y^n(L) &= 0, \quad EI \frac{d^3}{dx^3} \tilde{\xi}_y^n(L) = 0, \\ \ddot{q}(t) + \Omega_n^2 q(t) &= 0, \end{aligned} \tag{4.7}$$

et  $(\tilde{\xi}_y^n / \Omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base Hilbertienne de  $CA$ . Comme précédemment, les vibrations libres découplées en temps et en espace s'écrivent :

$$C \cos(\Omega_n t + \phi) \tilde{\xi}_y^n(x),$$

et sont appelées *vibrations propres transverses*.

Comme pour les vibrations propres axiales, on peut essayer d'obtenir explicitement les modes propres de vibrations à partir de la formulation (4.7) du problème spectral. Posant :

$$\mu_n = \Omega_n^{1/2} \left( \frac{\rho_0 |\mathcal{S}|}{EI} \right)^{1/4},$$

il apparaît que la solution générale de l'équation de champ satisfaisant en outre les conditions à la limite en  $x = 0$  est donnée par :

$$A_n \left( \sin \mu_n x - \sinh \mu_n x \right) + B_n \left( \cos \mu_n x - \cosh \mu_n x \right).$$

Les conditions à la limite en  $x = L$  conduisent alors au système :

$$\begin{aligned} A_n \left( \sin \mu_n L + \sinh \mu_n L \right) + B_n \left( \cos \mu_n L + \cosh \mu_n L \right) &= 0, \\ A_n \left( \cos \mu_n L + \cosh \mu_n L \right) - B_n \left( \sin \mu_n L - \sinh \mu_n L \right) &= 0, \end{aligned}$$

qui n'admet de solutions non triviales que si son déterminant est nul :

$$\cos \mu_n L \cosh \mu_n L = -1.$$

L'équation  $\cos x \cosh x = -1$  admet exactement deux solutions  $\mu_{2m}L$  et  $\mu_{2m+1}L$  dans chaque intervalle  $]2m\pi, 2(m+1)\pi]$ . Cela détermine les pulsations propres  $\Omega_n$ , pour lesquelles on ne dispose pas d'expression explicite. On déduit, néanmoins de cette analyse leur équivalent lorsque  $n \rightarrow +\infty$  :

$$\Omega_n \sim \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho_0 |\mathcal{S}|}}.$$

#### 4.4.2 Vibrations libres à partir d'une condition initiale

On se propose ici de constater que la connaissance des modes propres de vibration permet d'obtenir la solution du problème de Cauchy avec condition initiale sous forme d'une somme (infinie) de modes propres de vibration pondérée de coefficients *ad hoc*.

##### Cas des vibrations axiales

On se donne un champ de déplacement  $\bar{\xi}_{x0} \in CA$ , dit *condition initiale en déplacement* et un champ de vitesse  $\dot{\bar{\xi}}_{x0} \in L^2$ , dit *condition initiale en vitesse*. Le problème que l'on se pose consiste alors en la recherche d'une fonction  $\bar{\xi}_x : [0, T] \times [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant l'ensemble des conditions :

$$\begin{aligned} E|\mathcal{S}|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{\xi}_x(t, x) &= \rho_0|\mathcal{S}|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{\xi}_x(t, x), \\ \bar{\xi}_x(t, 0) &= 0, \\ E|\mathcal{S}|\frac{\partial}{\partial x}\bar{\xi}_x(t, L) &= 0, \\ \bar{\xi}_x(0, x) &= \bar{\xi}_{x0}(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}\bar{\xi}_x(0, x) = \dot{\bar{\xi}}_{x0}(x). \end{aligned}$$

Multipliant, comme en statique, l'équation de champ par un champ cinématiquement admissible quelconque, puis intégrant par parties en tenant compte des conditions aux limites, on obtient la formulation faible de ce problème d'évolution qui consiste en la recherche d'une fonction  $\bar{\xi}_x : [0, T] \rightarrow CA$  telle que :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\rho_0|\mathcal{S}|\int_0^L \bar{\xi}_x(t) \hat{u}_x + E|\mathcal{S}|\int_0^L \frac{\partial}{\partial x}\bar{\xi}_x(t) \frac{d}{dx}\hat{u}_x &= 0, \quad \forall \hat{u}_x \in CA = CA_0, \\ \bar{\xi}_x(0, x) &= \bar{\xi}_{x0}(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}\bar{\xi}_x(0, x) = \dot{\bar{\xi}}_{x0}(x). \end{aligned}$$

Reconnaissant les produits scalaires « en énergie cinétique » et « en énergie élastique de déformation », introduits précédemment, on peut réécrire cette formulation faible sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(\bar{\xi}_x(t), \hat{u}_x)_{\text{cin}} + (\bar{\xi}_x(t), \hat{u}_x)_{\text{elas}} &= 0, \quad \forall \hat{\xi}_x \in CA = CA_0, \\ \bar{\xi}_x(0, x) &= \bar{\xi}_{x0}(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}\bar{\xi}_x(0, x) = \dot{\bar{\xi}}_{x0}(x). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Il est alors naturel de développer la fonction inconnue  $\bar{\xi}_x : [0, T] \rightarrow CA \in L^2$ , sur la base des modes propres  $\tilde{\xi}_x^n$  de vibration du système (on rappelle, à ce sujet, que  $(\tilde{\xi}_x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base Hilbertienne de  $L^2$  et que  $(\tilde{\xi}_x^n/\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base Hilbertienne de  $CA$ ) :

$$\bar{\xi}_x(t, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n(t) \tilde{\xi}_x^n(x). \tag{4.9}$$

On commence alors par décomposer les conditions initiales sur les modes propres de vibration :

$$\bar{\xi}_{x0} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \tilde{\xi}_x^n, \quad \dot{\bar{\xi}}_{x0} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \tilde{\xi}_x^n,$$

(séries convergeant respectivement dans  $H^1$  et dans  $L^2$ ), où :

$$\begin{aligned} a_n &= \left( \bar{\xi}_{x0}, \tilde{\xi}_x^n \right)_{\text{cin}} = \frac{1}{\omega_n^2} \left( \bar{\xi}_{x0}, \tilde{\xi}_x^n \right)_{\text{élas}}, \\ b_n &= \left( \dot{\bar{\xi}}_{x0}, \tilde{\xi}_x^n \right)_{\text{cin}}. \end{aligned}$$

Il en résulte en particulier :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \omega_n^2 a_n^2 &= \left\| \bar{\xi}_{x0} \right\|_{\text{élas}}^2 = E|\mathcal{S}| \int_0^L \left( \frac{d\bar{\xi}_{x0}}{dx} \right)^2, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2 &= \left\| \dot{\bar{\xi}}_{x0} \right\|_{\text{cin}}^2 = \rho_0|\mathcal{S}| \int_0^L \dot{\bar{\xi}}_{x0}^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Utilisant alors les modes propres  $\bar{\xi}_x^n$  comme fonctions test dans la formulation faible (4.8), il vient immédiatement :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} q_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) &= 0, \\ q_n(0) = a_n, \quad \frac{d}{dt} q_n(0) &= b_n, \end{aligned}$$

dont on déduit :

$$q_n(t) = a_n \cos \omega_n t + \frac{b_n}{\omega_n} \sin \omega_n t.$$

Ainsi, chacune des fonctions  $q_n(t)$  est complètement déterminée par la connaissance des conditions initiales, ce qui, en particulier, établit *l'unicité* de solution au problème d'évolution considéré.

Analysons, pour conclure, les propriétés de convergence de la série (4.9). Pour cela, un calcul élémentaire donne :

$$\begin{aligned} &\left\| \sum_{n=p}^q q_n(t) \tilde{\xi}_x^n(x) \right\|_{\text{élas}}^2 + \left\| \frac{d}{dt} \sum_{n=p}^q q_n(t) \tilde{\xi}_x^n(x) \right\|_{\text{cin}}^2 \\ &= \sum_{n=p}^q \omega_n^2 \left( q_n(t) \right)^2 + \left( \frac{d}{dt} q_n(t) \right)^2, \\ &= \sum_{n=p}^q \left( a_n \omega_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t \right)^2 + \left( -a_n \omega_n \sin \omega_n t + b_n \cos \omega_n t \right)^2, \\ &= \sum_{n=p}^q \omega_n^2 a_n^2 + b_n^2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Il résulte alors des propriétés de convergence des séries (4.10), que les sommes partielles de la série (4.9) sont des suites de Cauchy dans les espaces Banach  $C^0([0, T]; H^1)$  et  $C^1([0, T]; L^2)$ . La série (4.10) converge donc dans chacun de ces deux espaces et la somme appartient donc à  $C^0([0, T]; H^1) \cap C^1([0, T]; L^2)$ . Ces propriétés de convergence permettent, par ailleurs, de faire  $p = 0$  et  $q = +\infty$  dans l'égalité (4.11). On obtient alors :

$$\left\| \bar{\xi}_x(t, x) \right\|_{\text{élas}}^2 + \left\| \frac{\partial \bar{\xi}_x}{\partial t}(t, x) \right\|_{\text{cin}}^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \omega_n^2 a_n^2 + b_n^2 = \left\| \bar{\xi}_{x0} \right\|_{\text{élas}}^2 + \left\| \dot{\bar{\xi}}_{x0} \right\|_{\text{cin}}^2,$$

c'est-à-dire que la somme des énergies élastique de déformation et cinétique se conserve au cours du temps.

Au final, on a montré que la formulation faible (4.8) du problème d'évolution admet une unique solution dans  $C^0([0, T]; H^1) \cap C^1([0, T]; L^2)$  et que celle-ci est donnée par :

$$\bar{\xi}_x(t, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( a_n \cos \omega_n t + \frac{b_n}{\omega_n} \sin \omega_n t \right) \tilde{\xi}_x^n(x),$$

la série convergeant pour la norme de chacun des espaces  $C^0([0, T]; H^1)$  et  $C^1([0, T]; L^2)$ .

### Cas des vibrations transverses

Se donnant la condition initiale  $(\bar{\xi}_y, \dot{\bar{\xi}}_y) \in CA \times L^2$ , la formulation faible du problème d'évolution s'écrit sous la même forme :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \left( \bar{\xi}_y(t), \hat{u}_y \right)_{\text{cin}} + \left( \bar{\xi}_y(t), \hat{u}_y \right)_{\text{élas}} &= 0, \quad \forall \hat{u}_y \in CA = CA_0, \\ \bar{\xi}_y(0, x) &= \bar{\xi}_{y0}(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{\xi}_y(0, x) = \dot{\bar{\xi}}_{y0}(x), \end{aligned}$$

la seule différence avec ce qui précède étant que le produit scalaire en énergie élastique de déformation est celui associé à l'énergie élastique de déformation en flexion au lieu de l'énergie élastique en traction-compression. L'ensemble de l'analyse se déroule ensuite à l'identique. On en déduit au final que ce problème d'évolution admet une unique solution dans  $C^0([0, T]; H^2) \cap C^1([0, T]; L^2)$  et que celle-ci est donnée par :

$$\bar{\xi}_y(t, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( a_n \cos \Omega_n t + \frac{b_n}{\Omega_n} \sin \Omega_n t \right) \tilde{\xi}_y^n(x),$$

la série convergeant pour la norme de chacun des espaces  $C^0([0, T]; H^2)$  et  $C^1([0, T]; L^2)$ .

### 4.4.3 Prise en compte d'effort d'excitation distribué

On se propose, ici, d'étudier les aménagements à apporter à l'analyse développée dans les paragraphes précédents de façon à prendre en compte un torseur  $[\bar{F}_0, \bar{C}_0]$  d'effort d'excitation distribué. Ayant déjà traité le cas des conditions initiales non-homogènes dans le paragraphe précédent, on pourra se limiter ici au cas particulier des conditions initiales homogènes, le cas non-homogène s'obtenant par superposition.

Le cas des vibrations transverses se déclinant à l'identique, on limitera également l'analyse au cas des vibrations axiales. La formulation faible du problème d'évolution s'écrit maintenant :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \left( \bar{\xi}_x(t), \hat{u}_x \right)_{\text{cin}} + \left( \bar{\xi}_x(t), \hat{u}_x \right)_{\text{élas}} &= \left( \frac{\bar{F}_{0x}(t)}{\rho_0 |S|}, \hat{u}_x \right)_{\text{cin}}, \quad \forall \hat{u}_x \in CA = CA_0, \\ \bar{\xi}_x(0, x) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{\xi}_x(0, x) = 0. \end{aligned}$$

On peut alors supposer, par exemple, que la donnée en chargement possède la régularité  $\bar{F}_{0x} \in L^2(]0, T[; L^2) = L^2(]0, T[ \times ]0, L[; \mathbb{R})$  de manière à pouvoir la développer suivant les

modes propres de vibration :

$$\frac{\bar{F}_{0x}(t, x)}{\rho_0 |\mathcal{S}|} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \tilde{\xi}_x^n(x),$$

où chaque fonction  $f_n(t)$  est une fonction de carré intégrable. Cherchant de nouveau une solution sous forme de superposition modale :

$$\bar{\xi}_x(t, x) = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n(t) \tilde{\xi}_x^n(x), \quad (4.12)$$

et utilisant comme précédemment les modes propres de vibration comme fonctions test dans la formulation faible, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} q_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) &= f_n(t), \\ q_n(0) &= 0, \quad \frac{d}{dt} q_n(0) = 0, \end{aligned}$$

dont on déduit :

$$q_n(t) = \frac{1}{\omega_n} \int_0^t \sin[\omega_n(t-s)] f_n(s) ds.$$

Une analyse similaire à celle conduite dans le paragraphe précédent permettrait de montrer que la série (4.12) converge au sens de la norme de chacun des espaces  $C^0([0, T]; H^1)$  et  $C^1([0, T]; L^2)$  et fournit ainsi l'unique solution dans  $C^0([0, T]; H^1) \cap C^1([0, T]; L^2)$  du problème d'évolution considéré.

#### 4.4.4 Cas de conditions aux limites non-homogènes

L'analyse conduite dans les paragraphes précédents peut, à première vue, sembler spécifique au cas des conditions aux limites homogènes, dans lequel, en particulier, l'espace affine  $CA$  est un espace vectoriel. Dans ce paragraphe, on va présenter, sans le détailler, un artifice permettant de ramener systématiquement le cas des conditions aux limites non-homogènes à celui des conditions aux limites homogènes.

Ici encore, la présentation est limitée au cas des vibrations axiales, le cas des vibrations transverses se déclinant à l'identique.

On considère donc le problème d'évolution :

$$\begin{aligned} E|\mathcal{S}| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{\xi}_x(t, x) &= \rho_0 |\mathcal{S}| \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\xi}_x(t, x), \\ \bar{\xi}_x(t, 0) &= \bar{\xi}_{0x}(t), \\ E|\mathcal{S}| \frac{\partial}{\partial x} \bar{\xi}_x(t, L) &= F_{Lx}(t), \\ \bar{\xi}_x(0, x) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{\xi}_x(0, x) = 0, \end{aligned}$$

où  $\bar{\xi}_{0x}(t)$  et  $F_{Lx}(t)$  sont deux fonctions du temps données supposées nulles en  $t = 0$  ainsi que leurs dérivées premières par rapport à  $t$  pour simplifier. À chaque instant  $t$ , on peut

associer à ces données aux limites le problème *statique* :

$$\begin{aligned} E|\mathcal{S}|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\bar{\xi}_x^{\text{stat}}(t, x) &= 0, \\ \bar{\xi}_x^{\text{stat}}(t, 0) &= \bar{\xi}_{0x}(t), \\ E|\mathcal{S}|\frac{\partial}{\partial x}\bar{\xi}_x^{\text{stat}}(t, L) &= F_{Lx}(t), \end{aligned}$$

dont la solution sera notée  $\bar{\xi}_x^{\text{stat}}$  dans toute la suite. On opère ensuite le changement de fonction inconnue :

$$\bar{\xi}_x(t, x) = \bar{\xi}_x^{\text{stat}}(t, x) + \delta\bar{\xi}_x(t, x),$$

dans le problème d'évolution, de sorte que la nouvelle fonction inconnue  $\delta\bar{\xi}_x$  est maintenant solution du problème d'évolution :

$$\begin{aligned} E|\mathcal{S}|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta\bar{\xi}_x(t, x) - \rho_0|\mathcal{S}|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{\xi}_x^{\text{stat}}(t, x) &= \rho_0|\mathcal{S}|\frac{\partial^2}{\partial t^2}\delta\bar{\xi}_x(t, x), \\ \delta\bar{\xi}_x(t, 0) &= 0, \\ E|\mathcal{S}|\frac{\partial}{\partial x}\delta\bar{\xi}_x(t, L) &= 0, \\ \delta\bar{\xi}_x(0, x) &= 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\delta\bar{\xi}_x(0, x) = 0, \end{aligned}$$

qui, si l'on suppose le problème statique résolu, est formellement un problème d'évolution avec conditions aux limites homogènes et force linéique non homogène. On est ainsi ramené, par cet artifice, à l'analyse effectuée dans le paragraphe précédent.

Signalons juste, pour conclure, que ce procédé exige une forte régularité en temps des données aux limites (par exemple  $H^2([0, T]; \mathbb{R})$ ).

## 4.5 Récapitulatif des formules essentielles

- Ensemble des équations gouvernant le mouvement d'une poutre naturelle élastique dans le cadre d'analyse linéarisé TIEN (exemple de condition à la limite purement cinématique imposée en l'extrémité amont et purement statique en l'extrémité aval) :

$$\left[ \frac{\partial \underline{R}}{\partial S}, \frac{\partial \underline{M}}{\partial S} + \underline{T} \wedge \underline{R} \right] + [\underline{F}_0, \underline{C}_0] = [\bar{\rho}_0 \ddot{\underline{\xi}}, \underline{I}_0^\rho \cdot \ddot{\underline{\theta}}],$$

$$\begin{pmatrix} \underline{R} \\ \underline{M} \end{pmatrix} = \underline{A} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{\underline{\xi}}}{\partial S} + \underline{T} \wedge \underline{\theta} \\ \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial S} \end{pmatrix},$$

$$\{\bar{\underline{\xi}}(0), \underline{\theta}(0)\} = \{\bar{\underline{\xi}}_0, \underline{\theta}_0\}, \quad [\underline{R}(L), \underline{M}(L)] = [\underline{F}_L, \underline{C}_L].$$

- Ensemble des équations gouvernant le mouvement d'une poutre élastique obéissant à la loi de comportement standard dans le cadre d'analyse linéarisé TIEN (exemple de condition à la limite purement cinématique imposée en l'extrémité amont et purement statique en l'extrémité aval) :

$$\left[ \frac{\partial \underline{R}}{\partial S}, \frac{\partial \underline{M}}{\partial S} + \underline{T} \wedge \underline{R} \right] + [\underline{F}_0, \underline{C}_0] = [\bar{\rho}_0 \ddot{\underline{\xi}}, \underline{I}_0^\rho \cdot \ddot{\underline{\theta}}],$$

$$R_T = E|\mathcal{S}| \underline{T} \cdot \frac{\partial \bar{\underline{\xi}}}{\partial S},$$

$$M_T = \mu J \underline{T} \cdot \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial S},$$

$$\underline{\theta}_\perp = \underline{T} \wedge \frac{\partial \bar{\underline{\xi}}}{\partial S},$$

$$\underline{M}_\perp = EI \underline{I} \cdot \left( \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial S} \right)_\perp,$$

$$\{\bar{\underline{\xi}}(0), \underline{\theta}(0)\} = \{\bar{\underline{\xi}}_0, \underline{\theta}_0\}, \quad [\underline{R}(L), \underline{M}(L)] = [\underline{F}_L, \underline{C}_L].$$

- Ensemble des équations gouvernant le mouvement d'une poutre élastique obéissant à la loi de comportement standard inextensible dans le cadre d'analyse linéarisé TIEN (exemple de condition à la limite purement cinématique imposée en l'extrémité amont et purement statique en l'extrémité aval) :

$$\left[ \frac{\partial \underline{R}}{\partial S}, \frac{\partial \underline{M}}{\partial S} + \underline{T} \wedge \underline{R} \right] + [\underline{F}_0, \underline{C}_0] = [\bar{\rho}_0 \ddot{\underline{\xi}}, \underline{I}_0^\rho \cdot \ddot{\underline{\theta}}],$$

$$\frac{\partial \bar{\underline{\xi}}}{\partial S} + \underline{T} \wedge \underline{\theta} = \underline{0},$$

$$M_T = \mu J \underline{T} \cdot \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial S},$$

$$\underline{M}_\perp = EI \underline{I} \cdot \left( \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial S} \right)_\perp,$$

$$\{\bar{\underline{\xi}}(0), \underline{\theta}(0)\} = \{\bar{\underline{\xi}}_0, \underline{\theta}_0\}, \quad [\underline{R}(L), \underline{M}(L)] = [\underline{F}_L, \underline{C}_L].$$

- Formulations variationnelles de l'équilibre d'une poutre naturelle élastique dans le cadre d'analyse linéarisé TIEN (exemple de conditions à la limite purement cinématiques imposées aux deux extrémités) :

$$CA = \left\{ \left\{ \hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}} \right\} \in H^1(]0, L[; \mathbb{R}^6) \mid \left\{ \hat{\underline{\xi}}(0), \hat{\underline{\theta}}(0) \right\} = \left\{ \bar{\underline{\xi}}_0, \underline{\theta}_0 \right\}, \right. \\ \left. \text{et } \left\{ \hat{\underline{\xi}}(L), \hat{\underline{\theta}}(L) \right\} = \left\{ \bar{\underline{\xi}}_L, \underline{\theta}_L \right\} \right\},$$

$$SA = \left\{ \left[ \underline{R}^*, \underline{M}^* \right] \in L^2(]0, L[; \mathbb{R}^6) \mid \frac{d}{dS} \left[ \underline{R}^*, \underline{M}^* \right] + \left[ \bar{\underline{E}}_0, \bar{\underline{C}}_0 \right] = \left[ \underline{0}, \underline{0} \right] \right\}.$$

L'unique champ de déplacement linéarisé  $\{\bar{\underline{\xi}}, \underline{\theta}\}$  solution du problème d'équilibre minimise sur  $CA$  l'énergie potentielle totale :

$$E_p(\{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\}) = W(\{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\}) - \Phi(\{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\}),$$

où :

$$W(\{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\}) = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{d}{dS} \{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\} \cdot \underline{A} \cdot \frac{d}{dS} \{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\},$$

$$\Phi(\{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\}) = \int_0^L \left[ \bar{\underline{E}}_0, \bar{\underline{C}}_0 \right] \cdot \{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\}.$$

L'unique champ de contrainte généralisée  $[\underline{R}, \underline{M}]$  solution du problème d'équilibre minimise sur  $SA$  l'énergie complémentaire :

$$E_c([\underline{R}^*, \underline{M}^*]) = W^*([\underline{R}^*, \underline{M}^*]) - \Phi^*([\underline{R}^*, \underline{M}^*]),$$

où :

$$W^*([\underline{R}^*, \underline{M}^*]) = \frac{1}{2} \int_0^L [\underline{R}^*, \underline{M}^*] \cdot \underline{A}^{-1} \cdot [\underline{R}^*, \underline{M}^*],$$

$$\Phi^*([\underline{R}^*, \underline{M}^*]) = \left\{ \bar{\underline{\xi}}_L, \underline{\theta}_L \right\} \cdot [\underline{R}^*(L), \underline{M}^*(L)] \\ - \left\{ \bar{\underline{\xi}}_0, \underline{\theta}_0 \right\} \cdot [\underline{R}^*(0), \underline{M}^*(0)].$$

- Formulations variationnelles de l'équilibre d'une poutre élastique obéissant à la loi de comportement standard dans le cadre d'analyse linéarisé TIEN (exemple de conditions à la limite purement cinématiques imposées aux deux extrémités). Les modifications à apporter au • qui précède sont la prise-en-compte de la liaison interne de Navier-Bernoulli dans la définition de l'espace affine des champs de déplacement linéarisé cinématiquement admissibles :



$$CA = \left\{ \left\{ \hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}} \right\} \in H^1(]0, L[; \mathbb{R}^6) \mid \hat{\underline{\theta}}_{\perp} = \underline{T} \wedge \frac{d\hat{\underline{\xi}}}{dS}, \quad \left\{ \hat{\underline{\xi}}(0), \hat{\underline{\theta}}(0) \right\} = \left\{ \bar{\underline{\xi}}_0, \underline{\theta}_0 \right\}, \right. \\ \left. \text{et } \left\{ \hat{\underline{\xi}}(L), \hat{\underline{\theta}}(L) \right\} = \left\{ \bar{\underline{\xi}}_L, \underline{\theta}_L \right\} \right\},$$

ainsi que l'explicitation des énergies élastiques de déformation :

$$W\left(\left\{ \hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}} \right\}\right) = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ E|\mathcal{S}| \left( \frac{d\hat{\underline{\xi}}}{dS} \right)_T^2 + \mu J \left( \frac{d\hat{\underline{\theta}}}{dS} \right)_T^2 + E \left( \frac{d\hat{\underline{\theta}}}{dS} \right)_{\perp} \cdot \underline{I} \cdot \left( \frac{d\hat{\underline{\theta}}}{dS} \right)_{\perp} \right\},$$

et de contrainte :

$$W^*\left([\underline{R}^*, \underline{M}^*]\right) = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \frac{(\underline{R}_T^*)^2}{E|\mathcal{S}|} + \frac{(\underline{M}_T^*)^2}{\mu J} + \frac{\underline{M}_{\perp}^* \cdot \underline{I}^{-1} \cdot \underline{M}_{\perp}^*}{E} \right\}.$$

- Formulations variationnelles de l'équilibre d'une poutre élastique obéissant à la loi de comportement standard inextensible dans le cadre d'analyse linéarisé TIEN (exemple de conditions à la limite purement cinématiques imposées aux deux extrémités). Les modifications à apporter concernent la prise-en-compte de toutes les liaisons internes dans la définition de l'espace affine des champs de déplacement linéarisé cinématiquement admissibles :

$$CA = \left\{ \left\{ \hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}} \right\} \in H^1(]0, L[; \mathbb{R}^6) \mid \frac{d\hat{\underline{\xi}}}{dS} + \underline{T} \wedge \hat{\underline{\theta}} = \underline{0}, \quad \left\{ \hat{\underline{\xi}}(0), \hat{\underline{\theta}}(0) \right\} = \left\{ \bar{\underline{\xi}}_0, \underline{\theta}_0 \right\}, \right. \\ \left. \text{et } \left\{ \hat{\underline{\xi}}(L), \hat{\underline{\theta}}(L) \right\} = \left\{ \bar{\underline{\xi}}_L, \underline{\theta}_L \right\} \right\},$$

ainsi que l'explicitation des énergies élastiques de déformation :

$$W\left(\left\{ \hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}} \right\}\right) = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \mu J \left( \frac{d\hat{\underline{\theta}}}{dS} \right)_T^2 + E \left( \frac{d\hat{\underline{\theta}}}{dS} \right)_{\perp} \cdot \underline{I} \cdot \left( \frac{d\hat{\underline{\theta}}}{dS} \right)_{\perp} \right\},$$

et de contrainte :

$$W^*\left([\underline{R}^*, \underline{M}^*]\right) = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \frac{(\underline{M}_T^*)^2}{\mu J} + \frac{\underline{M}_{\perp}^* \cdot \underline{I}^{-1} \cdot \underline{M}_{\perp}^*}{E} \right\}.$$

## 4.6 Exercices

**Exercice 1. À propos de l'approximation consistant à calculer les treillis de poutres en treillis de barres articulées.** Une approximation couramment retenue lors du calcul des treillis de poutres rectilignes, comme les treillis de cornières constituant les pylones des lignes électriques à haute tension, consiste à remplacer tous les assemblages « soudés », par des assemblages articulés. Cette approximation a pour effet de diminuer le degré d'hyperstaticité des équilibres linéarisés (TIEN) en jeu et de simplifier notablement les calculs qui en résultent. L'objectif de cet exercice est d'évaluer l'erreur résultant de cette approximation en analysant un exemple simple, et de mettre en évidence les arguments qui la justifient.

On considère les deux problèmes d'équilibre représentés sur la figure 4.8. Dans les deux cas, les poutres ① et ② sont identiques et issues de la considération de cylindres tridimensionnels constitués d'un matériau élastique homogène isotrope (module d'Young noté  $E$ , aire commune à toutes les sections  $|\mathcal{S}|$  et moment principal d'inertie géométrique dans la direction  $\underline{e}_z$  orthogonale au plan de la figure, noté  $I$ ). Les poutres ① et ② seront supposées obéir à la loi de comportement standard *extensible*, et donc, en particulier, à la liaison interne de Navier-Bernoulli. Les configurations représentées sur la figure sont les configurations initiales, supposées dénuées de contrainte et prises comme référence. Les deux poutres, de longueur identique  $L$ , y forment un angle droit. Le chargement consiste en la seule donnée de la force  $P\underline{e}_x + Q\underline{e}_y$  appliquée à la jonction des deux poutres. En particulier, les poutres sont libres de densité linéique d'efforts extérieurs. L'analyse de l'équilibre sera menée dans le cadre linéarisé TIEN. Les deux problèmes d'équilibre linéarisés ne diffèrent donc

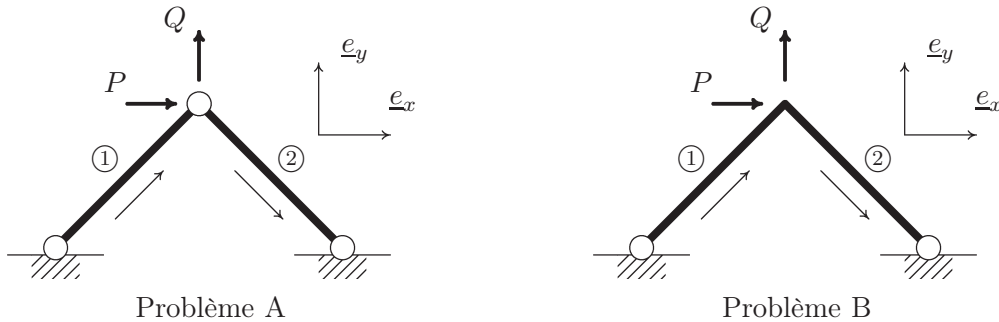


FIG. 4.8 – Description des deux problèmes d'équilibre linéarisés A et B.

que par les conditions d'assemblage des deux poutres : rotule parfaite pour le problème A et solidarité parfaite pour le problème B. Enfin, les deux problèmes d'équilibre linéarisés TIEN étant plans, on disposera de :

$$R_z = M_x = M_y = 0, \quad \bar{\xi}_z = \theta_x = \theta_y = 0.$$

- 1) Calculer la distribution d'équilibre de contrainte généralisée dans les deux poutres pour le problème A, ainsi que le déplacement  $p\underline{e}_x + q\underline{e}_y$  du point de jonction des poutres ① et ②.
- 2) Calculer la distribution d'équilibre de contrainte généralisée dans les deux poutres pour le problème B, ainsi que le déplacement  $p\underline{e}_x + q\underline{e}_y$  du point de jonction des poutres ① et ②.

3) Constaté que l'écart relatif entre les deux distributions de contrainte généralisée, ainsi qu'entre les deux déplacements du point de jonction, fait intervenir un même paramètre géométrique adimensionnel, moralement petit, que l'on précisera. À quelle condition, l'approximation consistant à remplacer la condition de solidarité parfaite du problème B par la condition d'articulation parfaite du problème A, est-elle justifiée ?

#### Éléments de réponse.

1) Les deux poutres sont initialement rectilignes, libres d'effort linéique extérieur. La distribution de contrainte généralisée de chacune des poutres dans le cadre d'analyse linéarisé TIEN satisfait alors à l'équilibre :

$$\frac{d\underline{R}}{dS} = \underline{0}, \quad \frac{d\underline{M}}{dS} + \underline{T} \wedge \underline{R} = \underline{0},$$

dont il résulte, dans un premier temps, que le vecteur  $\underline{R}$  est constant, puis que le vecteur  $\underline{M}$  est une fonction affine de l'abscisse curviligne  $S$ . Les conditions à la limite de moment nul aux extrémités, associées à la présence des rotules parfaites, montrent alors, dans un deuxième temps, que  $\underline{M}$  est, en fait, identiquement nul et donc que  $\underline{R}$  est nécessairement colinéaire à  $\underline{T}$ . Ainsi, dans le cadre d'analyse linéarisé TIEN, toute poutre initialement rectiligne, libre d'effort linéique extérieur et articulée à ses deux extrémités travaille nécessairement en barre, c'est-à-dire que toutes les composantes de contrainte généralisée  $y$  sont nulles hormis l'effort normal qui est homogène.

L'équilibre de la rotule centrale, dans le problème A, s'écrit alors :

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} N^{(1)} (\underline{e}_x + \underline{e}_y) + \frac{\sqrt{2}}{2} N^{(2)} (\underline{e}_x - \underline{e}_y) + P \underline{e}_x + Q \underline{e}_y = \underline{0},$$

dont on déduit immédiatement :

$$N^{(1)} = \frac{\sqrt{2}}{2} (P + Q), \quad N^{(2)} = \frac{\sqrt{2}}{2} (-P + Q),$$

soit :

$$\begin{aligned} \underline{R}^{(1)} &= \frac{P + Q}{2} (\underline{e}_x + \underline{e}_y), & \underline{M}^{(1)} &= \underline{0}, \\ \underline{R}^{(2)} &= \frac{-P + Q}{2} (\underline{e}_x - \underline{e}_y), & \underline{M}^{(2)} &= \underline{0}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Le problème d'équilibre considéré est isostatique.

L'énergie complémentaire se réduisant ici à l'énergie élastique de contrainte :

$$E_c(P, Q) = \frac{L}{2E|\mathcal{S}|} (P^2 + Q^2),$$

le théorème de Castigliano-Menabrea donne alors instantanément les composantes de déplacement cherchées :

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial E_c(P, Q)}{\partial P} = \frac{L}{E|\mathcal{S}|} P, \\ q &= \frac{\partial E_c(P, Q)}{\partial Q} = \frac{L}{E|\mathcal{S}|} Q. \end{aligned}$$

2) Remarquons d'abord que la distribution (4.13) de contrainte généralisée d'équilibre du problème A est évidemment statiquement admissible pour les données statiques du problème B et fournit donc un élément particulier de l'espace affine  $SA$  des champs de contrainte généralisée statiquement admissibles avec les données du problème B. L'identification de l'espace affine  $SA$  est donc ramenée à celle de son espace vectoriel associé, à savoir l'espace  $SA_0$  des champs d'auto-contrainte.

Pour calculer les champs d'auto-contrainte, on considère donc la circonstance particulière  $P = Q = 0$ . Écrivant alors que le moment, évalué en l'extrémité amont de la poutre ①, de tous les efforts

extérieurs sur l'assemblage, est nécessairement nul à l'équilibre, on constate que la réaction d'appui en l'extrémité aval de la poutre ② est nécessairement colinéaire à  $\underline{e}_x$ , et s'écrit donc  $X \underline{e}_x$ . Faisant alors systématiquement usage, pour chaque poutre, des équations d'équilibre du cadre linéarisé TIEN :

$$\frac{d\underline{R}}{dS} = \underline{0}, \quad \frac{d\underline{M}}{dS} + \underline{T} \wedge \underline{R} = \underline{0},$$

on identifie alors facilement tous les champs d'auto-contrainte :

$$\begin{aligned} \underline{R}^{\textcircled{1}} &= X \underline{e}_x, & \underline{M}^{\textcircled{1}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} X S \underline{e}_z, \\ \underline{R}^{\textcircled{2}} &= X \underline{e}_x, & \underline{M}^{\textcircled{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} X (L - S) \underline{e}_z, \end{aligned} \quad (4.14)$$

où l'inconnue hyperstatique  $X \in \mathbb{R}$  est arbitraire. Le problème d'équilibre B est donc hyperstatique de degré 1.

On obtient donc toutes les distributions de contrainte généralisée statiquement admissibles en faisant la somme des distributions (4.13) et (4.14) :

$$\begin{aligned} \underline{R}^{\textcircled{1}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (P + X + Q) \frac{\sqrt{2}}{2} (\underline{e}_x + \underline{e}_y) + \frac{\sqrt{2}}{2} X \frac{\sqrt{2}}{2} (\underline{e}_x - \underline{e}_y), & \underline{M}^{\textcircled{1}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} X S \underline{e}_z, \\ \underline{R}^{\textcircled{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} (-P + X + Q) \frac{\sqrt{2}}{2} (\underline{e}_x - \underline{e}_y) + \frac{\sqrt{2}}{2} X \frac{\sqrt{2}}{2} (\underline{e}_x + \underline{e}_y), & \underline{M}^{\textcircled{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} X (L - S) \underline{e}_z. \end{aligned}$$

L'énergie complémentaire d'une telle distribution statiquement admissible se réduit à l'énergie élastique de contrainte :

$$\begin{aligned} E_c(P, Q, X) &= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{(N^{\textcircled{1}}(S))^2}{E|S|} + \frac{(M_z^{\textcircled{1}}(S))^2}{EI} + \frac{1}{2} \int_0^L \frac{(N^{\textcircled{2}}(S))^2}{E|S|} + \frac{(M_z^{\textcircled{2}}(S))^2}{EI}, \\ &= \frac{L}{2E|S|} (P^2 + Q^2 + 2QX + X^2) + \frac{L^3}{6EI} X^2, \end{aligned}$$

rendue minimale par :

$$X = -Q \left( 1 + \frac{|S|L^2}{3I} \right)^{-1}, \quad (4.15)$$

qui est donc la valeur de l'inconnue hyperstatique à l'équilibre, dont on déduit la distribution de contrainte généralisée à l'équilibre :

$$\begin{aligned} \underline{R}^{\textcircled{1}} &= \frac{P + Q}{2} (\underline{e}_x + \underline{e}_y) + X \underline{e}_x, & \underline{M}^{\textcircled{1}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} X S \underline{e}_z, \\ \underline{R}^{\textcircled{2}} &= \frac{-P + Q}{2} (\underline{e}_x - \underline{e}_y) + X \underline{e}_x, & \underline{M}^{\textcircled{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} X (L - S) \underline{e}_z. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Les composantes de déplacement cherchées sont alors commodément obtenues à l'aide du théorème de Castigliano-Menabrea :

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial E_c(P, Q, X)}{\partial P} = \frac{L}{E|S|} P, \\ q &= \frac{\partial E_c(P, Q, X(Q))}{\partial Q} = \frac{L}{E|S|} (Q + X), \end{aligned} \quad (4.17)$$

où l'inconnue hyperstatique  $X$  prend la valeur (4.15) calculée précédemment.

3) La solution du problème A correspond au choix  $X = 0$  de l'inconnue hyperstatique dans (4.16) et (4.17), tandis que la solution du problème B correspond au choix de l'inconnue hyperstatique donné par la formule (4.15). On voit donc que l'écart entre les deux solutions est proportionnel à :

$$X = -Q \left( 1 + \frac{|\mathcal{S}|L^2}{3I} \right)^{-1},$$

et que, donc, l'écart relatif est mesuré par  $X/Q$  qui ne dépend que du paramètre géométrique adimensionnel :

$$\frac{I}{|\mathcal{S}|L^2} = O(D^2/L^2),$$

où  $D$  désigne le diamètre des sections. Ce paramètre tend donc vers 0 comme l'inverse du carré de l'élanement et est donc moralement petit pour les cylindres élancés. En fait, la validité de l'analyse en terme de théorie des poutres requiert une circonsance de grand élanement de chacun des cylindres et donc assure la condition :

$$\frac{I}{|\mathcal{S}|L^2} \ll 1,$$

qui suffit à justifier l'approximation consistant à remplacer la condition de solidarité parfaite du problème B par la condition d'articulation parfaite du problème A. On constate que cette approximation est d'autant meilleure que les cylindres en jeu sont *élancés*. La systématisation de cette approximation trouve néanmoins ses limites lorsqu'en remplaçant systématiquement les encastresments par des rotules parfaites, on rend le problème d'équilibre hypostatique. Cette circonsance est parfaitement possible comme le montre l'exemple de la poutre console.

**Exercice 2. Équilibre d'un treillis isostatique élancé.** On considère le treillis de  $4n$  poutres rectilignes dont la géométrie de référence (supposée dénuée de contrainte) est représentée sur la figure 4.9. Chacune des poutres de ce treillis, étant issue de la considération d'un cylindre tridimensionnel élastique homogène isotrope, est supposée obéir à la loi de comportement standard (le module d'élasticité en traction-compression, supposé identique pour toutes les poutres, est noté  $E|\mathcal{S}|$ ). Le chargement consiste seulement en des forces exercées sur les rotules terminales  $A_n$  et  $B_n$  (dont les amplitudes  $F$ ,  $G$ ,  $H$  sont comptées positivement dans les directions représentées sur la figure 4.9), à l'exclusion de toute densité linéique d'effort sur aucune poutre. On souhaite étudier l'équilibre de cette structure dans le cadre d'analyse TIEN.

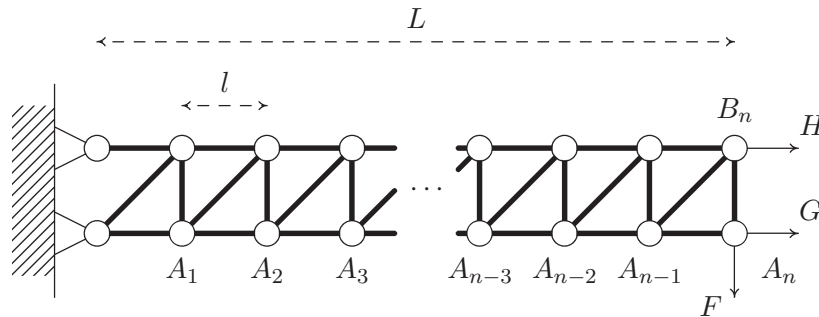


FIG. 4.9 – Équilibre d'un treillis élancé de barres.

- 1) Montrer que ce problème d'équilibre est isostatique et calculer la distribution des tensions dans les barres.
- 2) Calculer le déplacement de chacune des rotules du treillis à l'équilibre.
- 3) En faisant tendre  $l$  vers 0, à  $L$  fixé, et en examinant le déplacement du centre de chaque barre  $A_i B_i$  ainsi que sa rotation, montrer que l'ensemble du treillis se comporte asymptotiquement, lorsque l'élanement  $L/l$  tend vers l'infini, comme une poutre de Navier-Bernoulli inextensible dont on évaluera la raideur en flexion. Commenter.

### Éléments de réponse.

1) La linéarité des équations en jeu permet de traiter séparément les trois cas de chargement  $(F, G = 0, H = 0)$ ,  $(F = 0, G, H = 0)$ ,  $(F = 0, G = 0, H)$ , le cas général étant obtenu en faisant la somme des résultats obtenus dans chacun des trois cas particuliers. Les poutres étant rectilignes, libres d'effort linéiques et articulées à leurs extrémités, travaillent nécessairement en barres : c'est-à-dire que la seule composante non nulle de contrainte généralisée à l'équilibre est l'effort normal ou tension.

Commençons donc par examiner le cas de chargement  $(F, G = 0, H = 0)$ . En coupant par la pensée la barre  $B_{i-1} B_i$  et en écrivant la nullité du moment en  $A_{i-1}$  de tous les efforts extérieurs s'exerçant sur la partie du treillis en aval de  $A_{i-1}$ , il vient :

$$B_{i-1} B_i : \quad N = (n + 1 - i)F.$$

De même, en coupant par la pensée la barre  $A_{i-1} A_i$  et en écrivant la nullité du moment en  $B_i$  de tous les efforts extérieurs s'exerçant sur la partie du treillis en aval de  $B_i$ . Il vient :

$$A_{i-1} A_i : \quad N = -(n - i)F.$$

L'équilibre, au choix de la rotule  $A_{i-1}$  ou  $B_i$  permet alors d'achever le calcul par l'identification des tensions dans les autres barres :

$$\begin{aligned} A_{i-1} B_i &: \quad N = -F\sqrt{2}, \\ A_i B_i &: \quad N = F. \end{aligned}$$

Réciproquement, cette répartition de tension est bien compatible avec l'équilibre de chaque rotule : le problème considéré est isostatique. De la même manière, on montre que dans le deuxième cas de chargement  $(F = 0, G, H = 0)$ , on a :

$$A_{i-1} A_i : \quad N = G,$$

les tensions étant nulles dans toutes les autres barres. De façon similaire, dans le troisième cas de chargement  $(F = 0, G = 0, H)$ , on a :

$$B_{i-1} B_i : \quad N = H,$$

les tensions étant nulles dans toutes les autres barres. On déduit de cette analyse, la répartition de tension dans chacune des poutres à l'équilibre :

$$\begin{aligned} A_{i-1} A_i &: \quad N = -(n - i)F + G, \\ B_{i-1} B_i &: \quad N = (n + 1 - i)F + H, \\ A_i B_i &: \quad N = F, \\ A_{i-1} B_i &: \quad N = -F\sqrt{2}. \end{aligned}$$

**2)** Calculons d'abord le déplacement de chaque rotule dans le premier cas de chargement ( $F, G = 0, H = 0$ ). La composante « horizontale » du déplacement (linéarisé par rapport et à la déformation et à la rotation) de chacune des rotules se déduit facilement de la connaissance des tensions dans les barres horizontales. Ainsi, la composante « horizontale » du déplacement de la rotule  $A_i$  vaut :

$$-\frac{Fl}{E|\mathcal{S}|} \sum_{k=1}^i (n-k) = -i(2n-i-1) \frac{Fl}{2E|\mathcal{S}|},$$

(comptée positivement vers la droite de la figure) et celle de la rotule  $B_i$  vaut :

$$\frac{Fl}{E|\mathcal{S}|} \sum_{k=1}^i (n+1-k) = i(2n-i+1) \frac{Fl}{2E|\mathcal{S}|}.$$

On évalue ensuite la composante « verticale » du déplacement de la rotule  $A_n$  en évaluant l'énergie complémentaire du système :

$$\begin{aligned} E_c(F) &= \frac{lF^2}{2E|\mathcal{S}|} \sum_{k=1}^n (n-k)^2 + \frac{lF^2}{2E|\mathcal{S}|} \sum_{k=1}^n (n+1-k)^2 + \frac{nlF^2}{2E|\mathcal{S}|} + \frac{nlF^2\sqrt{2}}{E|\mathcal{S}|}, \\ &= \frac{lF^2}{6E|\mathcal{S}|} n(2n^2+1) + \frac{nlF^2}{2E|\mathcal{S}|} (1+2\sqrt{2}), \end{aligned}$$

(où l'on a fait usage de l'identité  $\sum_{k=1}^n k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ ), puis en utilisant le théorème de Castigliano-Menabrea :

$$\frac{d}{dF} E_c(F) = \frac{lF}{3E|\mathcal{S}|} n(2n^2+1) + \frac{nlF}{E|\mathcal{S}|} (1+2\sqrt{2}),$$

comptée positivement vers le bas de la figure. Pour évaluer la composante verticale de la rotule  $A_i$ , on applique la charge fictive  $F_i$ , (comptée positivement vers le bas de la figure) et destinée à devenir évanescence. La répartition des tensions dans les barres est alors inchangée dans les barres en aval de  $A_i$  et est donnée dans les barres en amont par :

$$\begin{aligned} B_{k-1}B_k &: N = (n+1-k)F + (i+1-k)F_i, \\ A_{k-1}A_k &: N = -(n-k)F - (i-k)F_i, \\ A_{k-1}B_k &: N = -(F+F_i)\sqrt{2}, \\ A_kB_k &: N = F + F_i. \end{aligned}$$

pour  $k = 1, 2, \dots, i$ . Par le théorème de Castigliano-Menabrea, la composante « verticale » (comptée positivement vers le bas de la figure) du déplacement de la rotule  $A_i$  est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_c}{\partial F_i}(F, F_i = 0) &= \frac{lF}{E|\mathcal{S}|} \sum_{k=1}^i (n-k)(i-k) + \frac{lF}{E|\mathcal{S}|} \sum_{k=1}^i (n+1-k)(i+1-k) \\ &\quad + \frac{iF}{E|\mathcal{S}|} + \frac{iF\sqrt{2}}{E|\mathcal{S}|}, \\ &= \frac{lF}{3E|\mathcal{S}|} i(3ni - i^2 + 1) + \frac{iF}{E|\mathcal{S}|} (1 + 2\sqrt{2}). \end{aligned}$$

La composante « verticale » (comptée positivement vers le bas de la figure) du déplacement de la rotule  $B_i$  est celle de la rotule  $A_i$  diminuée de la quantité  $Fl/E|\mathcal{S}|$  (indépendante de  $i$ ).

Le calcul se mène exactement de la même manière dans le deuxième cas de chargement. La composante « horizontale » du déplacement des rotules  $B_i$  est nulle, tandis que celle de la rotule  $A_i$  vaut :

$$\frac{i l G}{E |S|}.$$

Le théorème de Castigliano-Menabrea avec charge évanescence donne alors la composante « verticale » du déplacement de la rotule  $A_i$ , qui est égale à celle de la rotule  $B_i$  :

$$-i(i-1) \frac{l G}{2 E |S|},$$

(comptée positivement vers le bas de la figure). De façon similaire, pour le troisième cas de chargement, la composante « horizontale » du déplacement des rotules  $A_i$  est nulle, celle de la rotule  $B_i$  vaut :

$$\frac{i l H}{E |S|},$$

et la composante « verticale » du déplacement des rotules  $A_i$  ou  $B_i$  est donnée par :

$$i(i+1) \frac{l H}{2 E |S|}.$$

En posant  $x_i = il$ , on constate facilement que la composante « horizontale » du déplacement du milieu de la barre  $A_i B_i$  est donnée par :

$$\bar{\xi}_x(x_i) = x_i \frac{F + G + H}{2 E |S|},$$

(comptée positivement vers la droite de la figure), que sa composante « verticale » est :

$$\bar{\xi}_y(x_i) = -x_i^2(3L - x_i) \frac{F}{3 E |S| l^2} - (4 + 6\sqrt{2})x_i \frac{F}{3 E |S|} + l \frac{F}{2 E |S|} + x_i^2 \frac{G - H}{2 E |S| l} - x_i \frac{G + H}{2 E |S|},$$

(comptée positivement vers le haut de la figure), et que l'angle de rotation de cette barre s'écrit :

$$\theta(x_i) = -x_i(2L - x_i) \frac{F}{E |S| l^2} + x_i \frac{G - H}{E |S| l}.$$

En introduisant les composantes longitudinales  $F_x$  et transversales  $F_y$  de la résultante des efforts extérieurs appliqués sur la barre  $A_n B_n$ , ainsi que le moment  $C$  de ces efforts en le milieu de cette barre :

$$\begin{aligned} F_x &= G + H, \\ F_y &= -F, \\ C &= \frac{l(G - H)}{2}, \end{aligned}$$

ces résultats s'écrivent :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_x(x_i) &= x_i \frac{F_x - F_y}{2 E |S|}, \\ \bar{\xi}_y(x_i) &= x_i^2(3L - x_i) \frac{F_y}{3 E |S| l^2} + (4 + 6\sqrt{2})x_i \frac{F_y}{3 E |S|} - l \frac{F_y}{2 E |S|} \\ &\quad + x_i^2 \frac{C}{E |S| l^2} - x_i \frac{F_x}{2 E |S|}, \\ \theta(x_i) &= x_i(2L - x_i) \frac{F_y}{E |S| l^2} + 2x_i \frac{C}{E |S| l^2}. \end{aligned}$$



3) Lorsque l'élancement du treillis tend vers l'infini, tous les autres termes deviennent négligeables devant ceux en  $x_i^2/E|\mathcal{S}|l^2$  et on obtient asymptotiquement :

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_x(x) &= 0, \\ \bar{\xi}_y(x) &= x^2(3L-x) \frac{F_y}{3E|\mathcal{S}|l^2} + x^2 \frac{C}{E|\mathcal{S}|l^2}, \\ \theta(x) &= x(2L-x) \frac{F_y}{E|\mathcal{S}|l^2} + 2x \frac{C}{E|\mathcal{S}|l^2},\end{aligned}$$

qui n'est autre le déplacement de fibre moyenne et la rotation de section d'une poutre de Navier-Bernoulli inextensible dont la raideur en flexion (l'équivalent de la quantité  $EI$  dans la loi de comportement standard inextensible) est donnée par :

$$\frac{E|\mathcal{S}|l^2}{2}.$$

Ce résultat appelle un commentaire. La répartition des tensions à l'équilibre dans le treillis montre ce sont les barres « horizontales » qui supportent les tensions les plus élevées. Ceci conduit à l'interprétation suivante. La raideur en flexion de l'ensemble semble provenir de la raideur en traction-compression des deux chaînes de barres « horizontales », les autres barres n'ayant finalement que pour seule fonction de solidariser ces deux chaînes. Cette analyse est étayée par le fait que si l'on considère un cylindre (de largeur unité dans la direction  $\underline{e}_z$ ), constitué d'un matériau élastique homogène et isotrope (module d'Young  $E$ ) réparti suivant deux bandes d'équations  $l/2 - |\mathcal{S}|/2 \leq \pm y \leq l/2 + |\mathcal{S}|/2$  avec  $|\mathcal{S}| \ll l$ , la raideur en flexion calculée comme dans la loi de comportement standard inextensible donne :

$$EI = \frac{E|\mathcal{S}|l^2}{2} \left(1 + o(|\mathcal{S}|/l)\right).$$

Ce résultat est exploité en pratique dans la conception de poutres dont les sections sont en « I », dans le but d'obtenir une raideur en flexion élevée.

**Exercice 3. Pourquoi les spaghettis ne cassent-ils pas en deux morceaux<sup>3</sup> ?** L'expérience courante montre qu'un spaghetti cru et sec, sollicité en flexion, se brise, non pas en deux, mais plutôt en un nombre allant de trois à huit morceaux. Cet exercice a pour objectif de parvenir à une explication de ce phénomène.

Le spaghetti sec y sera modélisé comme une poutre élastique, initialement rectiligne (dirigée suivant  $\underline{e}_x$ ) et dénuée de contrainte, obéissant à la loi de comportement standard inextensible. Toute l'étude sera menée sous l'hypothèse de la transformation infinitésimale à partir de l'état naturel permettant la *linéarisation* de toutes les équations en jeu. Négligeant systématiquement, comme à l'accoutumée, le terme d'inertie associé à la rotation des sections, l'équation qui gouverne les vibrations libres de la composante transverse  $\bar{\xi}_y$  du déplacement de la ligne moyenne est alors donnée par :

$$EI \frac{\partial^4 \bar{\xi}_y}{\partial x^4} + \rho_0 |\mathcal{S}| \frac{\partial^2 \bar{\xi}_y}{\partial t^2} = 0,$$

(cf section 4.4), ou encore après changement approprié de l'unité de temps :

$$\bar{\xi}_y'''' + \bar{\xi}_y'' = 0. \quad (4.18)$$

<sup>3</sup>D'après : B. AUDOLY & S. NEUKIRCH (2005) Fragmentation of rods by cascading cracks : why spaghetti do not break in half? *Physical Review Letters* **95**, 095505.

Pour discuter de la rupture du spaghetti, il faut disposer d'un critère de rupture. Dans la circonstance en jeu, il est naturel de postuler que ce critère s'exprime en terme de la courbure locale (inverse du rayon de courbure) de la ligne moyenne. Plus précisément, on supposera que la rupture se produit dès que la courbure locale atteint la valeur critique  $\kappa_c > 0$ , caractéristique du spaghetti considéré, et supposée connue.

Dans le plan Euclidien rapporté à  $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$  cartésien orthonormé direct, on considère une courbe régulière  $x(s)\underline{e}_x + y(s)\underline{e}_y$  paramétrée par son abscisse curviligne  $s$ . Notant  $\underline{t}(s)$  le vecteur unitaire tangent,  $\underline{n}(s)$  le vecteur normal tangent orienté de sorte que  $(\underline{t}, \underline{n})$  soit direct, la courbure algébrique  $\kappa(s)$  est *définie* par la formule de Frenet :

$$\frac{d\underline{t}}{ds} = \kappa \underline{n}.$$

Elle admet donc l'expression suivante en terme des fonctions  $x(s)$  et  $y(s)$  :

$$\kappa = (\underline{t} \wedge \underline{t}') \cdot \underline{e}_z = x'y'' - y'x''. \quad (4.19)$$

1) *Montrer qu'à l'approximation consentie (transformation infinitésimale), la courbure locale de la poutre élastique modélisant le spaghetti se réduit à  $\kappa = \bar{\xi}_y''$ . Quelle est l'équation aux dérivées partielles qui gouverne la courbure locale  $\kappa$  lors de l'évolution dynamique de la poutre élastique ?*

On considère dorénavant l'évolution dynamique libre du spaghetti astreint aux conditions aux limites *invariables* suivantes :

- extrémité amont  $x = 0$  libre (torseur des efforts extérieurs imposés constamment nul),
- extrémité aval  $x = L$  encastree (distributeur des déplacements linéarisés constamment nul),

à partir de la condition initiale à l'instant  $t = 0$  définie par :

- extrémité aval  $x = L$  respectant la condition d'encastrement,
- courbure locale identiquement égale à la constante  $\kappa_0$ ,
- champ de (distributeur des) vitesses identiquement nul,

(cf figure 4.10).

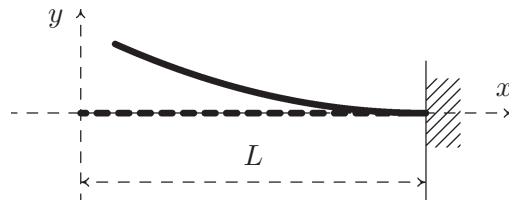


FIG. 4.10 – Configuration initiale du problème modèle (configuration de référence en pointillé).

2) *Expliciter les conditions aux limites ainsi que la condition initiale en terme du déplacement transverse  $\bar{\xi}_y$ . Constaté alors que la configuration initiale ne satisfait pas la condition à la limite en l'extrémité amont.*

Il résulte de cette observation qu'une onde est nécessairement émise de l'extrémité amont  $x = 0$  à l'instant initial. Bien entendu, tant que cette onde n'a pas parcouru une distance

grande devant le diamètre de la section, l'analyse dans le cadre de la théorie des poutres est dénuée de pertinence physique. On introduit alors un temps caractéristique  $t_0$  associé à la propagation de cette onde sur une distance de l'ordre du diamètre  $D$  des sections, ainsi qu'un temps caractéristique  $T_0$  associé à la propagation de cette onde sur une distance de l'ordre de la longueur  $L$  de la poutre, et on décide de focaliser l'étude sur la gamme des temps  $t$  définie par :

$$t_0 \ll t \ll T_0,$$

pour laquelle, l'utilisation de la théorie des poutres est pertinente, et l'onde considérée n'a pas encore subi de réflexion en l'extrémité aval encastrée. Dans ce régime, on est alors amené à rechercher des solutions *auto-semblables*, c'est-à-dire, compte-tenu de la forme de l'équation de la dynamique en jeu et de la configuration initiale, de la forme :

$$\kappa(x, t) = u(x/\sqrt{t}), \quad (4.20)$$

ou encore, en intégrant deux fois par rapport à  $x$  :

$$\bar{\xi}_y(x, t) = t v(x/\sqrt{t}) + f(t)x + g(t), \quad (4.21)$$

pour une certaine fonction  $v$  encore inconnue. Le terme  $f(t)x + g(t)$  définit un déplacement rigidifiant infinitésimal encore arbitraire. Dans la suite, on adoptera la notation  $\sigma = x/\sqrt{t}$ .

**3)** Montrer que les fonctions  $v$ ,  $f$  et  $g$  sont liées par l'équation différentielle :

$$4v''''(\sigma) + \sigma^2 v''(\sigma) - \sigma v'(\sigma) + 4t^{3/2} \ddot{f}(t) \sigma + 4t \ddot{g}(t) = 0.$$

En déduire que les fonctions  $t^{3/2} \ddot{f}(t)$  et  $t \ddot{g}(t)$  sont nécessairement constantes. Montrer enfin que les seules fonctions  $\bar{\xi}_y$  de la forme (4.21) à retenir, sont celles où les fonctions  $f(t) = at + b$ ,  $g(t) = ct + d$  sont affines et où la fonction  $v(\sigma)$  est solution de l'équation différentielle :

$$4v''''(\sigma) + \sigma^2 v''(\sigma) - \sigma v'(\sigma) = 0. \quad (4.22)$$

On rappelle alors la valeur des intégrales de Fresnel :

$$\int_0^{+\infty} \cos \frac{x^2}{4} dx = \int_0^{+\infty} \sin \frac{x^2}{4} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

et on note  $C(\sigma)$ ,  $S(\sigma)$  les intégrales indéfinies correspondantes :

$$C(\sigma) = \int_0^\sigma \cos \frac{x^2}{4} dx, \quad S(\sigma) = \int_0^\sigma \sin \frac{x^2}{4} dx,$$

ainsi que :

$$F(\sigma) = \frac{\sigma}{2} \cos \frac{\sigma^2}{4} + \frac{1}{2} C(\sigma) + \frac{\sigma^2}{4} S(\sigma).$$

**4)** Vérifier que  $F(\sigma)$  est solution de l'équation différentielle (4.22). Montrer alors que toutes les solutions de l'équation (4.22) qui sont compatibles avec les conditions à la limite en l'extrémité amont  $x = 0$  pour la fonction  $\bar{\xi}_y$ , sont données par :

$$v(\sigma) = v_0 + v_0' F(\sigma),$$

où  $v_0$  et  $v'_0$  désignent deux constantes réelles arbitraires. Vérifier alors qu'un choix judicieux des constantes  $v_0, v'_0$  et  $a, b, c, d$  permet d'assurer la compatibilité avec la condition initiale.

5) En déduire qu'il existe une unique fonction  $\kappa$  auto-semblable (de la forme (4.20)) telle que l'évolution dynamique correspondante soit compatible avec les conditions à la limite en l'extrémité amont  $x = 0$  ainsi qu'avec la condition initiale. Donner alors l'expression de cette distribution  $\kappa$  de courbure.

Certaines expériences permettent de constater que, partant d'une configuration de courbure homogène  $|\kappa_0| < \kappa_c$  supportable *statiquement*, le spaghetti se brise néanmoins lors de son évolution dynamique (des photos de telles expériences sont disponibles dans les « éléments de réponse » ci-dessous).

6) En s'appuyant sur les calculs menés précédemment, ainsi que sur le graphe de la fonction  $S(\sigma)$  ci-dessous, proposer alors une explication de cette observation expérimentale.

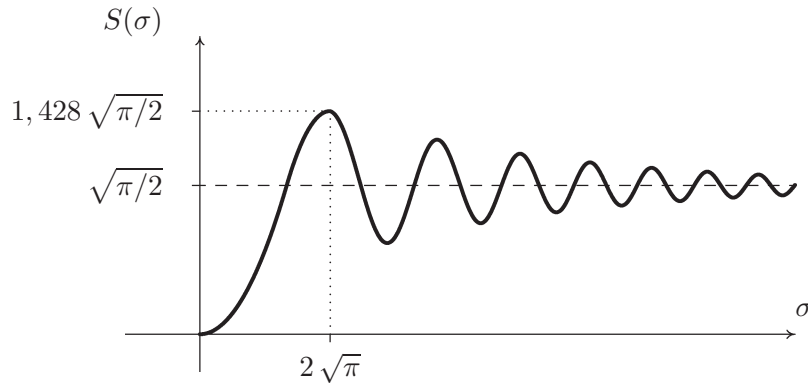


FIG. 4.11 – Graphe de la fonction  $S(\sigma)$ .

On rappelle qu'une poutre initialement rectiligne est dite *sollicitée en flexion pure* lorsque soumise aux conditions de chargement suivantes.

- Résultante des efforts extérieurs imposés en chaque extrémité nulle,
- moment des efforts extérieurs imposés en chaque extrémité dirigé suivant une direction perpendiculaire à la configuration initiale,
- distribution des efforts extérieurs linéïques imposés identiquement nulle (pesanteur négligée).

7) Vérifier que la configuration d'équilibre de la poutre modélisant un spaghetti sollicité en flexion pure est telle que la ligne moyenne a une courbure homogène (arc de cercle). Proposer alors une explication du fait d'expérience courante qu'un spaghetti cru et sec, sollicité en flexion pure, se brise généralement non pas en deux, mais en un nombre de morceaux supérieur ou égal à trois.

#### Éléments de réponse.

1) Avec les notations utilisées ici, la position actuelle de la ligne moyenne est donnée par :

$$(x + \bar{\xi}_x(x)) \underline{e}_x + \bar{\xi}_y(x) \underline{e}_y,$$

où  $x$  n'est autre que l'abscisse curviligne dans la configuration initiale qui est aussi ici l'abscisse curviligne dans la configuration actuelle, compte-tenu de la liaison interne d'inextensibilité. Compte-tenu de l'expression (4.19), il en résulte dans un premier temps :

$$\kappa = (1 + \bar{\xi}'_x)\bar{\xi}''_y - \bar{\xi}'_y\bar{\xi}''_x.$$

Mais, rappelant l'expression *linéarisée* de la liaison interne d'inextensibilité :  $\bar{\xi}'_x \equiv 0$ , on a alors le résultat attendu :  $\kappa = \bar{\xi}''_y$ . On peut noter d'ailleurs que ce résultat subsisterait hors de l'hypothèse d'inextensibilité.

Prenant deux fois la dérivée partielle de l'équation de la dynamique (4.18) par rapport à  $x$ , on voit que l'équation qui gouverne l'évolution de la courbure est la même que celle qui gouverne le déplacement :

$$\kappa'''' + \ddot{\kappa} = 0.$$

2) Compte-tenu de l'expression linéarisée de la liaison interne de Navier-Bernoulli :

$$\theta_z = \frac{\partial \bar{\xi}_y}{\partial x},$$

la condition d'encastrement en l'extrémité  $x = L$  s'écrit :

$$\bar{\xi}_y(L) = \bar{\xi}'_y(L) = 0.$$

En utilisant, la loi de comportement, d'une part :

$$M_z = EI \frac{\partial \theta_z}{\partial x},$$

et l'équation du mouvement :

$$\frac{\partial M_z}{\partial x} + R_y = 0,$$

(où le terme associé à l'inertie de rotation des sections est négligé), d'autre part, il vient :

$$M_z = EI \bar{\xi}''_y, \quad R_y = -EI \bar{\xi}'''_y.$$

La condition d'extrémité libre  $R_y = M_z = 0$  en  $x = 0$  se réduit donc à :

$$\bar{\xi}''_y(0) = \bar{\xi}'''_y(0) = 0.$$

La configuration initiale est alors donnée par :

$$\bar{\xi}_{y0}(x) = \frac{\kappa_0}{2}(x - L)^2,$$

et est associée à une vitesse initiale nulle  $\dot{\bar{\xi}}_{y0} \equiv 0$ .

Au final, les conditions aux limites sont :

$$\bar{\xi}''_y(0) = \bar{\xi}'''_y(0) = 0, \quad \bar{\xi}_y(L) = \bar{\xi}'_y(L) = 0,$$

et la condition initiale :

$$\bar{\xi}_{y0}(x) = \frac{\kappa_0}{2}(x - L)^2, \quad \dot{\bar{\xi}}_{y0}(x) = 0.$$

Comme :

$$\bar{\xi}''_{y0}(0) = \kappa_0,$$

la configuration initiale ne satisfait clairement pas la condition d'extrémité libre en  $x = 0$ .

3) Partant de  $\bar{\xi}_y(x, t) = tv(x/\sqrt{t}) + f(t)x + g(t)$ , on calcule aisément :

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\xi}}_y &= v\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \frac{x}{2\sqrt{t}}v'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \dot{f}(t)x + \dot{g}(t), \\ \ddot{\bar{\xi}}_y &= -\frac{x}{4t\sqrt{t}}v'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \frac{x^2}{4t^2}v''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \ddot{f}(t)x + \ddot{g}(t).\end{aligned}$$

Injectant ce dernier résultat dans l'équation du mouvement  $\bar{\xi}_y'''' + \ddot{\bar{\xi}}_y = 0$ , il vient :

$$\frac{1}{t}v''''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \frac{x}{4t\sqrt{t}}v'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \frac{x^2}{4t^2}v''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \ddot{f}(t)x + \ddot{g}(t) = 0,$$

soit, en multipliant par  $4t$  :

$$4v''''(\sigma) + \sigma^2 v''(\sigma) - \sigma v'(\sigma) + 4t\sqrt{t}\ddot{f}(t)\sigma + 4t\ddot{g}(t) = 0,$$

qui est l'équation différentielle attendue. Examinant cette identité dans le cas où  $x = 0$ , on obtient :

$$t\ddot{g}(t) = -v''''(0).$$

Choisissant alors  $x = \sqrt{t}$ , on obtient :

$$t\sqrt{t}\ddot{f}(t) = v''''(0) - v''''(1) - \frac{1}{4}v''(1) + \frac{1}{4}v'(1),$$

et la conclusion cherchée est atteinte.

On peut donc écrire :

$$\ddot{f}(t) = \frac{\alpha}{4t^{3/2}}, \quad \ddot{g}(t) = \frac{\beta}{t},$$

pour deux constantes réelles  $\alpha, \beta$ . Il vient alors :

$$\begin{aligned}f(t) &= -\alpha\sqrt{t} + at + b, \\ g(t) &= \beta(t \log t - t) + ct + d,\end{aligned}$$

et donc :

$$\bar{\xi}_y(x, t) = tv(x/\sqrt{t}) - \alpha t(x/\sqrt{t}) + (at + b)x + \beta(t \log t - t) + (ct + d).$$

Cette expression montre que, quitte à changer  $v(\sigma)$  en  $v(\sigma) - \alpha\sigma$ , on peut *toujours* supposer  $\alpha = 0$ . La vitesse est alors donnée par :

$$\dot{\bar{\xi}}_y(x, t) = v(x/\sqrt{t}) - \frac{x}{2\sqrt{t}}v'(x/\sqrt{t}) + ax + \beta \log t + c,$$

ou encore :

$$\dot{\bar{\xi}}_y(x, t) = w(x/\sqrt{t}) + ax + 2\beta \log x + c,$$

pour une certaine fonction  $w$  de  $x/\sqrt{t}$ . Fixant  $x$  arbitrairement, on voit que cette fonction  $w$  doit nécessairement admettre une limite (simple) en  $+\infty$ . Comme cette limite est indépendante de  $x$ , la condition de vitesse initiale nulle exige  $\beta = 0$  (ainsi que  $a = 0$ ). Au final, les seules fonctions  $\bar{\xi}_y(x, t)$  de la forme (4.21) à retenir, s'écrivent :

$$\bar{\xi}_y(x, t) = tv(x/\sqrt{t}) + bx + (ct + d),$$

où  $v$  est nécessairement solution de l'équation différentielle (4.22), compte-tenu de la réponse à la question précédente et du fait que l'on sait dorénavant  $\dot{f} \equiv \dot{g} \equiv 0$ .

4) L'équation différentielle (4.22) est linéaire homogène d'ordre 4, et régulière. L'ensemble de ses solutions forme donc un espace vectoriel de dimension 4. Une solution quelconque  $v$  est alors déterminée par la donnée des quatre réels  $v(0)$ ,  $v'(0)$ ,  $v''(0)$ ,  $v'''(0)$ , lesquels peuvent être choisis arbitrairement.

La condition d'extrémité amont libre de la poutre se traduit pour la fonction  $v$  par les conditions suivantes.

$$v''(0) = v'''(0) = 0.$$

On calcule alors :

$$\begin{aligned} F(\sigma) &= \frac{\sigma}{2} \cos \frac{\sigma^2}{4} + \frac{1}{2} C(\sigma) + \frac{\sigma^2}{4} S(\sigma), \\ F'(\sigma) &= \cos \frac{\sigma^2}{4} + \frac{\sigma}{2} S(\sigma), \\ F''(\sigma) &= \frac{1}{2} S(\sigma) \\ F'''(\sigma) &= \frac{1}{2} \sin \frac{\sigma^2}{4}, \\ F''''(\sigma) &= \frac{\sigma}{4} \cos \frac{\sigma^2}{4}. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que  $F$  est solution de l'équation (4.22), d'une part, et :

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 1, \quad F''(0) = F'''(0) = 0,$$

d'autre part. Il en résulte que la solution  $v$  de l'équation (4.22) satisfaisant :

$$v(0) = v_0, \quad v'(0) = v'_0, \quad v''(0) = v'''(0) = 0,$$

s'écrit :

$$v(\sigma) = v_0 + v'_0 F(\sigma),$$

ce qui est la conclusion demandée.

Dans le cadre d'analyse linéarisé qui prévaut ici, la distribution de courbure locale s'identifie à la dérivée seconde en espace du déplacement transversal :  $\kappa = \bar{\xi}_y''$ . La distribution de courbure associée à l'une quelconque des fonctions  $v$  retenues précédemment, s'écrit alors :

$$\kappa(x, t) = v'_0 F''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \frac{v'_0}{2} S\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right),$$

où  $v'_0$  est une constante réelle pour lors arbitraire. Pour que cette distribution soit cohérente avec la configuration initiale de courbure homogène  $\kappa_0$ , et compte-tenu de la valeur de l'intégrale de Fresnel rappelée dans l'énoncé, il faut donc faire le choix  $v'_0 = 2\kappa_0\sqrt{2/\pi}$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_y &= v_0 t + v'_0 t F(\sigma) + (at + b)x + (ct + d), \\ &= v_0 t + \kappa_0 t \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[ \sigma \cos \frac{\sigma^2}{4} + C(\sigma) + \frac{\sigma^2}{2} S(\sigma) \right] + (at + b)x + (ct + d), \\ \dot{\bar{\xi}}_y &= v_0 + v'_0 \left[ F(\sigma) - \frac{\sigma}{2} F'(\sigma) \right] + ax + c, \\ &= v_0 + \kappa_0 \sqrt{2/\pi} C(\sigma) + ax + c, \end{aligned}$$

et donc, en utilisant de nouveau la valeur des intégrales de Fresnel :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_y(x, t = 0) &= \frac{\kappa_0}{2} x^2 + bx + d, \\ \dot{\bar{\xi}}_y(x, t = 0) &= v_0 + \kappa_0 + ax + c, \end{aligned}$$

Au final, les choix :

$$v(\sigma) = 2\kappa_0\sqrt{2/\pi}F(\sigma), \quad a = 0, \quad b = -\kappa_0L, \quad c = -\kappa_0, \quad d = \kappa_0L^2/2,$$

permettent d'assurer que la fonction  $\bar{\xi}_y$  correspondante satisfait les conditions à la limite en l'extrémité amont, ainsi que toute les conditions initiales.

5) Recherchant *a priori* une distribution de courbure locale auto-semblable (4.20), et compte-tenu qu'à l'approximation consentie la courbure s'identifie à la dérivée seconde en espace du déplacement transversal :  $\kappa = \bar{\xi}_y''$ , une double intégration par rapport à  $x$  montre que le déplacement transversal prend nécessairement la forme (4.21). L'analyse menée en 3) et 4) permet alors de caractériser toutes les distributions de déplacement transversal de la forme (4.21), qui sont solutions de l'équation de la dynamique et compatibles avec les conditions à la limite en l'extrémité amont  $x = 0$  ainsi qu'avec toutes les conditions initiales. Prenant la dérivée seconde de l'un quelconque de ces champs de déplacement permet d'identifier toutes les distributions de courbure auto-semblable (4.20) telles que l'évolution dynamique correspondante soit compatible avec la condition d'extrémité libre en  $x = 0$ , ainsi qu'avec la condition initiale. On constate alors au vu de la réponse à la question précédente, qu'une telle distribution de courbure s'écrit nécessairement :

$$\kappa(x, t) = 2\kappa_0\sqrt{2/\pi}F''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) = \kappa_0\sqrt{2/\pi}S\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right). \quad (4.23)$$

6) La gamme des temps  $t_0 \ll t \ll T_0$ , retenue pour l'étude, correspond à l'intervalle où l'onde émise par l'extrémité amont libre a parcouru une distance grande devant le diamètre de la section, mais encore petite devant la longueur totale de la poutre. Pour les  $t$  de cet intervalle de temps,  $\sigma = L/\sqrt{t}$  doit donc être tel que la fonction  $S(\sigma)$  prenne des valeurs proches de l'asymptote. Il en résulte que pour tous les  $t$  de cet intervalle de temps, il existe un point  $x$  de la poutre dont la courbure est  $\kappa(x, t) = 1,428\kappa_0$ . Pour les valeurs de la courbure initiale  $\kappa_0$  telles que :

$$|\kappa_0| < \kappa_c, \quad |1,428\kappa_0| > \kappa_c,$$

la poutre supporte la courbure initiale *statiquement* mais se brise au cours de son évolution dynamique lorsqu'elle est lâchée, car l'onde émise de l'extrémité libre induit localement une courbure supérieure à celles supportables par la poutre.

7) Les équations de l'équilibre :

$$\frac{d\mathbf{R}}{dx} = \mathbf{0}, \quad \frac{d\mathbf{M}}{dx} + \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{R} = \mathbf{0},$$

donnent immédiatement, compte-tenu des conditions aux limites :

$$\mathbf{R} \equiv \mathbf{0}, \quad \mathbf{M} \equiv M_0\mathbf{e}_z,$$

et le problème d'équilibre considéré est *isostatique* ( $M_0$  fait alors partie des données du problème). La loi de comportement donne alors :

$$\frac{d\theta_z}{dx} = \frac{M_0}{EI},$$

et donc :

$$\frac{d^2\bar{\xi}_y}{dx^2} = \frac{M_0}{EI},$$

en utilisant l'expression linéarisée de la liaison interne de Navier-Bernoulli. La courbure  $\kappa = M_0/EI$  est alors bien une constante à l'ordre d'approximation consenti (linéarisation sous l'hypothèse de la transformation infinitésimale).

Le fait qu'une courbe plane de courbure constante est nécessairement un arc de cercle se vérifie de la manière suivante, en reprenant les notations préliminaires à la première question. En dérivant



$\underline{n} \cdot \underline{n} \equiv 1$  par rapport à  $s$ , on voit que le vecteur  $d\underline{n}/ds$  est colinéaire à  $\underline{t}$ . Dérivant ensuite  $\underline{t} \cdot \underline{n} \equiv 0$ , on obtient :

$$\frac{d\underline{n}}{ds} = -\kappa \underline{t}.$$

Notant  $m(s)$  le point courant de la courbe considéré, le centre de courbure  $c(s)$  est alors donné par :

$$c(s) = m(s) + \frac{\underline{n}(s)}{\kappa}.$$

Dérivant cette dernière identité par rapport à  $s$ , on voit que le centre de courbure est fixe  $dc/ds \equiv \underline{0}$ . On a alors :

$$\frac{d|\underline{cm}(s)|^2}{ds} = 0,$$

qui montre que tous les points de la courbe sont à la même distance du point fixe  $c$ , c'est-à-dire que la courbe est contenue dans un cercle.

Faisant croître la valeur  $M_0$  du couple de flexion exercé en chaque extrémité, la courbure du spaghetti va donc augmenter, jusqu'à approcher éventuellement la valeur critique  $\kappa_c$ . Une rupture va alors se produire au point du spaghetti rendu le plus fragile par un défaut. L'analyse effectuée à la question 6) est alors applicable à chacun des deux morceaux produits par cette brisure initiale. Il en résulte la possibilité de ruptures en cascade fournissant une explication très plausible de l'observation finale d'un nombre de morceaux supérieur à trois. Bien entendu, l'analyse menée qui ne prend en compte, ni les réflexions des ondes aux extrémités des morceaux produits, ni les atténuations visqueuses de ces ondes, ne permettent d'accéder à une quelconque prévision de la taille et du nombre de morceaux à l'issue de l'expérience.



## Chapitre 5

# Bifurcation et stabilité des équilibres de poutre

Dans le chapitre 4, les équations non-linéaires régissant la dynamique des poutres élastiques dans le cadre d'analyse DI-RF ont été systématiquement linéarisées sous l'hypothèse de la transformation infinitésimale. Il en a résulté les équations linéaires du cadre d'analyse TIEN dont l'étude s'est avérée beaucoup plus simple que celle des équations non-linéaires. On se propose maintenant de revenir au cadre d'analyse non-linéaire avec pour objectif l'étude des manifestations des non-linéarités dont le cadre d'analyse linéarisé TIEN ne peut rendre compte, par nature.

### 5.1 Le flambage d'Euler

#### 5.1.1 Position du problème et analyse en transformation infinitésimale

On considère une poutre dont la configuration de référence, rectiligne, est paramétrée par  $x \in ]0, l[$ . Cette modélisation poutre est issue de la considération d'un cylindre élancé, élastique homogène isotrope de module d'Young  $E$ , et sera donc supposée obéir à la *loi de comportement standard inextensible* décrite au chapitre 3, et justifiée à partir de la théorie de l'élasticité tridimensionnelle au chapitre 6. L'espace sera rapporté à  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$  orthonormé

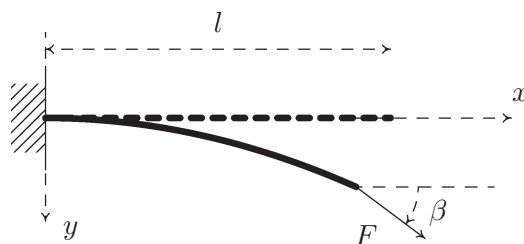


FIG. 5.1 – Un problème d'équilibre dans le cadre d'analyse non-linéaire DI-RF.

et dirigé suivant les directions principales d'inertie géométrique des sections. On notera  $|\mathcal{S}|$  l'aire commune à toutes les sections droites et  $I$  leur moment principal d'inertie géométrique dans la direction  $\underline{e}_z$ .

L'extrémité  $x = 0$  est encastree et l'on exerce sur l'extrémité  $x = l$  un torseur se réduisant à une force  $F \cos \beta \underline{e}_x + F \sin \beta \underline{e}_y$ , dont la direction est définie par l'angle  $\beta$  *supposé invariable* et dont l'amplitude croît de façon régulière de 0 à la valeur finale  $F$ . Pour fixer les idées, on pourra avoir en tête l'exemple d'une canne à pêche et de la force exercée par le fil en son extrémité, lors d'une prise. La prise étant supposée suffisamment bonne, on négligera les efforts de pesanteur (densité linéique d'efforts extérieurs identiquement nulle).

Dans un premier temps, on étudie l'équilibre de cette poutre dans le cadre d'analyse linéarisé TIEN. Dans ce cadre, l'équilibre s'écrit :

$$\frac{d}{dx} \underline{R}(x) = \underline{0}, \quad (5.1)$$

$$\frac{d}{dx} \underline{M}(x) + \underline{e}_x \wedge \underline{R}(x) = \underline{0}, \quad (5.2)$$

$$\underline{R}(l) = F \left( \cos \beta \underline{e}_x + \sin \beta \underline{e}_y \right), \quad (5.3)$$

$$\underline{M}(l) = \underline{0}, \quad (5.4)$$

où l'on constate aisément que la répartition de contrainte généralisée d'équilibre est nécessairement plane :  $R_z = M_x = M_y = 0$ . Du fait que la direction  $\underline{e}_z$  est supposée direction principale d'inertie géométrique des sections, la loi de comportement montre alors que la déformée reste dans le plan  $Oxy$ . Les liaisons internes d'inextensibilité et de Navier-Bernoulli impliquent alors que cette déformée est déterminée par la seule connaissance de la fonction  $\theta(x)$  exprimant l'angle de rotation de la section (ou bien de la tangente à la déformée de la ligne moyenne) attachée au point de la ligne moyenne d'abscisse  $x$  dans la configuration de référence. La prise-en-compte de la loi de comportement ainsi que de la condition cinématique d'encastrement de l'extrémité amont conduit alors au problème aux limites suivant pour la fonction  $\theta(x)$  :

$$EI \frac{d^2}{dx^2} \theta + F \sin \beta = 0,$$

$$\theta(0) = 0, \quad \frac{d}{dx} \theta(l) = 0,$$

dont l'unique solution est donnée par :

$$\theta(x) = \frac{F \sin \beta}{2EI} x(2l - x).$$

Le déplacement transversal est donc donné par une fonction polynomiale de degré 3 en  $x$ . La rotation des sections (ou de la tangente à la ligne moyenne) est maximale à l'extrémité aval :

$$\alpha = \theta(l) = \frac{Fl^2 \sin \beta}{2EI}, \quad (5.5)$$

et le domaine de validité de l'analyse dans le cadre linéarisé TIEN est exprimé par la condition :

$$\left| \frac{Fl^2 \sin \beta}{2EI} \right| \ll 1.$$

Cette condition n'induit pas de restriction dans les cas particuliers  $\beta = 0$  et  $\beta = \pi$ . Dans le cas  $\beta = 0$ , ceci n'est nullement choquant et, bien entendu, en pratique, dans ce cas, on doit se limiter aux valeurs de  $F$  ne conduisant pas à une remise en cause de la liaison interne

d'inextensibilité. Par contre, dans le cas  $\beta = \pi$ , l'intuition courante suggère que la poutre peut être amenée à adopter spontanément des configurations d'équilibre fléchies, au moins lorsque la force exercée est importante. Le cadre d'analyse TIEN (et le résultat d'unicité de solution qui lui est associé) est manifestement inapte à décrire cette circonstance. Enfin, dans le cas d'une force exercée transversalement ( $\beta = \pi/2$ ), l'analyse dans le cadre linéarisé TIEN est limitée aux seules valeurs de la force induisant une rotation de l'extrémité aval de la poutre qui reste infinitésimale. Pour l'application au problème de l'équilibre d'une canne-à-pêche, cela conduit à rejeter hors du cadre TIEN, toute analyse de la pêche d'un poisson de taille raisonnable.

### 5.1.2 Analyse en rotation finie

Compte-tenu des limitations constatées à la fin de la section précédente, on décide de reprendre l'étude de l'équilibre dans le cadre d'analyse DI-RF, et d'étudier la (ou les) configuration d'équilibre susceptible d'être adoptée finalement par la poutre dans ce nouveau cadre d'analyse non-linéaire. Du fait de l'absence de résultat d'unicité associé à ce nouveau cadre d'analyse, on ne peut plus affirmer *a priori* que la (ou les) déformée de la fibre moyenne à l'équilibre reste dans le plan  $Oxy$ . On *décide* néanmoins de ne rechercher que les déformées à l'équilibre dans ce plan  $Oxy$ . De ce fait, l'opérateur  $\underline{R}$  de rotation courante de la section sera nécessairement une rotation autour de  $Oz$  dont l'angle sera noté  $\theta$  dans toute la suite. Du fait des liaisons internes supposées de Navier-Bernoulli et d'inextensibilité, la déformation lagrangienne prend nécessairement la forme :

$$\mathbb{E}(x) = \left( \underline{E}(x), \underline{W}(x) \right) = \left( \underline{0}, \frac{d\theta}{dx}(x) \underline{e}_z \right).$$

L'ensemble des équations gouvernant l'équilibre s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{R}}{dx} &= \underline{0}, \\ \frac{d\underline{M}}{dx} + \left( \cos \theta \underline{e}_x + \sin \theta \underline{e}_y \right) \wedge \underline{R} &= \underline{0}, \\ \left[ \underline{R}(l), \underline{M}(l) \right] &= \left[ F \cos \beta \underline{e}_x + F \sin \beta \underline{e}_y, \underline{0} \right], \\ M_z &= EI \frac{d\theta}{dx}, \\ \theta(0) &= 0, \end{aligned}$$

où l'on constate que l'on peut éliminer les composantes de la contrainte généralisée au profit de la seule fonction inconnue  $\theta$ . Il s'agit alors de trouver toutes les fonctions  $\theta : ]0, l[ \rightarrow \mathbb{R}$  telles que :

$$\begin{aligned} EI \frac{d^2}{dx^2} \theta - F \sin(\theta - \beta) &= 0, \\ \theta(0) = 0, \quad \frac{d}{dx} \theta(l) &= 0. \end{aligned} \tag{5.6}$$

En remplaçant  $x$  par  $t$  (le temps) et  $F/EI$  par  $g/l$ , l'équation (5.6) est l'équation du mouvement d'un pendule simple, dont serait prescrite la position initiale et la vitesse finale.

En intégrant, après multiplication par  $2 d\theta/dx$ , cela exige (intégrale première du mouvement du pendule simple) :

$$EI \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 = -2F \cos(\theta - \beta) + \text{constante.}$$

Posant  $\alpha = \theta(l)$ , il vient :

$$\left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 = \frac{2F}{EI} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\theta - \beta)]. \quad (5.7)$$

Supposant, sans restreindre la généralité,  $\beta \in [0, \pi]$ , et guidé par l'intuition courante issue de la pêche au gros, on décide de limiter la recherche aux fonctions  $\theta(x)$  croissantes. Une seconde intégration donne alors :

$$x \sqrt{\frac{F}{EI}} = \int_0^\theta \frac{d\tilde{\theta}}{\sqrt{2[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\tilde{\theta} - \beta)]}}. \quad (5.8)$$

L'application de ce résultat à la longueur totale  $l$  de la poutre donne le lien (implicite) entre  $l$  et  $\alpha$  sous la forme :

$$l \sqrt{\frac{F}{EI}} = \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{2[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\theta - \beta)]}} \stackrel{\text{déf}}{=} K(\alpha, \beta), \quad (5.9)$$

qui détermine  $\alpha$  pour  $F$  et  $\beta$  donnés. Au final, l'étude de l'équation (5.9) fournit la ou les valeurs de  $\alpha$  pour  $F$  et  $\beta$  donnés, et la formule (5.8) exprime la fonction croissante  $x(\theta)$  dont on déduit la fonction  $\theta(x)$  qui décrit à elle-seule la géométrie de la configuration actuelle. Pour décrire celle-ci de façon plus précise, on est donc amené à étudier l'intégrale elliptique  $K(\alpha, \beta)$ .

### 5.1.3 Étude de $K(\alpha, \pi)$ et mise-en-évidence du flambage d'Euler

Dans le cas  $\beta = 0$ , l'équation (5.7) montre que la configuration d'équilibre rectiligne  $\theta \equiv 0$  est l'unique<sup>1</sup> configuration d'équilibre possible dans l'absolu. Étudions maintenant l'autre extrême  $\beta = \pi$ . L'intégrale elliptique  $K(\alpha, \pi)$ , qui donne la valeur de  $\sqrt{g/l} T/4$  ( $T$  période,  $\alpha$  amplitude) pour le pendule simple, croît avec  $\alpha$  et tend vers l'infini pour  $\alpha = \pi$  (cf figure 5.2). Pour trouver la limite de  $K(\alpha, \pi)$  lorsque  $\alpha$  tend vers 0, on écrit :

$$K(\alpha, \pi) = \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2 - \theta^2 + O(\alpha^4)}} = \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha^2 - \theta^2}} + O(\alpha^2) = \frac{\pi}{2} + O(\alpha^2).$$

Il en résulte que l'équation (5.9) n'a de solution que si :

$$l \sqrt{\frac{F}{EI}} > \frac{\pi}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad F > F_c \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\pi^2 EI}{4l^2},$$

formule dite d'Euler. L'unique solution associée à une fonction  $\theta(x)$  croissante correspond alors à un quart d'oscillation du pendule simple (cf figure 5.3). Plus généralement une solution correspondant à  $2n + 1$  quarts d'onde existe pour  $F > (2n + 1)^2 F_c$ .

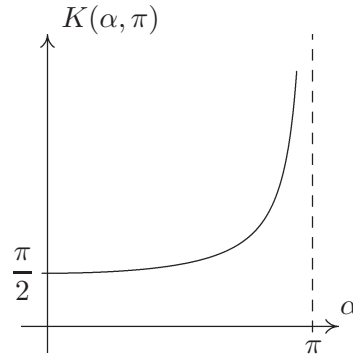
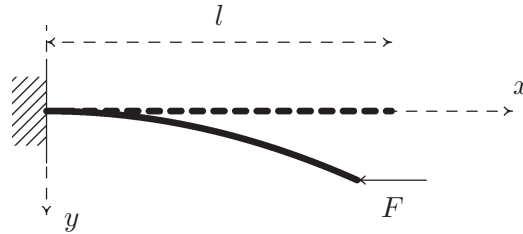
FIG. 5.2 – Graphe de la fonction  $K(\alpha, \pi)$ .

FIG. 5.3 – Équilibre d'une poutre console sollicitée en compression.

Par conséquent, si  $F < F_c$ , la position rectiligne est la seule position d'équilibre. Mais, lorsque  $F > F_c$ , il existe une ou même plusieurs autres positions d'équilibre. On montrera que pour  $F > F_c$ , la position rectiligne est instable. Dès que  $F$  dépasse  $F_c$ , la position rectiligne est donc abandonnée et la poutre fléchit en quart d'onde. La valeur  $F_c$  de  $F$  est appelée charge critique d'Euler. Dans l'expression de  $F_c$ , il faut évidemment prendre le plus petit des deux moments d'inertie principaux  $I_y$  et  $I_z$ .

La tangente à la courbe  $K(\alpha, \pi)$  pour  $\alpha = 0$  est horizontale (isochronisme des petites oscillations du pendule simple). Plus précisément, on sait que  $K(\alpha, \pi) = \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{\alpha^2}{16} + o(\alpha^2) \right)$ . Il suffit donc d'une faible augmentation de  $F$  au-dessus de  $F_c$  pour que  $\alpha$  devienne important. Par exemple, pour  $F = 1,02 F_c$ ,  $\alpha = \pi/8$  et pour  $F = 1,08 F_c$ ,  $\alpha = \pi/4$ . En même temps que  $\alpha$ , la flèche :

$$f = \int_0^l \sin \theta(x) dx = \frac{EI}{F} \frac{d\theta}{dx}(0) = 2\sqrt{\frac{EI}{F}} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (5.10)$$

les moments fléchissants et, par suite, les contraintes, augmentent très rapidement. Par conséquent, un faible dépassement de la charge critique produit la déformation permanente ou la rupture de la poutre. Ce phénomène brusque est appelé le *flambage*.

On remarque que la charge critique ne dépend nullement de la résistance propre de la matière. Bien entendu, cette valeur critique n'intervient que si  $F_c/|\mathcal{S}|$  est inférieur à la

<sup>1</sup>en terme de pendule simple, il s'agit d'un mouvement partant de la configuration initiale « haute », et dont la vitesse s'annule en temps fini. Un tel mouvement est nécessairement l'immobilité.

limite d'élasticité  $\mathcal{R}$  à la compression simple, mais ce cas est très fréquent pour les poutres, le critère discriminant étant l'élanement. Par exemple, pour un poteau circulaire de rayon  $r$ ,  $I = |S|r^2/4$  et on doit avoir :

$$\frac{\pi^2 Er^2}{16l^2} < \mathcal{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{l}{r} > \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{E}{\mathcal{R}}}.$$

Pour l'acier,  $E = 2,1 \cdot 10^5$  MPa,  $\mathcal{R} = 400$  MPa, et on obtient :

$$\frac{l}{r} > 18.$$

Il est d'usage de représenter les résultats obtenus dans un diagramme où l'espace des abscisses est l'espace vectoriel (de dimension infinie) de toutes les fonctions  $\theta(x)$  et où l'on porte l'intensité  $F$  de la force appliquée en ordonnée (cf figure 5.4). Pour des raisons évidentes, ce diagramme est baptisé « diagramme de bifurcation ». L'axe des ordonnées représente la configuration d'équilibre rectiligne, seule configuration possible lorsque  $F$  est

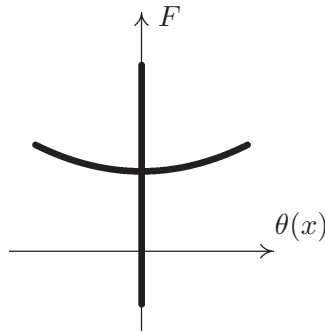


FIG. 5.4 – Diagramme de bifurcation.

inférieure à la force critique d'Euler. On l'appelle la courbe fondamentale d'équilibre. La partie de la courbe correspondant aux configurations d'équilibre fléchies s'appelle « branche bifurquée » de la courbe d'équilibre. Ce type de diagramme est la situation caractéristique que l'on obtient dans tout cadre d'analyse non-linéaire (c'est manifestement le cas du cadre d'analyse DI-RF) avec paramètre de chargement. Le cadre d'analyse TIEN a été obtenu en opérant une linéarisation systématique des équations autour de l'état naturel. Il en résulte que la courbe d'équilibre associée au cadre TIEN (qui est une droite, puisque les équations en jeu sont linéaires) n'est autre que la tangente en l'origine à la courbe d'équilibre fondamentale dans le diagramme de bifurcation. On comprend alors mieux pourquoi il est nécessaire de s'extraire du cadre TIEN pour discuter de la possibilité éventuelle de bifurcation : *la seule connaissance de la tangente en l'origine ne permet en aucun cas de statuer sur la présence éventuelle de point de bifurcation, aussi proche soit-il de l'origine.* C'est une limitation essentielle du cadre d'analyse TIEN : ses prédictions peuvent être non pertinentes vis-à-vis de la réalité (exemple de la compression d'une tige très élancée suivant son axe) alors même que les conditions issues de l'hypothèse de la transformation infinitésimale, qui a permis la linéarisation, semblent satisfaites. Il est, en fait, nécessaire de procéder à une analyse dans un cadre élargi (le cadre « rotations finies ») pour pouvoir justifier *a posteriori* les conclusions issues de l'analyse TIEN.



### 5.1.4 Étude de la fonction $K(\alpha, \beta)$ et influence des imperfections

Passons maintenant à l'étude du cas  $\beta \in ]0, \pi[$ . On constate alors facilement que le domaine de définition pour  $\beta$  fixé et  $\alpha \geq 0$  se réduit à l'intervalle  $\alpha \in [0, \beta[$ , la fonction  $K(\alpha, \beta)$  présentant une asymptote verticale lorsque  $\alpha \rightarrow \beta-$ . Pour  $\beta > 0$ , un équivalent de  $K(\alpha, \beta)$ , lorsque  $\alpha \rightarrow 0+$  est donné par :

$$K(\alpha, \beta) \sim \sqrt{\frac{2\alpha}{\sin \beta}}. \quad (5.11)$$

De l'identité :

$$K(\alpha, \beta) = K(\alpha + \pi - \beta, \pi) - \int_0^{\pi-\beta} \frac{d\theta}{\sqrt{2[\cos \theta - \cos(\alpha + \pi - \beta)]}},$$

on déduit immédiatement que, à  $\beta$  fixé,  $K(\alpha, \beta)$  est une fonction croissante de  $\alpha \in [0, \beta[$ . L'allure de la fonction  $K(\alpha, \beta)$  est représentée sur la figure 5.5. On déduit, en particulier

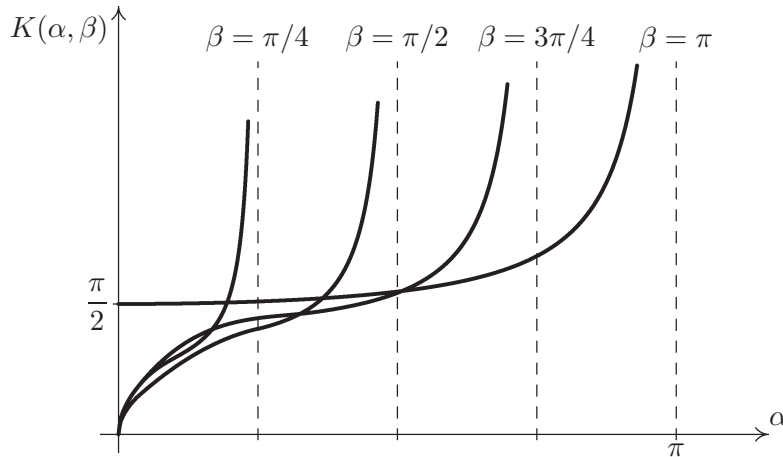


FIG. 5.5 – Graphe de la fonction  $K(\alpha, \beta)$ .

de cette analyse que, pour chaque valeur de  $F \geq 0$  et  $\beta \in ]0, \pi[$ , il existe une et une seule configuration d'équilibre décrite par une fonction  $\theta$  strictement croissante de  $x$ . Dans le cas où  $\beta \in ]0, \pi[$ , l'équation (5.9) montre que  $\alpha \in ]0, \beta[$ , et que  $\alpha$  croît de 0 vers  $\beta$  lorsque  $F$  augmente de 0 à  $+\infty$ . Concrètement, cela signifie que plus l'amplitude de la force augmente, plus l'extrémité aval tend à s'aligner avec la direction de la force.

Plus précisément, pour les très petites valeurs de l'amplitude  $F$  de la force appliquée, l'angle  $\alpha$  est très petit et on peut assimiler la fonction  $K(\alpha, \beta)$  à son équivalent (5.11) au voisinage de  $\alpha = 0$ . On vérifie alors facilement que faire cette assimilation de  $K(\alpha, \beta)$  à cet équivalent en  $\alpha = 0$  fournit, comme on pouvait s'y attendre, la configuration d'équilibre (5.5) issue du cadre d'analyse TIEN.

À l'opposé, lorsque  $\beta \in ]\pi/2, \pi[$ , on voit que pour des valeurs suffisamment élevées de  $F$ , l'angle  $\alpha$  peut excéder  $\pi/2$ , menant à une configuration actuelle en forme de « crochet », absolument compatible avec l'expérience courante de la pêche au gros. Ce résultat n'apparaît évidemment pas dans la solution (5.5) issue du cadre d'analyse TIEN. Notons également que,

quel que soit  $\beta \in ]0, \pi[$ , l'analyse de l'expression (5.8) donnant la configuration d'équilibre montre que la fonction  $\theta(x)$  tend simplement vers la fonction constante  $\beta$  (la convergence est uniforme sur tout compact de  $]0, l[$ ), le raccord avec la condition d'encastrement  $\theta(0) = 0$  tendant, lorsque  $F$  augmente indéfiniment, à se localiser de plus en plus dans une couche limite au voisinage de l'encastrement. Cela conduit, pour les grandes valeurs de  $F$  à des configurations d'équilibre du type de celle représentée sur la figure 5.6. On trouve ici la

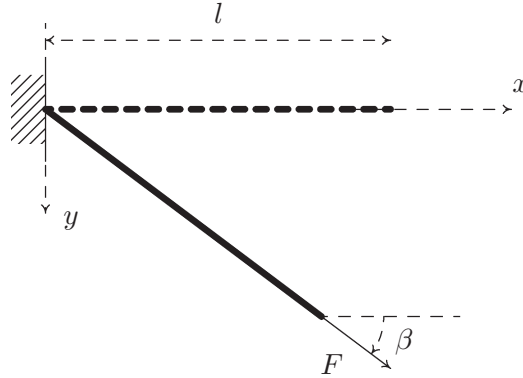


FIG. 5.6 – Configuration d'équilibre pour les très grandes valeurs de  $F$ .

justification du fait que la flèche donnée par la formule (5.10), dans le cas  $\beta = \pi$ , tend vers 0 lorsque  $F$  tend vers l'infini. En fait, il faut compléter cette analyse par les restrictions issues de l'hypothèse des déformations infinitésimales dans laquelle on s'est délibérément placé depuis le départ. Cette hypothèse de travail, commode, à permis de linéariser la loi de comportement. La quantification de cette hypothèse s'écrit ici :

$$d \left| \frac{d\theta}{dx} \right| \ll 1, \quad (5.12)$$

où  $d$  désigne le diamètre de la section. Cette condition est automatiquement satisfaite lorsque l'élanement de la poutre tend vers l'infini ( $d$  tend vers 0). Il en résulte que les positions d'équilibre fléchies, telles qu'elles sont déterminées par l'équation (5.8), ne sont exactes *qu'asymptotiquement* lorsque l'élanement tend vers l'infini. En pratique, cette analyse doit être limitée au cas où  $F$  décrit un intervalle d'amplitude finie dont la taille se réduit avec l'élanement.

Enfin, dans le cas où  $\beta \rightarrow \pi-$ , la fonction  $K(\alpha, \beta)$  devient très proche de la fonction  $K(\alpha, \pi)$  sur l'intervalle  $\alpha \in ]0, \pi[$  (plus précisément, la convergence est uniforme sur tout sous-intervalle compact de  $]0, \pi[$ ). Cependant, des différences notables subsistent aux extrémités de l'intervalle  $]0, \pi[$ . En effet,  $K(\alpha, \beta)$  prend toujours la valeur 0 en 0, même si elle présente une tangente verticale en ce point. Si l'on cherche à représenter un diagramme  $(\alpha, F)$  pour  $\beta = \pi$  et pour  $\beta$  proche de  $\pi$  par valeur inférieure, on obtient le diagramme typique représenté sur la figure 5.7.

Ce diagramme appelle le commentaire suivant. Dès que  $\beta$  n'est pas exactement égal à  $\pi$  le système ne présente plus de bifurcation. Néanmoins la réponse du système épouse de très près la réponse du système avec  $\beta = \pi$ . Il en résulte un « virage très serré » de la courbe de réponse du système imparfait ( $\beta$  proche de  $\pi$ ) pour des valeurs de  $F$  proches de la charge

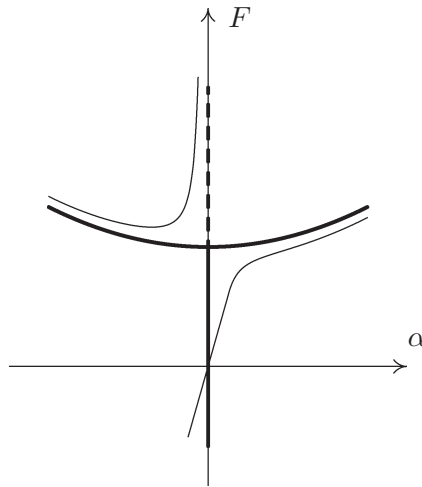


FIG. 5.7 – Courbes d'équilibre des systèmes parfait et imparfait.

critique d'Euler du système parfait ( $\beta = \pi$ ). Pour les valeurs de  $F$  excédant largement la charge critique, la réponse du système imparfait est très proche de la réponse du système parfait suivant une des deux branches bifurquées dont la sélection se fait suivant la position de  $\beta$  par rapport à  $\pi$ . Il existe également une réponse possible du système suivant l'autre branche bifurquée, mais on ne peut plus l'atteindre en suivant une évolution quasi-statique avec le seul chargement supposé à partir de l'état naturel. Il faut appliquer provisoirement une charge supplémentaire pour amener le système d'une courbe de réponse à l'autre, les deux courbes ne s'intersectant plus dans le cas du système imparfait. Le cadre restrictif de l'analyse menée plus haut (recherche des seules configurations d'équilibre associées aux fonctions  $\theta$  croissantes de  $x$ ), n'a pas permis de mettre en évidence cette deuxième courbe d'équilibre. En résumé, l'occurrence de bifurcation est une caractéristique d'un système idéalisé ou parfait qui disparaît lors de la prise en compte des nécessaires imperfections d'un système réel. L'évolution du système parfait au-delà de la bifurcation se fait arbitrairement suivant l'une ou l'autre des deux branches bifurquées. Plus précisément, ce sont, en fait, les imperfections du système réel qui pilotent ce choix, mais le système imparfait, qui bien que ne présentant plus de bifurcation, a une réponse effective très proche d'une des réponses possibles du système idéalisé pourvu que le choix (arbitraire) de la branche bifurquée choisie par le système idéalisé soit cohérent avec la réponse (déterministe) du système imparfait. Remarquons enfin que la présence d'imperfection a aussi pour conséquence que le flambage commence à se manifester pour des valeurs du chargement  $F$  inférieures à la valeur critique d'Euler calculée pour le système parfait. Cela conduit en pratique à la nécessaire prise-en-compte, dans la pratique du dimensionnement des structures vis-à-vis du flambage, d'importants coefficients de sécurité.

### 5.1.5 Recherche de bifurcation par linéarisation autour de l'état précontraint

L'étude menée jusqu'ici a bénéficié d'une circonstance extrêmement favorable qu'il importe de ne pas masquer. En effet, dans le cas qui nous occupe, l'équation d'équilibre (5.6)

non-linéaire issue du cadre d'analyse DI-RF, a pu être intégrée exactement. Il est clair que cette circonstance est exceptionnelle. Dans tout autre cas, on dispose néanmoins de la ressource suivante pour rechercher un éventuel point de bifurcation. On se place en un point arbitraire de la courbe d'équilibre fondamentale (défini ici, dans le cas  $\beta = \pi$ , par le couple  $(\theta \equiv 0, F)$ ,  $F$  arbitraire) et on recherche l'ensemble des tangentes à la courbe d'équilibre en ce point, l'objectif étant alors d'identifier les points admettant plusieurs tangentes (ce sont les points de bifurcation). Comme on ne recherche que des tangentes, il est alors loisible de *linéariser* l'équation d'équilibre (5.6) autour du point d'équilibre  $(\theta \equiv 0, F)$  considéré. Cette procédure conduirait ici au système :

$$\begin{aligned} EI \frac{d^2}{dx^2} \theta + F \theta &= 0, \\ \theta(0) = 0, \quad \frac{d}{dx} \theta(l) &= 0. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Notons bien que le système (5.13) est distinct de celui fourni par le cadre TIEN dans lequel le terme  $F\theta$  serait négligé. Le cadre TIEN est issu d'une linéarisation autour de l'état naturel, alors que le système (5.13) est issu d'une linéarisation autour de l'état précontraint défini par  $F$ . Le système (5.13) n'admet de solution non triviale (qui correspond donc à une tangente à la courbe d'équilibre autre que la tangente verticale) que sous la condition :

$$F = (2n + 1)^2 \frac{\pi^2 EI}{4l^2} = (2n + 1)^2 F_c \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Si cette condition est remplie, les solutions non triviales, correspondant à des positions d'équilibre fléchies sont données par :

$$\theta(x) = C \sin \left( \sqrt{\frac{F}{EI}} x \right), \tag{5.14}$$

où l'amplitude  $C$  reste indéterminée dans ce cadre linéarisé. Le déplacement de l'équilibre, d'amplitude arbitraire, défini par la formule (5.14), s'appelle, pour des raisons qui deviendront claires dans la suite, le *mode de bifurcation*. La formule (5.14) est, en fait, l'équation de la tangente à la branche bifurquée du diagramme de bifurcation 5.4.

Retenons que l'opération de linéarisation autour de l'état précontraint donne accès à la valeur exacte de la charge critique de bifurcation ainsi qu'à la direction de la tangente à la branche bifurquée (qu'on appelle également le mode de bifurcation).

### 5.1.6 Influence des conditions aux limites

Ce paragraphe a deux objectifs. D'une part, illustrer l'opération de linéarisation autour d'un état précontraint pour déterminer une charge critique, à travers un nouvel exemple (le cas général sera traité dans la section 5.2), et d'autre part, montrer que la valeur de la charge critique dépend essentiellement des conditions aux limites imposées au système.

Pour ce faire, on considère la même poutre que dans le paragraphe précédent, mais, soumise à des conditions de chargement différentes, à savoir celles représentées sur la figure 5.8. Par rapport à la situation étudiée dans le paragraphe précédent, seules diffèrent les conditions aux limites. Ici, le déplacement transversal aux extrémités est imposé nul ainsi que le



FIG. 5.8 – Problème de bifurcation

moment. On constate aisément, comme dans le paragraphe précédent, que la configuration rectiligne indéformée, associée à une contrainte généralisée qui se réduit à un effort normal homogène égal à  $-F$ , fournit une solution aux équations d'équilibre, et ce, quelle que soit la valeur de  $F$ . Adoptant cette configuration précontrainte comme nouvelle configuration de référence, on va rechercher la possibilité d'un éventuel déplacement de l'équilibre à partir de cette configuration en linéarisant l'ensemble des équations régissant l'équilibre *autour de cette configuration précontrainte*. La différence essentielle avec la linéarisation autour de l'état naturel qui avait conduit au cadre d'analyse TIEN, est que, dans cette opération de linéarisation,  $F$  sera maintenant considéré comme  $O(1)$  et non plus comme  $O(\theta)$ .

L'ensemble des équations régissant les équilibres plans dans le cadre d'analyse non-linéaire DI-RF s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dR_x}{dx} &= \frac{dR_y}{dx} = 0, \\ \frac{dM_z}{dx} + R_y \cos \theta - R_x \sin \theta &= 0, \\ \sin \theta &= \frac{d\bar{\xi}_y}{dx}, \\ M_z &= EI \frac{d\theta}{dx}, \\ R_x(0) &= R_x(l) = -F, \\ M_z(0) &= M_z(l) = 0, \\ \bar{\xi}_y(0) &= \bar{\xi}_y(l) = 0. \end{aligned}$$

Compte-tenu de la liaison de Navier-Bernoulli  $\sin \theta = d\bar{\xi}_y/dx$ , l'angle  $\theta$  peut être systématiquement éliminé au profit du déplacement transversal  $\bar{\xi}_y$  de la fibre moyenne. La linéarisation des équations qui en résultent conduit au problème aux limites :

$$\begin{aligned} EI \frac{d^4 \bar{\xi}_y}{dx^4} + F \frac{d^2 \bar{\xi}_y}{dx^2} &= 0, \\ \bar{\xi}_y(0) = \bar{\xi}_y(l) = \frac{d^2 \bar{\xi}_y}{dx^2}(0) &= \frac{d^2 \bar{\xi}_y}{dx^2}(l) = 0. \end{aligned}$$

qui gouverne donc un éventuel déplacement de l'équilibre sous l'hypothèse de la transformation infinitésimale à partir de l'état précontraint. Ce système admet une solution non triviale si et seulement si :

$$F = (n+1)^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \quad (n \in \mathbb{N}),$$

de sorte que la charge critique d'Euler pour ce nouveau problème :

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

diffère de celle obtenue au paragraphe précédent d'un facteur 4. Le mode de bifurcation associé est donné par :

$$\bar{\xi}_y(x) = C \sin \frac{\pi x}{l}.$$

### 5.1.7 Stabilité de la configuration d'équilibre rectiligne

Dans le paragraphe précédent, on a constaté que la configuration rectiligne est une position d'équilibre possible quelle que soit la valeur du paramètre de chargement  $F$ . On décide ici d'analyser sa stabilité. Pour ce faire, on est amené à étudier les petits mouvements (dynamiques) autour de la configuration précontrainte. On a choisi ici de faire cette analyse pour le problème décrit sur la figure 5.8 plutôt que pour celui décrit sur la figure 5.3, pour des raisons liées à la simplicité technique des calculs. Cependant, les résultats qualitatifs obtenus seraient les mêmes pour cet autre problème. Prenant en compte les effets d'inertie, et supposant la masse volumique  $\rho$  homogène, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial x} &= \rho |\mathcal{S}| \frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial t^2}, \\ EI \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + R_y \cos \theta - R_x \sin \theta &= \rho I \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Du fait de la liaison d'inextensibilité,  $x$  est l'abscisse curviligne sur la configuration déformée :

$$\frac{\partial \bar{\xi}_x}{\partial x} = \cos \theta - 1, \quad \frac{\partial \bar{\xi}_y}{\partial x} = \sin \theta.$$

Injectant ces relations dans l'équation du mouvement et linéarisant par rapport à  $\theta$ , en considérant  $F$  comme un  $O(1)$  (linéarisation autour de la configuration précontrainte rectiligne), il vient :

$$EI \frac{\partial^4 \bar{\xi}_y}{\partial x^4} + F \frac{\partial^2 \bar{\xi}_y}{\partial x^2} = -\rho |\mathcal{S}| \frac{\partial^2 \bar{\xi}_y}{\partial t^2} + \rho I \frac{\partial^4 \bar{\xi}_y}{\partial t^2 \partial x^2}.$$

Le deuxième terme d'accélération correspond à la rotation des sections et est négligé, comme à l'accoutumée, devant le premier terme d'accélération (le rapport de ces deux termes est en  $I/|\mathcal{S}|l^2$ , qui est bien négligeable pour les poutres suffisamment élancées). Prenant en compte les conditions aux limites, la forme finale de l'équation du mouvement est :

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 \bar{\xi}_y}{\partial x^4} + F \frac{\partial^2 \bar{\xi}_y}{\partial x^2} + \rho |\mathcal{S}| \frac{\partial^2 \bar{\xi}_y}{\partial t^2} &= 0, \\ \bar{\xi}_y(t, 0) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{\xi}_y(t, 0) &= 0, \\ \bar{\xi}_y(t, l) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{\xi}_y(t, l) &= 0. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Recherchons alors les vibrations propres du système sous la forme :

$$\bar{\xi}_y(t, x) = q(t) \tilde{\xi}_y(x).$$

Injectant cette proposition dans l'équation du mouvement, il vient :

$$\begin{aligned} q(t) \left( EI \frac{d^4 \tilde{\xi}_y(x)}{dx^4} + F \frac{d^2 \tilde{\xi}_y(x)}{dx^2} \right) + \rho |\mathcal{S}| \tilde{\xi}_y(x) \frac{d^2}{dt^2} q(t) &= 0, \\ \tilde{\xi}_y(0) = \frac{d^2}{dx^2} \tilde{\xi}_y(0) &= 0, \\ \tilde{\xi}_y(l) = \frac{d^2}{dx^2} \tilde{\xi}_y(l) &= 0. \end{aligned}$$

Il en résulte qu'une solution non identiquement nulle doit être telle que :

$$\begin{aligned} EI \frac{d^4 \tilde{\xi}_y(x)}{dx^4} + F \frac{d^2 \tilde{\xi}_y(x)}{dx^2} - \rho |\mathcal{S}| \mu \tilde{\xi}_y(x) &= 0, \\ \tilde{\xi}_y(0) = \frac{d^2}{dx^2} \tilde{\xi}_y(0) &= 0, \\ \tilde{\xi}_y(l) = \frac{d^2}{dx^2} \tilde{\xi}_y(l) &= 0, \\ \frac{d^2}{dt^2} q(t) + \mu q(t) &= 0, \end{aligned} \tag{5.16}$$

pour une certaine constante réelle  $\mu$ . Pour  $F \neq (n+1)^2 \pi^2 EI / l^2$ , on introduit l'endomorphisme auto-adjoint compact  $\Lambda$  de  $L^2(]0, l[; \mathbb{R})$  qui, à  $f \in L^2$  associe l'unique solution  $\tilde{\xi}_y$  dans  $L^2$  du problème :

$$\begin{aligned} EI \frac{d^4 \tilde{\xi}_y(x)}{dx^4} + F \frac{d^2 \tilde{\xi}_y(x)}{dx^2} - \rho |\mathcal{S}| f(x) &= 0, \\ \tilde{\xi}_y(0) = \frac{d^2}{dx^2} \tilde{\xi}_y(0) &= 0, \\ \tilde{\xi}_y(l) = \frac{d^2}{dx^2} \tilde{\xi}_y(l) &= 0. \end{aligned}$$

En vertu du théorème spectral, l'ensemble des valeurs propres de  $\Lambda$  est une suite  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendant vers 0. On obtient d'ailleurs immédiatement :

$$\lambda_n = \left\{ \frac{\pi^2 (n+1)^2}{\rho |\mathcal{S}| l^2} \left( \frac{\pi^2 (n+1)^2 EI}{l^2} - F \right) \right\}^{-1}, \quad (n \in \mathbb{N}),$$

les fonctions propres associées :

$$\tilde{\xi}_y^n(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho |\mathcal{S}| l}} \sin \left( \frac{(n+1)\pi x}{l} \right),$$

formant une base Hilbertienne de  $L^2$  (muni du produit scalaire « en énergie cinétique »). Revenant au problème spectral (5.16), on en déduit que les seules valeurs de  $\mu$  conduisant à une solution non triviale forment une suite  $\mu_n$ , définie d'ailleurs par  $\mu_n = 1/\lambda_n$ , soit :

$$\mu_n = \frac{\pi^2 (n+1)^2}{\rho |\mathcal{S}| l^2} \left( \frac{\pi^2 (n+1)^2 EI}{l^2} - F \right). \tag{5.17}$$

Il nous reste maintenant à injecter ces valeurs de  $\mu$  dans la dernière équation de (5.16) pour identifier les fonctions  $q_n(t)$ . Cela nous conduit inévitablement à distinguer des cas suivant le signe de  $\mu_n$ .

- Si :

$$F < \frac{\pi^2 EI}{l^2} = F_c,$$

alors, tous les  $\mu_n$  sont strictement positifs et les  $q_n(t)$  prennent nécessairement la forme :

$$q_n(t) = a_n \cos(\sqrt{\mu_n}t) + b_n \sin(\sqrt{\mu_n}t).$$

L'unique solution  $\bar{\xi}_y(t, x)$  du problème d'évolution (5.15) associé à des conditions initiales  $(\bar{\xi}_{y0}, \dot{\bar{\xi}}_{y0}) \in (H^2 \cap H_0^1) \times L^2$  admet un développement sur la base des modes propres de vibration :

$$\bar{\xi}_y(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( a_n \cos(\sqrt{\mu_n}t) + b_n \sin(\sqrt{\mu_n}t) \right) \tilde{\xi}_y^n(x),$$

(la série convergeant dans  $C^0([0, T]; H^2)$  et dans  $C^1([0, T]; L^2)$ ). Les coefficients  $a_n$  sont déterminés par la connaissance de  $\bar{\xi}_{y0}$  et les  $b_n$  par la connaissance de  $\dot{\bar{\xi}}_{y0}$ . Il en résulte qu'une condition initiale « petite » conduit à une évolution qui reste « petite » au cours du temps : la position d'équilibre rectiligne est stable.

- Si :

$$F > \frac{\pi^2 EI}{l^2} = F_c,$$

alors  $\mu_0$  (ainsi qu'éventuellement un nombre fini de  $\mu_n$ ) est strictement négatif. La fonction  $q_0(t)$  associée est alors de la forme :

$$q_0(t) = a_0 \cosh(\sqrt{-\mu_0}t) + b_0 \sinh(\sqrt{-\mu_0}t).$$

Considérons alors la condition initiale définie par :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_{y0}(x) &= \varepsilon \tilde{\xi}_y^0(x) = \varepsilon \sqrt{\frac{2}{\rho|\mathcal{S}|l}} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \\ \dot{\bar{\xi}}_{y0}(x) &= 0. \end{aligned}$$

La solution du problème d'évolution (5.15), associée à cette condition initiale est donnée par :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_y(t, x) &= \varepsilon \cosh(\sqrt{\mu_0}t) \tilde{\xi}_y^0(x), \\ &= \varepsilon \sqrt{\frac{2}{\rho|\mathcal{S}|l}} \cosh\left(\sqrt{\frac{F - F_c}{\rho|\mathcal{S}|}} \frac{\pi t}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque  $F$  est supérieure à la force critique d'Euler, toute perturbation initiale suivant le mode de bifurcation, aussi petite soit elle, s'amplifie exponentiellement au cours du temps et ce, d'autant plus rapidement que l'écart de  $F$  à la force critique d'Euler est important.

On a ainsi démontré que la configuration d'équilibre rectiligne est stable tant que la force appliquée est inférieure à la force critique d'Euler et instable au-delà. On a l'habitude de schématiser ce résultat sur le diagramme de bifurcation sous la forme représentée sur la figure 5.9.



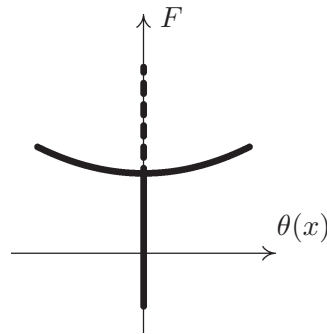


FIG. 5.9 – Diagramme de bifurcation.

On déduit également de la formule (5.17) que la mise en *tension* ( $F < 0$ ) de la poutre produit une *augmentation* de toutes les pulsations propres de vibration, phénomène mis à profit lorsque l'on accorde un instrument à corde. De l'expression de la plus petite pulsation propre (dite aussi pulsation propre fondamentale) dans ce cas :

$$\omega_0^2 = \frac{\pi^2}{\rho|\mathcal{S}|l^2} \left( \frac{\pi^2 EI}{l^2} - F \right) = a + b|F|,$$

on déduit une méthode expérimentale de mesure de la charge critique d'Euler. Il suffit « d'écouter » comment varie le carré de la pulsation propre fondamentale lorsque l'on fait varier la charge de tension. Représentant les résultats dans un diagramme où  $|F|$  est porté sur l'axe des abscisses et  $\omega_0^2$  sur l'axe des ordonnées, il suffit alors de prolonger la droite obtenue jusqu'à ce qu'elle coupe l'axe des abscisses (annulation de la pulsation propre fondamentale). La valeur absolue de l'abscisse du point correspondant, qui est une évaluation du rapport  $a/b$ , est aussi une évaluation de la charge critique d'Euler de la poutre.

Ajoutons pour conclure, qu'en toute rigueur, on ne peut faire l'impasse sur la question de savoir si les conclusions de stabilité (et surtout d'instabilité) issues de l'analyse de la dynamique *linéarisée* autour de l'état précontraint sont applicables au cas de la dynamique non-linéaire. Dans le cadre de ce cours, on admettra que ce point difficile peut être favorablement surmonté.

## 5.2 Poutres élastiques en transformation infinitésimale à partir d'un état précontraint

L'exemple du flambage d'Euler a permis d'illustrer l'utilisation des équations de l'équilibre linéarisées, non plus autour de l'état naturel mais autour d'un état précontraint, pour identifier d'éventuelles bifurcations de courbe d'équilibre (cf section 5.1.5). Dans la section 5.1.7, on a aussi utilisé les équations de la dynamique linéarisées autour de l'état précontraint pour pouvoir discuter qualitativement des petits mouvements autour d'un état d'équilibre donné (l'état dit précontraint), c'est-à-dire de la *stabilité de cet état d'équilibre*. Ainsi, la discussion des problèmes de bifurcation aussi bien que de stabilité semble pouvoir être abordée commodément à l'aide des équations de la dynamique des poutres élastiques *linéarisées autour de l'état précontraint*. On se propose donc, maintenant, de dériver, une

bonne fois pour toutes, ces équations dans le cas général, de sorte que les résultats obtenus pourront être utilisés directement pour discuter de bifurcation et stabilité en théorie des poutres sans qu'il ne soit nécessaire de refaire la linéarisation dans chaque circonstance étudiée.

### 5.2.1 Position du problème et notations

On considère une poutre dont une configuration dénuée de contrainte (état naturel) est connue. La courbe définie par la fibre moyenne dans cette configuration est paramétrée par son abscisse curviligne notée  $S_0$ . On suppose connue une transformation de cette poutre l'amenant dans une autre configuration. L'abscisse curviligne sur la courbe définie par la fibre moyenne dans cette nouvelle configuration est notée  $S$ . Le déplacement  $(\bar{\xi}_0, \underline{R}_0 - \underline{\mathbb{1}})$  associé à cette transformation est donc supposé connu. L'état de contrainte généralisée  $[\underline{R}_0, \underline{M}_0]$ , également connu, sera équilibré par des efforts extérieurs adéquats. Cette deuxième configuration sera appelée *configuration précontrainte* dans toute la suite.

Dans toute la suite, on supposera que la *déformation* associée à la transformation de l'état naturel à l'état précontraint (c'est-à-dire au déplacement  $(\bar{\xi}_0, \underline{R}_0 - \underline{\mathbb{1}})$ ) est *infinitésimale*. De ce fait, la distribution de contrainte généralisée  $[\underline{R}_0, \underline{M}_0]$  est reliée à la transformation par la loi de comportement élastique *linéarisée*, sous l'hypothèse des petites déformations autour de l'état naturel. En pratique, la *transformation* entre l'état naturel et l'état précontraint aura souvent un caractère infinitésimal de sorte que la connaissance de la configuration précontrainte aura pu être obtenue par la résolution d'un problème d'équilibre formulé dans le cadre linéarisé TIEN. Ce point-de-vue sera développé dans la section 5.3.2 et, à ce stade, nous supposerons seulement que la *déformation* entre état naturel et configuration précontrainte est infinitésimale et que ce n'est pas nécessairement le cas pour la *transformation* entre états naturel et précontraint.

On décide alors d'adopter la configuration précontrainte comme nouvelle configuration de référence et notre objectif va être d'obtenir l'ensemble des équations régissant les mouvements autour de cette configuration précontrainte, *linéarisées* sous l'hypothèse de la transformation infinitésimale *à partir* de cette configuration précontrainte. On notera  $(\bar{\xi}, \underline{R} - \underline{\mathbb{1}})$  un déplacement quelconque à partir de la configuration précontrainte et l'hypothèse de la transformation infinitésimale à partir de l'état précontraint s'écrira :

$$\left| \frac{d\bar{\xi}}{dS} \right| \ll 1, \quad \text{et} \quad \left| \underline{R} - \underline{\mathbb{1}} \right| \ll 1, \quad (5.18)$$

ce qui permettra de disposer du tenseur antisymétrique  $\underline{\theta} \simeq \underline{R} - \underline{\mathbb{1}}$ , et du pseudo-vecteur  $\underline{\theta}$  associé. Le travail à effectuer va alors s'articuler en deux temps.

1. Dans un premier temps, il va s'agir d'obtenir l'ensemble des équations régissant les mouvements de la poutre dans le cadre d'analyse « déformations infinitésimales—rotations finies », à partir de la *configuration précontrainte prise comme référence*. Dans cette phase, le seul changement par rapport à la situation où c'est l'état naturel qui est choisi comme référence (équations du chapitre 3), concerne évidemment l'écriture de la loi de comportement.
2. Dans un deuxième temps, ces équations vont être systématiquement linéarisées sous l'hypothèse de la transformation infinitésimale à partir de l'état précontraint.

### 5.2.2 Transport des équations sur la configuration précontrainte

On considère dans un premier temps une poutre sans liaison interne dont la loi de comportement :

$$\left[ \underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{M}} \right] = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbb{E}}(\mathbb{E}), \quad (5.19)$$

linéarisée sous l'hypothèse des petites déformations à partir de l'état naturel s'écrit :

$$\left[ \underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{M}} \right] \simeq \underline{\mathbb{A}}_0 \cdot \mathbb{E},$$

où il est entendu dans cette écriture que c'est l'état naturel qui est pris comme référence. On dispose alors de :

$$\left[ {}^t \underline{\mathbb{R}}_0 \cdot \underline{\mathcal{R}}_0, {}^t \underline{\mathbb{R}}_0 \cdot \underline{\mathcal{M}}_0 \right] = \underline{\mathbb{A}}_0 \cdot \mathbb{E}_0,$$

où  $\mathbb{E}_0$  est la déformation lagrangienne associée au déplacement  $(\bar{\xi}_0, \underline{\mathbb{R}}_0)$ . La linéarisation de la loi de comportement (5.19) autour de cet état précontraint donne :

$$\left[ \underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{M}} \right] = \left[ {}^t \underline{\mathbb{R}}_0 \cdot \underline{\mathcal{R}}_0, {}^t \underline{\mathbb{R}}_0 \cdot \underline{\mathcal{M}}_0 \right] + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbb{E}^2}(\mathbb{E}_0) \cdot (\mathbb{E} - \mathbb{E}_0),$$

où, dans cette formule, déformation et contrainte lagrangiennes sont relatives à la référence de l'état naturel. On a alors :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbb{E}^2}(\mathbb{E}_0) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbb{E}^2}(0) + O(|\mathbb{E}_0|) = \underline{\mathbb{A}}_0 + O(|\mathbb{E}_0|).$$

Sous l'hypothèse de petite déformation de l'état naturel à l'état précontraint ( $|\mathbb{E}_0| \ll 1$ ), on confondra alors légitimement  $\partial^2 \psi / \partial \mathbb{E}^2(\mathbb{E}_0)$  et  $\underline{\mathbb{A}}_0$ . Cependant, cela signifie que l'on accepte, dans la suite, que les modules d'élasticité  $\underline{\mathbb{A}}_0$  ne soient connus qu'à l'ordre 1 en  $|\mathbb{E}_0|$  près. En particulier, cela signifie que toute correction d'ordre 1 en  $|\mathbb{E}_0|$  sur les modules d'élasticité qui apparaîtrait dans la suite *devra* être systématiquement négligée. Conservant cet ordre d'approximation en tête, la loi de comportement s'écrit donc :

$$\left[ \underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{M}} \right] = \left[ {}^t \underline{\mathbb{R}}_0 \cdot \underline{\mathcal{R}}_0, {}^t \underline{\mathbb{R}}_0 \cdot \underline{\mathcal{M}}_0 \right] + \underline{\mathbb{A}}_0 \cdot (\mathbb{E} - \mathbb{E}_0). \quad (5.20)$$

Il nous reste maintenant à exprimer dans cette expression toute quantité lagrangienne relative à la référence de l'état naturel en terme de quantité lagrangienne exclusivement relative à la référence de l'état précontraint. Ce travail est immédiat pour la contrainte généralisée :

$$\left[ \underline{\mathcal{R}}, \underline{\mathcal{M}} \right] = \left[ {}^t \underline{\mathbb{R}}_0 \cdot {}^t \underline{\mathbb{R}} \cdot \underline{\mathcal{R}}, {}^t \underline{\mathbb{R}}_0 \cdot {}^t \underline{\mathbb{R}} \cdot \underline{\mathcal{M}} \right] = {}^t \underline{\mathbb{R}}_0 \cdot \left[ {}^t \underline{\mathbb{R}} \cdot \underline{\mathcal{R}}, {}^t \underline{\mathbb{R}} \cdot \underline{\mathcal{M}} \right],$$

où  $[{}^t \underline{\mathbb{R}} \cdot \underline{\mathcal{R}}, {}^t \underline{\mathbb{R}} \cdot \underline{\mathcal{M}}]$  est bien la contrainte lagrangienne relative à la référence de l'état précontraint. En ce qui concerne la déformation, on notera  $(\underline{E}, \underline{W})$  les deux composantes de la déformation lagrangienne *relative à l'état précontraint*, de sorte que (définition 1.2) :

$$\underline{E} = {}^t \underline{\mathbb{R}} \cdot \left( \underline{T} + \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S} \right) - \underline{T}, \quad \underline{W} = {}^t \underline{\mathbb{R}} \cdot \frac{\partial \underline{\mathbb{R}}}{\partial S}.$$

Compte-tenu de :

$$\underline{T}_0 + \frac{\partial \bar{\xi}_0}{\partial S_0} = \frac{\partial S}{\partial S_0} \underline{T},$$

la première composante de  $\mathbb{E} - \mathbb{E}_0$  prend la forme :

$${}^t\underline{R}_0 \cdot {}^t\underline{R} \cdot \left( \underline{T}_0 + \frac{\partial \bar{\xi}_0}{\partial S_0} + \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S_0} \right) - {}^t\underline{R}_0 \cdot \left( \underline{T}_0 + \frac{\partial \bar{\xi}_0}{\partial S_0} \right) = \frac{\partial S}{\partial S_0} {}^t\underline{R}_0 \cdot \underline{E}.$$

La seconde composante de  $\mathbb{E} - \mathbb{E}_0$  est relative au tenseur antisymétrique :

$${}^t\underline{R}_0 \cdot {}^t\underline{R} \cdot \frac{\partial}{\partial S_0} (\underline{R} \cdot \underline{R}_0) - {}^t\underline{R}_0 \cdot \frac{\partial}{\partial S_0} \underline{R}_0 = \frac{\partial S}{\partial S_0} {}^t\underline{R}_0 \cdot \underline{W} \cdot \underline{R}_0.$$

Or le pseudo-vecteur associé au tenseur antisymétrique  ${}^t\underline{R}_0 \cdot \underline{W} \cdot \underline{R}_0$  n'est autre que  ${}^t\underline{R}_0 \cdot \underline{W}$ . Rassemblant, on a ainsi montré :

$$\mathbb{E} - \mathbb{E}_0 = \frac{\partial S}{\partial S_0} {}^t\underline{R}_0 \cdot (\underline{E}, \underline{W}).$$

Injectant cette expression dans la loi de comportement linéarisée (5.20) autour de l'état précontraint, on l'exprime maintenant en ne faisant intervenir que des quantités lagrangiennes relatives à l'état précontraint :

$$\begin{pmatrix} {}^t\underline{R} \cdot \underline{R} \\ {}^t\underline{R} \cdot \underline{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{R}_0 \\ \underline{M}_0 \end{pmatrix} + \frac{\partial S}{\partial S_0} \underline{R}_0 \cdot \underline{A} \cdot {}^t\underline{R}_0 \begin{pmatrix} \underline{E} \\ \underline{W} \end{pmatrix},$$

où l'on commet (depuis le début) l'abus de notation qui consiste à noter encore  $\underline{R}_0$  l'opérateur qui, à un couple de vecteur  $(\underline{U}, \underline{V})$  associe le couple  $(\underline{R}_0 \cdot \underline{U}, \underline{R}_0 \cdot \underline{V})$ . Dans la formule ci-dessus, la quantité  $\partial S / \partial S_0$ , qui n'est autre que la dilatation locale de la ligne moyenne dans la transformation de l'état naturel à l'état précontraint, apparaît comme une correction sur  $\underline{A}_0$  d'ordre 1 en  $|\mathbb{E}_0|$  et s'avère donc superflue compte-tenu de l'ordre d'approximation consenti. On notera alors :

$$\underline{A} = \underline{R}_0 \cdot \underline{A}_0 \cdot {}^t\underline{R}_0$$

le tenseur des modules d'élasticité relatif à l'orientation des sections dans la configuration précontrainte, et la forme finale de la loi de comportement linéarisée autour de l'état précontraint est donc :

$$\begin{pmatrix} {}^t\underline{R} \cdot \underline{R} \\ {}^t\underline{R} \cdot \underline{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{R}_0 \\ \underline{M}_0 \end{pmatrix} + \underline{A} \cdot \begin{pmatrix} \underline{E} \\ \underline{W} \end{pmatrix}.$$

Le pendant des équations de la page 28, gouvernant le mouvement d'une poutre dans le cadre d'analyse « déformations infinitésimales—rotations finies », lorsque la référence est, non plus l'état naturel, mais l'état précontraint, s'écrit alors :

- Équation du mouvement :

$$\begin{aligned} \left[ \underline{R}(L), \underline{M}(L) \right] &= \left[ \underline{F}_L, \underline{C}_L \right], \\ \left[ \frac{\partial \underline{R}}{\partial S}, \frac{\partial \underline{M}}{\partial S} + \left( \underline{T} + \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S} \right) \wedge \underline{R} \right] &+ \frac{\partial s}{\partial S} \left[ \underline{F}, \underline{C} \right] \\ &= \frac{\partial s}{\partial S} \left[ \bar{\rho} \underline{\dot{U}}, \underline{i}^\rho \cdot \underline{\dot{\Omega}} + \underline{\Omega} \wedge (\underline{i}^\rho \cdot \underline{\Omega}) \right], \end{aligned}$$

- Loi de comportement élastique linéarisée :

$$\begin{pmatrix} {}^t \underline{R} \cdot \underline{R} \\ {}^t \underline{R} \cdot \underline{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{R}_0 \\ \underline{M}_0 \end{pmatrix} + \underline{A} \cdot \begin{pmatrix} \underline{E} \\ \underline{W} \end{pmatrix},$$

- Conditions cinématiques :

$$\begin{aligned} \left( \bar{\xi}(0), \underline{R}(0) - \underline{\mathbb{1}} \right) &= \left( \underline{0}, \underline{0} \right), \\ \underline{E} &= \left( {}^t \underline{R} - \underline{\mathbb{1}} \right) \cdot \underline{T} + {}^t \underline{R} \cdot \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S}, & \underline{W} &= {}^t \underline{R} \cdot \frac{\partial \underline{R}}{\partial S}, \\ \underline{U} &= \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial t}, & \underline{\Omega} &= \frac{\partial \underline{R}}{\partial t} \cdot {}^t \underline{R}, \end{aligned}$$

où les données en effort extérieur  $[\underline{F}_L, \underline{C}_L]$  et  $[\underline{F}, \underline{C}]$  peuvent être, en général, des fonctions du déplacement  $(\bar{\xi}, \underline{R} - \underline{\mathbb{1}})$ . Dans ces équations, les quantités  $\bar{\rho}$  et  $\underline{i}^\rho$  sont relatives à la configuration actuelle (notations de la section 2.6). Dans le cas où la poutre est astreinte à obéir en sus à une liaison interne, le fait que la référence soit l'état précontraint au lieu de l'état naturel n'intervient en rien dans les modifications à apporter. À titre d'exemple, l'expression de la loi de comportement d'une poutre de Navier-Bernoulli linéarisée autour de l'état précontraint s'écrirait :

$$\underline{T} \wedge \underline{E} = \underline{0}, \quad \begin{pmatrix} {}^t \underline{R} \cdot \underline{R} \\ {}^t \underline{R} \cdot \underline{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{R}_0 \\ \underline{M}_0 \end{pmatrix} + \underline{A} \cdot \begin{pmatrix} \underline{E} \\ \underline{W} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\eta} \\ \underline{0} \end{pmatrix},$$

où  $\underline{\eta}$  désigne un vecteur orthogonal à  $\underline{T}$  arbitraire.

### 5.2.3 Linéarisation autour de l'état précontraint

La linéarisation systématique des équations gouvernant les mouvements de la poutre autour de l'état précontraint, sous l'hypothèse (5.18) de la transformation infinitésimale à partir de l'état précontraint, s'opère exactement de la même manière que la linéarisation autour de l'état naturel qui a permis d'obtenir les équations du cadre d'analyse TIEN. La loi de comportement élastique a déjà été linéarisée par rapport à la déformation autour de l'état précontraint dans le paragraphe précédent. Sa linéarisation par rapport à la rotation conduit à :

$$\begin{pmatrix} \underline{R} - \underline{R}_0 \\ \underline{M} - \underline{M}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\theta} \wedge \underline{R}_0 \\ \underline{\theta} \wedge \underline{M}_0 \end{pmatrix} + \underline{A} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S} + \underline{T} \wedge \underline{\theta} \\ \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial S} \end{pmatrix} + o\left( \left| \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S} \right| + \left| \underline{R} - \underline{\mathbb{1}} \right| \right),$$

qui montre que c'est maintenant  $[\underline{R} - \underline{R}_0, \underline{M} - \underline{M}_0]$  qui doit être considéré comme un  $O(|\partial\bar{\xi}/\partial S| + |\underline{R} - \underline{1}|)$ . Il en résulte que les données en effort extérieur,  $[\underline{F}_L, \underline{C}_L]$  et  $[\underline{F}, \underline{C}]$ , n'apparaissent plus comme des  $O(|\partial\bar{\xi}/\partial S| + |\underline{R} - \underline{1}|)$  mais bien comme des  $O(1)$ . La conséquence en est que leur linéarisation par rapport à la transformation ne se réduit plus, en général à un terme constant, comme dans le cadre d'analyse TIEN, mais à une expression affine en  $\{\bar{\xi}, \underline{\theta}\}$ . Utilisant l'équilibre de la précontrainte, on peut alors légitimement écrire, à l'ordre d'approximation consenti, les données en effort extérieur sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} [\underline{F}_L, \underline{C}_L] &= [\underline{R}_0(L), \underline{M}_0(L)] + \mathcal{L}_L(\bar{\xi}, \underline{\theta}) + o\left(\left|\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial S}\right| + |\underline{R} - \underline{1}|\right), \\ [\underline{F}, \underline{C}] &= \left[-\frac{d\underline{R}_0}{dS}, -\frac{d\underline{M}_0}{dS} - \underline{T} \wedge \underline{R}_0\right] + \mathcal{L}(\bar{\xi}, \underline{\theta}) + o\left(\left|\frac{\partial\bar{\xi}}{\partial S}\right| + |\underline{R} - \underline{1}|\right), \end{aligned}$$

où  $\mathcal{L}_L$  et  $\mathcal{L}$  sont deux opérateurs linéaires faisant partie des données. Il arrive fréquemment, comme dans l'exemple du flambage d'Euler où la force appliquée est invariable durant la transformation, que ces deux opérateurs soient identiquement nuls. Dans ce cas, on dit que les données en effort extérieur sont de type *charge morte*. Au final les équations, linéarisées autour de l'état précontraint, gouvernant les mouvements de la poutre s'écrivent :

- Équation du mouvement :

$$\begin{aligned} &\left[ (\underline{R} - \underline{R}_0)(L), (\underline{M} - \underline{M}_0)(L) \right] = \mathcal{L}_L(\bar{\xi}, \underline{\theta}), \\ &\left[ \frac{\partial}{\partial S} (\underline{R} - \underline{R}_0), \frac{\partial}{\partial S} (\underline{M} - \underline{M}_0) + \underline{T} \wedge (\underline{R} - \underline{R}_0) + \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial S} \wedge \underline{R}_0 \right] \\ &- \left( \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial S} \cdot \underline{T} \right) \left[ \frac{d\underline{R}_0}{dS}, \frac{d\underline{M}_0}{dS} + \underline{T} \wedge \underline{R}_0 \right] + \mathcal{L}(\bar{\xi}, \underline{\theta}) = [\bar{\rho}\ddot{\bar{\xi}}, \underline{I}^\rho \cdot \ddot{\underline{\theta}}], \end{aligned}$$

- Loi de comportement élastique linéarisée :

$$\begin{pmatrix} \underline{R} - \underline{R}_0 \\ \underline{M} - \underline{M}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\theta} \wedge \underline{R}_0 \\ \underline{\theta} \wedge \underline{M}_0 \end{pmatrix} + \underline{A} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial\bar{\xi}}{\partial S} + \underline{T} \wedge \underline{\theta} \\ \frac{\partial\underline{\theta}}{\partial S} \end{pmatrix},$$

- Condition cinématique :

$$\{\bar{\xi}(0), \underline{\theta}(0)\} = \{\underline{0}, \underline{0}\},$$

où  $\bar{\rho}$  et  $\underline{I}^\rho$  désignent maintenant respectivement la masse linéique et le tenseur d'inertie des sections dans la configuration précontrainte. Dans le cas d'une poutre de Navier-Bernoulli, ces équations s'écrivent :

- Équation du mouvement :
 
$$\left[ \left( \underline{R} - \underline{R}_0 \right) (L), \left( \underline{M} - \underline{M}_0 \right) (L) \right] = \mathcal{L}_L(\bar{\xi}, \underline{\theta}),$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial S} \left( \underline{R} - \underline{R}_0 \right), \frac{\partial}{\partial S} \left( \underline{M} - \underline{M}_0 \right) + \underline{T} \wedge \left( \underline{R} - \underline{R}_0 \right) + \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S} \wedge \underline{R}_0 \right]$$

$$- \left( \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S} \cdot \underline{T} \right) \left[ \frac{d\underline{R}_0}{dS}, \frac{d\underline{M}_0}{dS} + \underline{T} \wedge \underline{R}_0 \right] + \mathcal{L}(\bar{\xi}, \underline{\theta}) = \left[ \bar{\rho} \ddot{\bar{\xi}}, \underline{I}^\rho \cdot \ddot{\underline{\theta}} \right],$$
- Loi de comportement élastique linéarisée :
 
$$\underline{T} \wedge \left( \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S} + \underline{T} \wedge \underline{\theta} \right) = \underline{0},$$

$$\begin{pmatrix} \underline{R} - \underline{R}_0 \\ \underline{M} - \underline{M}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\theta} \wedge \underline{R}_0 \\ \underline{\theta} \wedge \underline{M}_0 \end{pmatrix} + \underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S} + \underline{T} \wedge \underline{\theta} \\ \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial S} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\eta} \\ \underline{0} \end{pmatrix},$$
- Condition cinématique :
 
$$\left\{ \bar{\xi}(0), \underline{\theta}(0) \right\} = \left\{ \underline{0}, \underline{0} \right\},$$

où  $\underline{\eta}$  désigne un vecteur orthogonal à  $\underline{T}$  arbitraire. Enfin, dans le cas d'une poutre de Navier-Bernoulli inextensible, on obtient :

- Équation du mouvement :
 
$$\left[ \left( \underline{R} - \underline{R}_0 \right) (L), \left( \underline{M} - \underline{M}_0 \right) (L) \right] = \mathcal{L}_L(\bar{\xi}, \underline{\theta}),$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial S} \left( \underline{R} - \underline{R}_0 \right), \frac{\partial}{\partial S} \left( \underline{M} - \underline{M}_0 \right) + \underline{T} \wedge \left( \underline{R} - \underline{R}_0 \right) + \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S} \wedge \underline{R}_0 \right]$$

$$+ \mathcal{L}(\bar{\xi}, \underline{\theta}) = \left[ \bar{\rho} \ddot{\bar{\xi}}, \underline{I}^\rho \cdot \ddot{\underline{\theta}} \right],$$
- Loi de comportement élastique linéarisée :
 
$$\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S} + \underline{T} \wedge \underline{\theta} = \underline{0},$$

$$\begin{pmatrix} \underline{R} - \underline{R}_0 \\ \underline{M} - \underline{M}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\theta} \wedge \underline{R}_0 \\ \underline{\theta} \wedge \underline{M}_0 \end{pmatrix} + \underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S} + \underline{T} \wedge \underline{\theta} = \underline{0} \\ \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial S} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{\eta} \\ \underline{0} \end{pmatrix},$$
- Condition cinématique :
 
$$\left\{ \bar{\xi}(0), \underline{\theta}(0) \right\} = \left\{ \underline{0}, \underline{0} \right\},$$

où  $\underline{\eta}$  désigne maintenant un vecteur totalement arbitraire. Dans toute la suite, on se référera au cadre d'analyse associé à ces équations linéarisées sous l'hypothèse de la transformation infinitésimale à partir de l'état précontraint, en parlant de cadre d'analyse TIEP.

### 5.3 Analyse et classification des instabilités

#### 5.3.1 Points critiques de courbe d'équilibre

Le cadre général correspondant à l'exemple de la poutre en compression axiale étudié dans la section 5.1.3 est celui des problèmes d'équilibre paramétrés. On considère l'équilibre d'une poutre soumise à des conditions de chargement paramétrées par  $Q \in \mathbb{R}$ , et on suppose disposer d'une configuration d'équilibre pour chaque valeur de  $Q$ . Cette correspondance entre  $Q \in \mathbb{R}$  et la configuration d'équilibre associée est appelée courbe d'équilibre fondamentale. Formellement les équations d'équilibre (dont on a vu qu'elles sont, en général, non-linéaires) se présentent comme des équations, paramétrées par  $Q$  et portant sur le déplacement d'équilibre  $\mathbb{D} = (\underline{\xi}, \underline{R} - \underline{\mathbb{1}})$  :

$$\mathcal{E}(\mathbb{D}, Q) = 0. \quad (5.21)$$

Tous les points  $(\mathbb{D}(Q), Q)$  de la courbe d'équilibre fondamentale sont supposés satisfaire les équations de l'équilibre :

$$\mathcal{E}(\mathbb{D}(Q), Q) = 0.$$

Il se pose alors la question de la réciproque : dans quelle mesure les équations d'équilibre (5.21) déterminent-elles, au moins localement, la courbe d'équilibre fondamentale  $(\mathbb{D}(Q), Q)$ . Une réponse est fournie par le théorème des fonctions implicites : les équations d'équilibre (5.21) définissent une fonction implicite locale  $(\mathbb{D}(Q), Q)$  au point  $(\mathbb{D}_0, Q_0)$  si :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbb{D}} \mathcal{E}(\mathbb{D}_0, Q_0) \text{ est inversible,}$$

c'est-à-dire si :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbb{D}} \mathcal{E}(\mathbb{D}_0, Q_0) \cdot \delta \mathbb{D} = 0 \quad \implies \quad \delta \mathbb{D} = 0. \quad (5.22)$$

En termes plus mécaniques, ce résultat<sup>2</sup> peut s'énoncer de la manière suivante.

Si le seul déplacement de l'équilibre autorisé par les équations d'équilibre *linéarisées autour d'un état d'équilibre donné* est identiquement nul alors les équations d'équilibre définissent localement une courbe d'équilibre.

Il arrive, cependant, que cette situation soit mise en défaut, ainsi que l'a montré l'exemple étudié dans la section 5.1.3. La courbe d'équilibre fondamentale peut croiser d'autres courbes d'équilibre : c'est l'occurrence de bifurcation. En un point de bifurcation de la

---

<sup>2</sup>la notation utilisée ici pour les équations d'équilibre linéarisées a un caractère un peu formel. En effet, pour donner un sens à la dérivation par rapport à  $\mathbb{D}$ , il faudrait munir l'espace vectoriel (nécessairement de dimension infinie) de tous les champs  $\mathbb{D}$  d'une norme adéquate. D'autre part, on pourrait objecter que la condition (5.22) qui exprime l'*injectivité* d'un opérateur linéaire n'implique pas nécessairement, *a priori*, son *inversibilité* en dimension infinie. On peut cependant démontrer que l'opérateur linéaire associé aux équations d'équilibre linéarisées et défini sur un espace fonctionnel adéquat, appartient à une classe particulière d'opérateurs satisfaisant ce que l'on appelle l'*alternative de Fredholm*, pour lesquels l'injectivité implique l'inversibilité comme en dimension finie.



courbe d'équilibre fondamentale, les équations de l'équilibre (5.21) ne définissent donc pas (ou plus) une fonction implicite locale  $(\mathbb{D}(Q), Q)$ . D'après le théorème des fonctions implicites, il en résulte nécessairement un déplacement de l'équilibre  $\delta\mathbb{D} \neq 0$  autorisé par les équations d'équilibre linéarisées en ce point :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbb{D}} \mathcal{E}(\mathbb{D}_0, Q_0) \cdot \delta\mathbb{D} = 0.$$

Un tel point de la courbe d'équilibre fondamentale est appelé *point critique*. Cependant, tout point critique n'est pas nécessairement un point de bifurcation. En effet, une courbe

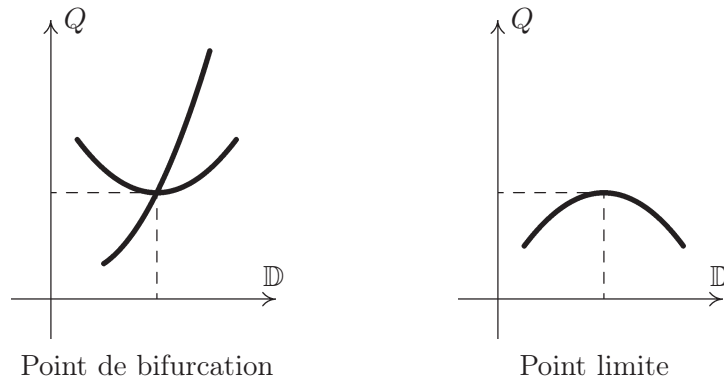


FIG. 5.10 – Points critiques de courbes d'équilibre.

d'équilibre peut se trouver localement d'un même côté d'une de ses tangentes perpendiculaire à l'axe des  $Q$  (cf figure 5.10), de sorte que la courbe d'équilibre n'admet pas d'équation cartésienne  $\mathbb{D}(Q)$  au voisinage de ce point. On parle alors de *point limite* de courbe d'équilibre. On exhibera un exemple de point critique qui n'est pas un point de bifurcation, mais un point limite, dans la section 5.4.2.

### 5.3.2 Rigidités géométrique et globale

Considérant un problème d'équilibre paramétré par  $Q \in \mathbb{R}$ , on suppose connue une courbe d'équilibre fondamentale et donc, en particulier, la distribution de contrainte généralisée  $[\underline{R}_0(Q), \underline{M}_0(Q)]$  pour chaque valeur de  $Q$ . La recherche des points critiques consiste alors à identifier les valeurs de  $Q$  (dites critiques) telles que les équations d'équilibre linéarisées au voisinage de la configuration précontrainte associée à  $Q$ , admettent une solution  $\{\underline{\xi}, \underline{\theta}\}$  non identiquement nulle. Ces équations étant d'ailleurs linéaires et homogènes, toute solution non nulle multipliée par un réel arbitraire fournit encore une solution.

On se restreindra au cas où l'on a affaire à une poutre naturelle soumise à des conditions de chargement de type *charge morte*, c'est-à-dire que les opérateurs linéaires  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}_L$  sont identiquement nuls. Ces hypothèses, nullement essentielles, ne sont destinées qu'à acquérir une facilité d'écriture.

Les valeurs critiques du paramètre de chargement  $Q$  sont celles pour lesquelles l'ensemble

d'équations :

- Équation du mouvement :

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \underline{R} - \underline{R}_0(Q) \right)(L), \left( \underline{M} - \underline{M}_0(Q) \right)(L) \right] = \left[ \underline{0}, \underline{0} \right], \\ & \left[ \frac{\partial}{\partial S} \left( \underline{R} - \underline{R}_0(Q) \right), \frac{\partial}{\partial S} \left( \underline{M} - \underline{M}_0(Q) \right) + \underline{T} \wedge \left( \underline{R} - \underline{R}_0(Q) \right) + \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S} \wedge \underline{R}_0(Q) \right] \\ & \quad - \left( \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S} \cdot \underline{T} \right) \left[ \frac{d\underline{R}_0(Q)}{dS}, \frac{d\underline{M}_0(Q)}{dS} + \underline{T} \wedge \underline{R}_0(Q) \right] = \left[ \underline{0}, \underline{0} \right], \end{aligned}$$

- Loi de comportement élastique linéarisée :

$$\begin{pmatrix} \underline{R} - \underline{R}_0(Q) \\ \underline{M} - \underline{M}_0(Q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\theta} \wedge \underline{R}_0(Q) \\ \underline{\theta} \wedge \underline{M}_0(Q) \end{pmatrix} + \underline{A} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S} + \underline{T} \wedge \underline{\theta} \\ \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial S} \end{pmatrix},$$

- Condition cinématique :

$$\left\{ \bar{\xi}(0), \underline{\theta}(0) \right\} = \left\{ \underline{0}, \underline{0} \right\},$$

admet une solution  $(\bar{\xi}, \underline{\theta})$  non identiquement nulle. Cet ensemble d'équations est écrit sur la configuration, supposée connue, de la courbe d'équilibre fondamentale associée à la valeur  $Q$  du paramètre de chargement. On notera  $L(Q)$  la longueur de la fibre moyenne dans cette configuration. Les équations ci-dessus sont les équations locales associées à la recherche de la charge critique. Introduisant l'espace vectoriel :

$$CA_0 = \left\{ \left\{ \hat{\bar{\xi}}, \hat{\underline{\theta}} \right\} \in H^1(]0, L(Q)[; \mathbb{R}^6) \mid \left\{ \hat{\bar{\xi}}(0), \hat{\underline{\theta}}(0) \right\} = \left\{ \underline{0}, \underline{0} \right\} \right\},$$

des champs de déplacement cinématiquement admissibles à zéro, on peut donner une formulation faible équivalente. Les valeurs critiques du paramètre de chargement  $Q$  sont celles telles que :

$$\begin{aligned} & \exists \left\{ \bar{\xi}, \underline{\theta} \right\} \in CA_0, \quad \forall \left\{ \hat{\underline{u}}, \hat{\underline{w}} \right\} \in CA_0, \quad \int_0^{L(Q)} \frac{d}{dS} \left\{ \bar{\xi}, \underline{\theta} \right\} \cdot \underline{A} \cdot \frac{d}{dS} \left\{ \hat{\underline{u}}, \hat{\underline{w}} \right\} \\ & + \int_0^{L(Q)} \underline{R}_0(Q) \cdot \left( \frac{d\bar{\xi}}{dS} \wedge \hat{\underline{w}} + \frac{d\hat{\underline{u}}}{dS} \wedge \underline{\theta} \right) + \left( \underline{\theta} \wedge \underline{R}_0(Q) \right) \cdot \left( \underline{T} \wedge \hat{\underline{w}} \right) + \underline{M}_0(Q) \cdot \left( \frac{d\hat{\underline{w}}}{dS} \wedge \underline{\theta} \right) \\ & + \left( \frac{d\bar{\xi}}{dS} \cdot \underline{T} \right) \left\{ \left( \frac{d\underline{R}_0(Q)}{dS} \cdot \hat{\underline{u}} \right) + \left( \frac{d\underline{M}_0(Q)}{dS} \cdot \hat{\underline{w}} \right) + \left( \underline{T} \wedge \underline{R}_0(Q) \right) \cdot \hat{\underline{w}} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Il est alors d'usage de poser :

$$K_{\text{el}} \left( \left\{ \bar{\xi}, \underline{\theta} \right\}, \left\{ \hat{\underline{u}}, \hat{\underline{w}} \right\} \right) = \int_0^{L(Q)} \frac{d}{dS} \left\{ \bar{\xi}, \underline{\theta} \right\} \cdot \underline{A} \cdot \frac{d}{dS} \left\{ \hat{\underline{u}}, \hat{\underline{w}} \right\},$$

$$\begin{aligned}
K_{\text{g\u00e9om}}\left(\left\{\bar{\xi}, \underline{\theta}\right\}, \left\{\hat{u}, \hat{\omega}\right\}\right) &= \int_0^{L(Q)} \underline{R}_0(Q) \cdot \left(\frac{d\bar{\xi}}{dS} \wedge \hat{\omega} + \frac{d\hat{u}}{dS} \wedge \underline{\theta}\right) \\
&\quad + \left(\underline{\theta} \wedge \underline{R}_0(Q)\right) \cdot \left(\underline{T} \wedge \hat{\omega}\right) + \underline{M}_0(Q) \cdot \left(\frac{d\hat{\omega}}{dS} \wedge \underline{\theta}\right) \\
&\quad + \left(\frac{d\bar{\xi}}{dS} \cdot \underline{T}\right) \left\{ \left(\frac{d\underline{R}_0(Q)}{dS} \cdot \hat{u}\right) + \left(\frac{d\underline{M}_0(Q)}{dS} \cdot \hat{\omega}\right) \right. \\
&\quad \left. + \left(\underline{T} \wedge \underline{R}_0(Q)\right) \cdot \hat{\omega} \right\}, \tag{5.23}
\end{aligned}$$

$$K_{\text{glob}}\left(\left\{\bar{\xi}, \underline{\theta}\right\}, \left\{\hat{u}, \hat{\omega}\right\}\right) = K_{\text{el}}\left(\left\{\bar{\xi}, \underline{\theta}\right\}, \left\{\hat{u}, \hat{\omega}\right\}\right) + K_{\text{g\u00e9om}}\left(\left\{\bar{\xi}, \underline{\theta}\right\}, \left\{\hat{u}, \hat{\omega}\right\}\right).$$

La forme bil\u00e9aire  $K_{\text{el}}$ , d\u00e9j\u00e0 rencontr\u00e9e au chapitre 4 lors de l'\u00e9tude de l'\u00e9lasto-dynamique lin\u00e9aris\u00e9e sous le nom de produit scalaire en \u00e9nergie de d\u00e9formation, est aussi appel\u00e9e *op\u00e9rateur de rigidit\u00e9 \u00e9lastique*. Elle est sym\u00e9trique d\u00e9finie positive. La forme bil\u00e9aire  $K_{\text{g\u00e9om}}$ , appel\u00e9e *op\u00e9rateur de rigidit\u00e9 g\u00e9om\u00e9trique*, s'interpr\u00eate comme un terme de correction de la rigidit\u00e9 d\u00f9 \u00e0 la pr\u00e9sence de la pr\u00e9contrainte. La somme des deux,  $K_{\text{glob}}$ , appel\u00e9e rigidit\u00e9 globale, est l'op\u00e9rateur de rigidit\u00e9 qui va intervenir dans l'\u00e9tude de la dynamique des petits mouvements autour de la configuration pr\u00e9contrainte. Un point critique de la courbe d'\u00e9quilibre fondamentale est un point associ\u00e9 \u00e0 une valeur de  $Q$  telle que *l'op\u00e9rateur de rigidit\u00e9 globale admette 0 comme valeur propre*. Ainsi, le flambage est provoqu\u00e9 par une (pr\u00e9-)contrainte qui annule une rigidit\u00e9 globale de la structure. L'exemple du flambage d'Euler montre qu'un effort normal homog\u00e8ne peut annuler la rigidit\u00e9 globale de la poutre en flexion.

On notera que l'op\u00e9rateur de rigidit\u00e9 g\u00e9om\u00e9trique n'est pas, en g\u00e9n\u00e9ral, auto-adjoint (la forme bil\u00e9aire n'est pas sym\u00e9trique). De fa\u00e7on plus g\u00e9n\u00e9rale, lorsque les \u00e9quations d'\u00e9quilibre (non-lin\u00e9aires) peuvent s'\u00e9crire comme conditions de stationnarit\u00e9 d'une fonctionnelle scalaire qui s'interpr\u00eate alors comme une \u00e9nergie potentielle, l'op\u00e9rateur de rigidit\u00e9 globale, qui s'interpr\u00eate en terme de Hessien de l'\u00e9nergie potentielle, est toujours sym\u00e9trique. Lorsque les \u00e9quations d'\u00e9quilibre (non-lin\u00e9aires) peuvent s'\u00e9crire comme conditions de stationnarit\u00e9 d'une \u00e9nergie potentielle (ce qui implique alors que la rigidit\u00e9 globale est sym\u00e9trique), le travail fourni par les efforts ext\u00e9rieurs est ind\u00e9pendant du chemin suivi et on dit que l'on a affaire \u00e0 un *chargement conservatif*. Dans le cadre d'analyse non-lin\u00e9aire DI-RF, tous les chargements ne sont pas conservatifs et l'on ne dispose pas n\u00e9cessairement d'une \u00e9nergie potentielle. Le flambage d'Euler (cas  $\beta = \pi$  de la section 5.1) fournit un exemple de chargement conservatif. On verra un exemple de chargement non-conservatif dans la section 5.4.3.

On constate ais\u00e9ment sur l'expression (5.23) que les charges mortes n'entra\u00eenent pas n\u00e9cessairement la sym\u00e9trie de la rigidit\u00e9 globale. C'est une diff\u00e9rence de la th\u00e9orie des poutres \u00e9lastiques par rapport \u00e0 celle du milieu continu tridimensionnel \u00e9lastique qui est, qu'en th\u00e9orie des poutres, *les charges mortes ne sont pas forc\u00e9ment conservatives*. Un tel exemple de charge morte non-conservative pourra \u00eatre trouv\u00e9 dans l'exercice 5 \u00e0 la fin du pr\u00e9sent chapitre.

Un contexte de travail fr\u00e9quemment rencontr\u00e9 en th\u00e9orie des poutres est celui o\u00f9 l'on peut se restreindre au cas o\u00f9 la transformation entre \u00e9tat naturel et \u00e9tat pr\u00e9contraint est infinit\u00e9simale, ce qui autorise l'utilisation du cadre lin\u00e9aris\u00e9 TIEN pour d\u00e9crire la courbe d'\u00e9quilibre fondamentale. Cela revient \u00e0 limiter les valeurs du param\u00e8tre de chargement \u00e0

celles pour lesquelles on peut confondre la courbe d'équilibre fondamentale avec sa tangente en l'origine. En particulier, la contrainte généralisée  $[\underline{R}_0(Q), \underline{M}_0(Q)]$  aux points de la courbe d'équilibre fondamentale dépend linéairement du paramètre de chargement  $Q$  et on écrira :

$$[\underline{R}_0(Q), \underline{M}_0(Q)] = Q [\underline{\tilde{R}}_0, \underline{\tilde{M}}_0].$$

Compte-tenu du fait que, dans cette circonstance, la courbe fondamentale d'équilibre est une droite, tout point critique est ici un point de bifurcation, et le contexte d'étude ainsi défini est qualifié de *flambage eulerien*.

### 5.3.3 Perte de stabilité au franchissement d'un point critique et déstabilisation par flottement

Les équations de l'élasto-dynamique TIEN (linéarisées sous l'hypothèse de la transformation infinitésimale à partir de l'état naturel) ont été étudiées dans la section 4.4. Elles s'écrivent formellement :

$$\underline{\underline{M}} \cdot \ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{K}}_{\text{él}} \cdot \underline{q} = \underline{0},$$

où  $\underline{q}$  désigne la variable de configuration du système (champ de distributeur des déplacements linéarisés) et  $\underline{\underline{M}}, \underline{\underline{K}}_{\text{él}}$  sont deux opérateurs symétriques définis positifs. L'analyse spectrale de l'opérateur  $\underline{\underline{M}}^{-1} \cdot \underline{\underline{K}}_{\text{él}}$  a alors permis de construire la suite  $\omega_i$  des *pulsations propres de vibration autour de l'état naturel* ainsi que la base associée  $\underline{q}_i$  des *modes propres de vibrations*, caractérisés par :

$$\omega_i^2 \underline{\underline{M}} \cdot \underline{q}_i - \underline{\underline{K}}_{\text{él}} \cdot \underline{q}_i = \underline{0}, \quad (5.24)$$

les  $\underline{q}_i$  étant alors orthogonaux<sup>3</sup> deux-à-deux aussi bien pour le produit scalaire défini par  $\underline{\underline{M}}$  que pour celui défini par  $\underline{\underline{K}}_{\text{él}}$ .

Lorsque la référence n'est plus l'état naturel, mais un état précontraint quelconque, le travail mené dans la section 5.2 montre que l'équation régissant les petits mouvements dynamiques du système autour de l'état précontraint s'écrit maintenant formellement :

$$\underline{\underline{M}} \cdot \ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{K}}_{\text{glob}}(Q) \cdot \underline{q} = \underline{0}, \quad (5.25)$$

où  $\underline{q}$  désigne la variable de configuration du système (champ de distributeur des déplacements linéarisés par rapport à l'état précontraint défini par  $Q$  sur la courbe d'équilibre fondamentale). La circonstance particulière de la référence à l'état naturel (TIEN) correspond simplement à la valeur particulière  $Q = 0 : \underline{\underline{K}}_{\text{glob}}(Q = 0) = \underline{\underline{K}}_{\text{él}}$ . Dans le cas particulier d'un chargement conservatif, la rigidité globale  $\underline{\underline{K}}_{\text{glob}}$  est symétrique tout comme la rigidité élastique  $\underline{\underline{K}}_{\text{él}}$  et l'analyse de la dynamique par superposition modale se transpose à

---

<sup>3</sup>profitons-en pour remarquer que le pendant en dimension finie  $n$  de cette analyse spectrale s'obtient immédiatement de la manière suivante. Le théorème de réduction simultanée de deux formes quadratiques en dimension finie donne l'existence d'un opérateur inversible  $\underline{\underline{P}}$  ainsi que d'un opérateur diagonal  $\underline{\underline{D}}$  tels que :

$$\underline{\underline{M}} = {}^t \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{P}}, \quad \underline{\underline{K}}_{\text{él}} = {}^t \underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{P}}.$$

Notant alors  $\omega_i^2$  les valeurs propres (nécessairement strictement positives) de  $\underline{\underline{D}}$ , on en déduit que l'opérateur  $\underline{\underline{M}}^{-1} \cdot \underline{\underline{K}}_{\text{él}}$  est diagonalisable et que ses vecteurs propres satisfont à (5.24). Le fait que la base de vecteurs propres soit orthogonale aussi bien pour le produit scalaire défini par  $\underline{\underline{M}}$  que par celui défini par  $\underline{\underline{K}}_{\text{él}}$  est maintenant immédiat.

l'identique de celle de l'élasto-dynamique TIEN. Bien entendu, aussi bien les valeurs propres que les vecteurs propres de l'opérateur  $\underline{\underline{M}}^{-1} \cdot \underline{\underline{K}}_{\text{glob}}$  dépendent maintenant du paramètre de chargement  $Q$ . Dans le cas d'un chargement quelconque, la rigidité globale  $\underline{\underline{K}}_{\text{glob}}$  n'est pas symétrique, en général, et l'analyse de la dynamique par superposition modale requiert des outils plus élaborés d'analyse spectrale d'opérateurs non auto-adjoints. Dans ce cas général, examinons la composante de l'équation (5.25) suivant la direction propre de  $\underline{\underline{M}}^{-1} \cdot \underline{\underline{K}}_{\text{glob}}(Q)$  associée à la valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Il vient :

$$\ddot{q} + \lambda q = 0,$$

où  $q$  est maintenant l'amplitude du mouvement suivant la direction propre considérée. On constate alors que cette amplitude ne reste bornée en général que si  $-\lambda$  n'a pas de racine carrée à partie réelle strictement positive, c'est-à-dire seulement si  $\lambda \in ]0, +\infty[ \subset \mathbb{C}$ .

D'autre part, on a vu dans la section précédente 5.3.2, que les valeurs critiques du paramètre de chargement  $Q \in \mathbb{R}$  d'un problème d'équilibre paramétré sont exactement les valeurs de  $Q$  telles que l'opérateur de rigidité globale  $\underline{\underline{K}}_{\text{glob}}(Q)$  admette 0 comme valeur propre, ou, ce qui est équivalent, les valeurs de  $Q$  telles que l'opérateur de rigidité globale  $\underline{\underline{M}}^{-1} \cdot \underline{\underline{K}}_{\text{glob}}(Q)$  admette  $\lambda = 0$  comme valeur propre.

La problématique de bifurcation-stabilité s'énonce alors en terme des propriétés spectrales de l'opérateur  $\underline{\underline{M}}^{-1} \cdot \underline{\underline{K}}_{\text{glob}}(Q)$ .

- Un point critique de la courbe d'équilibre fondamentale est un point associé à une valeur de  $Q$  telle que l'opérateur  $\underline{\underline{M}}^{-1} \cdot \underline{\underline{K}}_{\text{glob}}(Q)$  admette 0 comme valeur propre.
- Un point de la courbe d'équilibre fondamentale associé à une valeur de  $Q$  telle que l'opérateur  $\underline{\underline{M}}^{-1} \cdot \underline{\underline{K}}_{\text{glob}}(Q)$  admette une valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus ]0, +\infty[$  est instable.

Dans le cas des chargements conservatifs, l'opérateur de rigidité globale  $\underline{\underline{K}}_{\text{glob}}(Q)$  est auto-adjoint (la forme bilinéaire est symétrique), et, par conséquent les valeurs propres de l'opérateur  $\underline{\underline{M}}^{-1} \cdot \underline{\underline{K}}_{\text{glob}}(Q)$  sont réelles. On peut démontrer, et nous l'admettrons, que ces valeurs propres sont des fonctions continues du paramètre de chargement  $Q$ . Comme, en l'état naturel, la rigidité globale se réduit à la rigidité élastique qui est définie positive, on en déduit que la courbe d'équilibre fondamentale ne contient que des équilibres stables sur tout un voisinage de l'état naturel. Au premier point critique, une valeur propre de la rigidité globale s'annule et, génériquement, change de signe, avec pour conséquence immédiate la perte

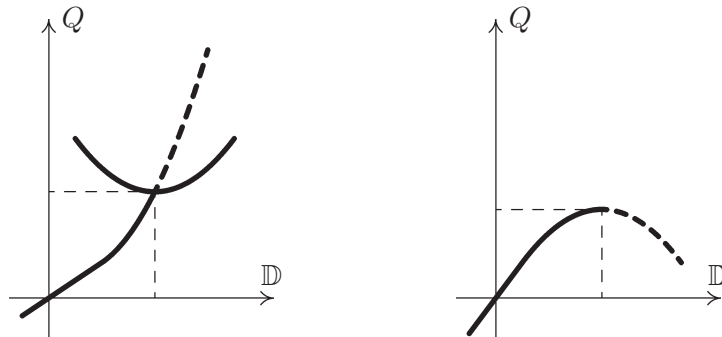


FIG. 5.11 – Perte de stabilité au franchissement du premier point critique.

de stabilité sur la courbe d'équilibre fondamentale au franchissement du premier point critique (cf figure 5.11). C'est la situation reconstruite dans l'exemple du flambage d'Euler, où grâce à la symétrie de la rigidité globale, la dynamique a pu être analysée complètement par superposition modale (cf section 5.1.7).

Revenons maintenant au cas général de chargement non nécessairement conservatif où la rigidité globale n'est plus symétrique en général. Notons alors  $\lambda_i(Q)$  les valeurs propres (éventuellement complexes) de l'opérateur  $\underline{M}^{-1} \cdot \underline{K}_{\text{glob}}(Q)$ . Lorsque  $Q = 0$ , on sait que les  $\lambda_i(0) = \omega_i^2$  se trouvent sur la demi-droite  $]0, +\infty[$ . Pour simplifier, plaçons-nous dans la situation générique où ces valeurs propres sont de multiplicité (géométrique) égale à 1. Rappelant que l'opérateur réel  $\underline{M}^{-1} \cdot \underline{K}_{\text{glob}}(Q)$  ne peut admettre de valeur propre complexe sans que le complexe conjugué ne soit aussi valeur propre, on voit qu'il ne peut exister que deux mécanismes permettant aux valeurs propres  $\lambda_i(Q)$  de quitter la demi-droite  $]0, +\infty[$  (cf figure 5.12), et donc de détruire la stabilité de l'équilibre.

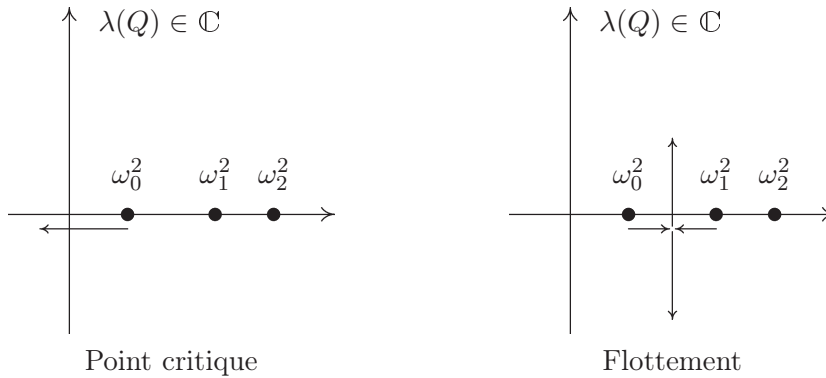


FIG. 5.12 – Les deux mécanismes de perte de stabilité.

- Soit la plus petite valeur propre  $\lambda_0(Q)$  (qui n'est autre, au moins lorsqu'elle est strictement positive, que le carré de la pulsation propre fondamentale) s'annule et change de signe : c'est la déstabilisation par franchissement d'un point critique qui peut être un point de bifurcation ou un point limite (cf figure 5.11).
- Soit une paire de valeurs propres consécutives  $(\lambda_i(Q), \lambda_{i+1}(Q))$  se confond, ce qui leur permet ensuite de quitter la demi-droite  $]0, +\infty[$ , de part et d'autre d'une même valeur réelle : c'est la déstabilisation par flottement.

Dans le cas de la déstabilisation par flottement (dont on trouvera des exemples dans la section 5.4.3 et l'exercice 6), certaines valeurs propres  $\lambda_i(Q)$  quittent, pour une valeur  $Q_0$  de  $Q$ , le demi-axe  $]0, +\infty[$  sans passer par 0. On a alors *perte de stabilité sur la courbe d'équilibre fondamentale sans passer par un point critique*. Sous certaines conditions, dites de transversalité, on peut alors montrer (théorème de Hopf) l'existence, au voisinage du point  $(\mathbb{D}(Q_0), Q_0)$  de la courbe d'équilibre fondamentale, d'orbites dynamiques périodiques, dont la pulsation est donnée à l'ordre principal par la racine carrée de la valeur propre qui quitte le demi-axe  $]0, +\infty[$ , et l'amplitude est génériquement proportionnelle à  $\sqrt{|Q - Q_0|}$  (cf figure 5.13). Lorsque  $Q$  dépasse la valeur  $Q_0$ , la courbe fondamentale est alors abandonnée et le système bascule sur ces orbites dynamiques périodiques et entre ainsi en vibrations. On parle alors de *bifurcation de Hopf*.

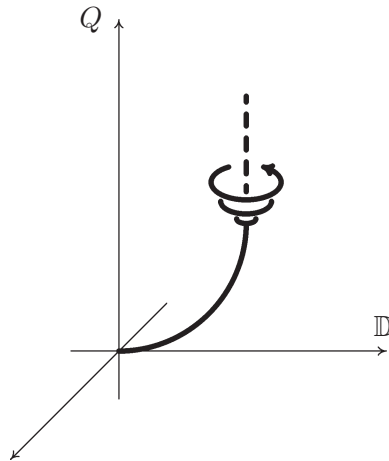


FIG. 5.13 – Bifurcation de Hopf.

La condition de transversalité des hypothèses du théorème de Hopf n'est cependant pas toujours satisfaite en pratique, et les vibrations induites par flottement ne sont souvent que des orbites quasi-périodiques de la dynamique non-linéaire.

## 5.4 Exemples d'instabilités de poutres élastiques

On présente trois calculs explicites d'instabilités. Le premier montre un exemple de bifurcation statique dans un cas de chargement qui ne respecte pas la condition de charge morte (« charge suiveuse »). Le deuxième (claquage ou « snap-through ») fournit un exemple de point critique de courbe d'équilibre, qui n'est pas un point de bifurcation, mais un point limite. Enfin, le troisième donne un exemple d'instabilité par flottement ou bifurcation dynamique.

### 5.4.1 Tube sous pression externe

#### Position du problème

On considère un tube mince de révolution (épaisseur petite devant le rayon interne), de longueur infinie. On s'intéresse aux déformations possibles dans le plan de la section de ce tube sous l'effet d'une pression externe. Ce cadre restrictif (étude uniquement des déformations dans le plan de la section) permet d'adopter une modélisation poutre d'un tronçon de longueur unité du tube. Plus précisément, ce tronçon est modélisé comme une poutre dont la fibre moyenne, dans la configuration initiale supposée dénuée de contrainte, est un *cercle* de rayon  $r$ . Le tube est supposé constitué d'un matériau élastique isotrope homogène de module d'Young  $E$  et le modèle de poutre sera supposé obéir à la loi de comportement standard inextensible. On notera  $I$  le moment principal d'inertie géométrique (par unité de longueur du tube) de la section dans la direction orthogonale au plan de la fibre moyenne. Le plan contenant la fibre moyenne sera rapporté à des coordonnées polaires (origine au centre du cercle) dont la coordonnée angulaire sera notée  $\alpha$ .

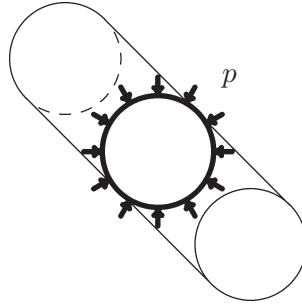


FIG. 5.14 – Équilibre d'un tube sous pression externe.

Le but de l'étude est l'investigation de l'éventualité d'ovalisation du tube par bifurcation. On mènera l'analyse dans le cadre du *flambage eulerien* décrit à la section 5.3.2. En particulier, la courbe (droite) d'équilibre fondamentale sera identifiée dans le cadre d'analyse linéarisé TIEN. L'étude des équations d'équilibre linéarisées autour d'un point quelconque de cette courbe d'équilibre fondamentale permettra alors de discuter l'éventualité d'une bifurcation.

#### Analyse de l'équilibre dans le cadre linéarisé TIEN

L'abscisse curviligne sur la configuration de référence étant  $S_0 = r\alpha$ , l'expression linéarisée de la liaison interne d'inextensibilité :

$$\underline{T}_0 \cdot \frac{d\bar{\xi}}{dS_0} = 0,$$

s'écrit ici :

$$\frac{1}{r} \left( \frac{d\bar{\xi}_\alpha}{d\alpha} + \bar{\xi}_r \right) = 0,$$

où  $\bar{\xi}_r$  et  $\bar{\xi}_\alpha$  désignent les composantes dans la base locale des coordonnées polaires du déplacement de la fibre moyenne. En notant  $\theta(\alpha)$  l'angle de rotation courant des sections, l'expression linéarisée de la liaison interne de Navier-Bernoulli s'écrit :

$$\theta = \frac{1}{r} \left( \bar{\xi}_\alpha - \frac{d\bar{\xi}_r}{d\alpha} \right).$$

L'ensemble des équations régissant, dans le cadre d'analyse TIEN, l'équilibre dans le plan de la fibre moyenne s'écrit immédiatement à partir des équations de la section 4.1. Il vient ici :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} R_r - R_\alpha &= pr, \\ \frac{d}{d\alpha} R_\alpha + R_r &= 0, \\ \frac{d}{d\alpha} M &= rR_r, \\ M &= \frac{EI}{r} \frac{d\theta}{d\alpha}. \end{aligned}$$



Les conditions à la limite sont, ici, en l'absence de limites, remplacées par des conditions de périodicité. La résolution est immédiate et l'ensemble des solutions est donné par :

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_r &= A \cos \alpha + B \sin \alpha, & R_r &= 0, \\ \bar{\xi}_\alpha &= rC - A \sin \alpha + B \cos \alpha, & R_\alpha &= -pr, \\ \theta &= C, & M &= 0,\end{aligned}$$

où les constantes arbitraires  $A$ ,  $B$  et  $C$  s'interprètent comme les composantes d'un déplacement rigide (infinitésimal) arbitraire. Comme on pouvait s'y attendre, la déformation est identiquement nulle et la configuration actuelle reste un cercle de rayon  $r$ , déduit de la configuration de référence par une transformation rigidifiante infinitésimale. La seule composante non nulle de la contrainte généralisée est l'effort normal, qui est homogène, effort tranchant et moment fléchissant étant identiquement nuls.

On vérifie, d'ailleurs aisément, que cette configuration circulaire indéformée associée à la distribution de contrainte généralisée qui se réduit à l'effort normal homogène  $-pr$  constitue une solution des équations de l'équilibre du cadre non-linéaire DI-RF (équations récapitulées à la page 33).

### Recherche de bifurcation

Identifiant la pression  $p$  à un paramètre de chargement, la solution du cadre d'analyse TIEN obtenue précédemment fournit la courbe (droite) fondamentale d'équilibre dont on recherche maintenant d'éventuels points de bifurcation. Puisque la courbe fondamentale d'équilibre est une droite, tout point critique sera un point de bifurcation. La recherche des valeurs critiques de  $p$  passe par l'écriture des équations d'équilibre linéarisées autour de l'état précontraint défini par la solution d'équilibre du cadre d'analyse TIEN. Les conditions de chargement ne sont pas de type « charge morte », puisque la pression exerce une force colinéaire à la normale à la déformée de la fibre moyenne. La linéarisation des efforts extérieurs par rapport à la transformation autour de l'état précontraint donne :

$$\left[ \underline{\bar{F}}, \underline{\bar{C}} \right] = \left[ -p(\underline{e}_r + \theta \underline{e}_\alpha), \underline{0} \right],$$

ce qui, pour la circonstance en jeu, donne :

$$\mathcal{L}(\underline{\bar{\xi}}, \underline{\theta}) = \left[ -p\theta \underline{e}_\alpha, \underline{0} \right].$$

L'obtention des équations d'équilibre linéarisées autour de l'état précontraint, à partir des résultats de la section 5.2.3 est alors immédiat. Il vient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\alpha} R_r - R_\alpha &= pr, \\ \frac{d}{d\alpha} R_\alpha + R_r &= pr\theta, \\ \frac{d}{d\alpha} M &= rR_r - pr^2\theta, \\ M &= \frac{EI}{r} \frac{d\theta}{d\alpha},\end{aligned}\tag{5.26}$$

où l'on a toujours :

$$\frac{1}{r} \left( \frac{d\bar{\xi}_\alpha}{d\alpha} + \bar{\xi}_r \right) = 0, \quad \frac{1}{r} \left( \bar{\xi}_\alpha - \frac{d\bar{\xi}_r}{d\alpha} \right) = \theta. \quad (5.27)$$

Les valeurs critiques de  $p$  sont celles pour lesquelles le système (5.26), (5.27) admet une solution non triviale (non rigidifiante). L'élimination de toutes les fonctions inconnues au profit de la seule inconnue  $\theta$  fournit l'équation :

$$EI \frac{d^4\theta}{d\alpha^4} + (EI + pr^3) \frac{d^2\theta}{d\alpha^2} = 0. \quad (5.28)$$

L'équation (5.28) n'admet de solutions  $2\pi$ -périodiques non constantes que dans la circonstance où  $1 + pr^3/EI$  est le carré d'un entier. La circonstance où ce carré est égal à 1 (cas  $p = 0$ ) est à exclure, car alors  $\theta(\alpha) = C \cos(\alpha + \varphi)$  et les équations (5.27) entraînent  $C = 0$ . Au final, les valeurs critiques de  $p$  sont donc caractérisées par :

$$p = (n + 1)(n + 3) \frac{EI}{r^3}, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

La charge critique d'Euler du problème d'équilibre est donc :

$$p_c = \frac{3EI}{r^3},$$

Le mode de bifurcation associé :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_r &= 2C \cos(2\alpha + \varphi), \\ \bar{\xi}_\alpha &= -C \sin(2\alpha + \varphi), \end{aligned}$$

( $C, \varphi$  constantes arbitraires) conduisant à une ovalisation du tuyau.

Dans la circonstance en jeu, l'opérateur de rigidité globale, tenant compte de l'opérateur linéaire  $\mathcal{L}$ , s'écrit :

$$K_{\text{glob}} \left( (\bar{\xi}_r, \bar{\xi}_\alpha), (\hat{u}_r, \hat{u}_\alpha) \right) = \int_0^{2\pi} \frac{EI}{r^4} \underbrace{\left( \frac{d\bar{\xi}_\alpha}{d\alpha} - \frac{d^2\bar{\xi}_r}{d\alpha^2} \right)}_{r \frac{d\theta}{d\alpha}} \underbrace{\left( \frac{d\hat{u}_\alpha}{d\alpha} - \frac{d^2\hat{u}_r}{d\alpha^2} \right)}_{r \frac{d\hat{\omega}}{d\alpha}} + \frac{p}{r} \int_0^{2\pi} \bar{\xi}_r \hat{u}_r - \frac{d\bar{\xi}_r}{d\alpha} \frac{d\hat{u}_r}{d\alpha}.$$

Il est manifestement auto-adjoint (symétrique), et il en résulte que l'analyse des petits mouvements dynamiques autour de l'état précontraint pourrait être conduite de manière totalement identique à celle effectuée dans la section 5.1.7 à propos du flambage d'Euler. On obtiendrait exactement les mêmes conclusions qualitatives, à savoir que le carré de la pulsation propre fondamentale est, à une constante multiplicative strictement positive près, en  $p_c - p$ , avec pour conséquence l'instabilité de la configuration d'équilibre circulaire lorsque  $p$  excède la valeur critique. On en déduit que l'on peut également « écouter » la charge critique d'Euler en « gonflant », puis en faisant vibrer le tube.

### 5.4.2 Étude d'un claquage

On considère l'assemblage de poutres représenté sur la figure 5.15. Chacune des poutres, identiques, est issue de la considération d'un cylindre élastique homogène isotrope (module d'Young  $E$ , aire commune à toutes les sections droites  $|\mathcal{S}|$ ). Ces poutres seront supposées obéir à la loi de comportement standard et on supposera en outre que la direction orthogonale au plan défini par les lignes moyennes est direction principale d'inertie des sections (moment principal d'inertie géométrique associé  $I$ ).

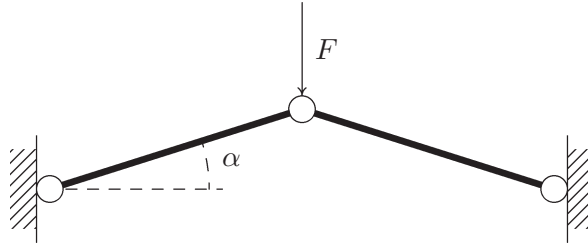


FIG. 5.15 – Équilibre d'un système de poutres.

#### Analyse de l'équilibre dans le cadre linéarisé TIEN

Dans un premier temps, on se propose d'étudier l'équilibre de la structure sous l'effet de la force « verticale » d'amplitude  $F$ , dans le cadre d'analyse TIEN. L'équation d'équilibre dans chacune des poutres :

$$\frac{d\underline{R}}{dS} = \underline{0}, \quad \frac{d\underline{M}}{dS} + \underline{T} \wedge \underline{R} = \underline{0},$$

associée aux conditions de moment nul aux extrémités (rotules parfaites) entraîne aisément que la contrainte généralisée dans chacune des poutres se réduit à la composante d'effort normal. L'équilibre « horizontal » de la rotule centrale montre que cet effort normal est identique dans les deux poutres (que les poutres soient identiques ou non, d'ailleurs). L'équilibre vertical de cette rotule donne alors sa valeur :

$$R_T = -\frac{F}{2 \sin \alpha}.$$

La distribution d'effort normal à l'équilibre est indépendante du comportement : le problème d'équilibre considéré est *isostatique*.

Calculons maintenant le déplacement de la rotule centrale en vue d'évaluer la raideur de la structure. On peut obtenir cette valeur par au moins deux moyens.

1. Soit en utilisant le théorème de Castigliano-Menabrea :

$$q = \frac{\partial}{\partial F} \frac{F^2 L}{4E|\mathcal{S}| \sin^2 \alpha} = \frac{FL}{2E|\mathcal{S}| \sin^2 \alpha}.$$

2. Soit directement, en utilisant la loi de comportement :

$$q = L \sin \alpha - L' \sin \alpha'$$

où  $L' = L(1 + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon$  désignant comme d'habitude l'allongement :

$$\varepsilon = -\frac{F}{2E|\mathcal{S}|\sin\alpha}.$$

De :

$$L\cos\alpha = L'\cos\alpha',$$

on déduit :

$$\cos\alpha' = \frac{\cos\alpha}{1 + \varepsilon},$$

puis :

$$L'\sin\alpha' = L\sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - \cos^2\alpha},$$

et enfin :

$$q = L\left(\sin\alpha - \sqrt{(1 + \varepsilon)^2 - \cos^2\alpha}\right),$$

qui est indiscernable, à l'ordre d'approximation consenti ( $|\varepsilon| \ll 1$ ), de :

$$q = -L\sin\alpha\frac{\varepsilon}{\sin^2\alpha} = \frac{FL}{2E|\mathcal{S}|\sin^2\alpha}.$$

Dans tous les cas, la raideur cherchée vaut :

$$\frac{F}{q} = \frac{2E|\mathcal{S}|\sin^2\alpha}{L}.$$

On notera que la validité du cadre linéarisé TIEN qui s'écrit :

$$F \ll E|\mathcal{S}|\sin\alpha,$$

est extrêmement réduite lorsque l'angle  $\alpha$  est petit. Dans ce cas, on a d'ailleurs :

$$|\alpha - \alpha'| \ll \alpha.$$

On constate d'ailleurs que lorsque  $\alpha$  tend vers 0, l'hypothèse de la transformation infinitésimale réduit les valeurs possibles de  $F$  à la seule valeur 0. En effet, pour  $\alpha = 0$ , il devient impossible de satisfaire l'équilibre dans le cadre linéarisé TIEN pour une valeur non nulle de  $F$ .

### Analyse en rotation finie

On décide alors d'étudier l'équilibre dans le cadre d'analyse élargi DI-RF. Dans cette partie, l'angle  $\alpha$  sera supposé petit et non nul. Pour fixer les idées, on supposera  $\cos\alpha > 0.9$ . On désignera comme d'habitude l'allongement courant par  $\varepsilon$  et l'angle de rotation courant par  $\theta$ . L'équilibre global de chaque poutre montre que la force exercée par chaque rotule sur les extrémités d'une poutre est nécessairement dirigée suivant la ligne passant par les deux rotules. D'après l'étude du flambage d'Euler, on sait alors que tant que cette force n'excède pas la valeur  $\pi^2 EI/L^2$  en compression, la seule configuration d'équilibre possible est la configuration rectiligne  $\theta = \text{constante}$ . Dans un premier temps on supposera donc cette condition satisfaite. De :

$$\frac{dR}{dS} = \underline{0}, \quad R_T = E|\mathcal{S}|\varepsilon,$$

on déduit que l'allongement  $\varepsilon$  est homogène dans chaque poutre. Indiquant par 1, l'allongement et la rotation de la poutre de gauche, et par 2 les mêmes quantités rapportées à la poutre de droite, l'équilibre « horizontal » de la rotule centrale s'écrit :

$$\varepsilon_1 \cos(\theta_1 + \alpha) = \varepsilon_2 \cos(\theta_2 - \alpha),$$

tandis que la continuité du déplacement en cette même rotule centrale donne :

$$(1 + \varepsilon_1) \cos(\theta_1 + \alpha) + (1 + \varepsilon_2) \cos(\theta_2 - \alpha) = 2 \cos \alpha,$$

$$(1 + \varepsilon_1) \sin(\theta_1 + \alpha) + (1 + \varepsilon_2) \sin(\theta_2 - \alpha) = 0.$$

La première jointe à la troisième de ces équations exige, en faisant usage des restrictions  $\cos \alpha > 0.9$ ,  $|\varepsilon_i| < 0.1$  :

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_1, \quad \theta_2 = -\theta_1.$$

On déduit alors de la deuxième que :

$$\varepsilon = \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\theta_1 + \alpha)} - 1.$$

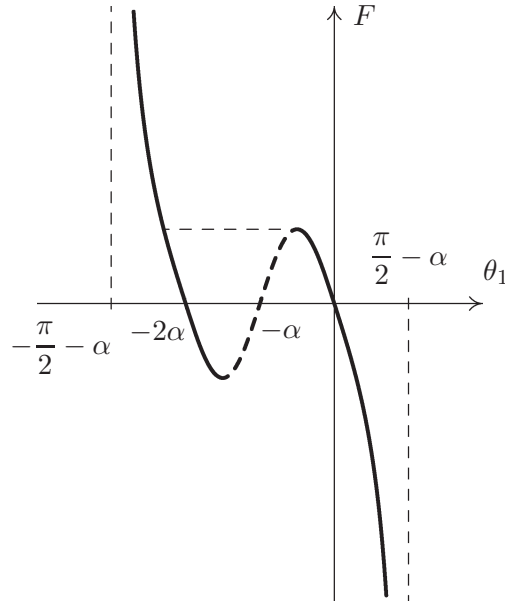
Il reste à écrire l'équilibre « vertical » de la rotule centrale :

$$2E|\mathcal{S}| \sin(\theta_1 + \alpha) \varepsilon = -F.$$

Rassemblant les deux dernières équations, on obtient une équation reliant  $F$  et  $\theta_1$ .

$$F = 2E|\mathcal{S}| \sin(\theta_1 + \alpha) \left( 1 - \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\theta_1 + \alpha)} \right).$$

L'allure de la courbe obtenue est représentée sur la figure 5.16. Le comportement du système est alors le suivant : si on le pilote en déplacement, la force à appliquer croît, passe par un maximum et décroît pour s'annuler dans la configuration plate. Il faut ensuite « retenir » le système avec une force dirigée vers le haut qui est nulle à nouveau dans la configuration symétrique de la configuration initiale. Si, maintenant, on cherche à piloter en force, par exemple, en faisant croître l'amplitude de la force à partir de 0, lorsque le système atteint la configuration correspondant au maximum local de  $F$ , il n'y a plus d'équilibre possible : le système va violemment échapper au contrôle de l'expérimentateur et passer de l'autre côté de façon dynamique. On parle alors de « claquage » (ou « snap-through »). De façon plus générale, tout point à tangente horizontale sur une courbe déformation-effort est dit « point-limite ». On vient de voir que cette situation est possible dans le cadre d'analyse non-linéaire DI-RF. Dans un tel cas, le système peut être piloté cinématiquement mais pas statiquement. La tangente en l'origine à cette courbe d'équilibre est la courbe d'équilibre du cadre d'analyse TIEN et sa pente est la raideur calculée dans ce cadre. On constate de nouveau que l'on ne peut confondre la courbe d'équilibre autour de l'origine avec sa tangente que si l'on se limite à des angles de rotation petits devant  $\alpha$ . Le maximum local sur cette courbe d'équilibre a une tangente horizontale : la raideur du système associée à l'équilibre linéarisé autour de ce point est nulle. En reprenant la terminologie de la section 5.3.1, il s'agit d'un point critique de la courbe d'équilibre qui n'est pas un point de bifurcation. Il n'est pas difficile de montrer que tous les points de la courbe d'équilibre situés entre le minimum local

FIG. 5.16 – Graphe de la fonction  $F(\theta_1)$ .

et le maximum local sont instables. En effet, la tangente a une pente strictement négative, ce qui donne une raideur strictement négative associée aux équations d'équilibre linéarisées autour d'un tel point. Choissant alors une petite perturbation associée à un allongement homogène identique dans chacune des poutres, l'évolution dynamique linéarisée éloigne, exponentiellement en temps, le système du point d'équilibre correspondant.

Ajoutons pour conclure les restrictions auxquelles est soumise l'analyse ci-dessus. La première est le respect de l'hypothèse des petites déformations qui implique que cette analyse n'est en fait valable que pour les petites valeurs de  $\alpha$ . La seconde concerne l'instabilité due au flambage d'Euler qui requiert que la valeur de la force au point limite n'excède pas la charge critique d'Euler  $\pi^2 EI/L^2$ . En pratique, c'est encore une limitation sur la valeur que peut prendre  $\alpha$ . Retenons donc au final, que l'analyse menée est valide pourvu que  $\alpha$  soit suffisamment petit.

Concrètement, le claquage permet d'obtenir un effet rapide à partir d'une action lente. Ce phénomène est mis à profit dans les interrupteurs où l'on souhaite une réponse rapide même dans la circonstance d'une action lente de l'utilisateur. Dans la nature, certaines plantes carnivores, incapables d'action rapide parce que dépourvues de muscles, exploitent également ce phénomène. Dans la phase de veille, ces plantes viennent se positionner tout près d'un point limite de sorte qu'elles sont alors capables de réaction explosive à partir d'une action infinitésimale. Elles ne disposent cependant que d'un seul essai puisqu'ayant besoin de plusieurs heures pour « recharger », c'est-à-dire pour revenir se positionner au voisinage du point limite.

### 5.4.3 L'arroseur arrosé

On considère à nouveau la poutre rectiligne dans sa configuration naturelle, encadrée à une de ses extrémités et déjà envisagée dans la section 5.1 qui traite du flambage d'Euler. Ce

modèle de poutre est issu de la considération d'un cylindre de révolution (moment d'inertie géométrique d'une section droite dans toute direction orthogonale à l'axe du cylindre noté  $I$ ) homogène isotrope (module d'Young noté  $E$ ) et sera supposé obéir à la loi de comportement standard inextensible. Une force axiale compressive d'amplitude  $F$  est imposée sur

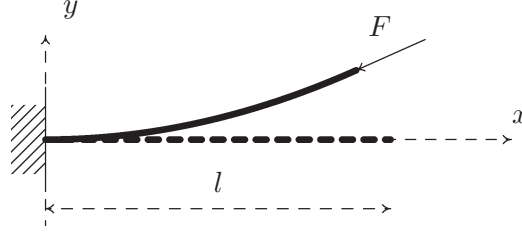


FIG. 5.17 – Poutre console sollicitée par une force suiveuse.

l'extrémité non-encastree, mais, à la différence cependant du cas envisagé à la section 5.1, on supposera que la direction de cette force reste constamment colinéaire à la tangente à la poutre au point d'application (force « suiveuse » et non pas morte).

Il est clair que la configuration rectiligne indéformée est en équilibre avec le chargement appliqué et ce quelle que soit l'amplitude  $F \geq 0$  de la force suiveuse. Pour étudier la stabilité de cet équilibre, on examine alors les petits mouvements dynamiques autour de cette configuration précontrainte. L'équation de la dynamique linéarisée autour de la configuration rectiligne précontrainte est la même que celle qui a déjà été obtenue à la section 5.1.7, seules les conditions aux limites étant ici différentes :

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^4 \bar{\xi}_y}{\partial x^4} + F \frac{\partial^2 \bar{\xi}_y}{\partial x^2} + \rho |S| \frac{\partial^2 \bar{\xi}_y}{\partial t^2} &= 0, \\ \bar{\xi}_y(t, 0) = \frac{\partial}{\partial x} \bar{\xi}_y(t, 0) &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{\xi}_y(t, l) = \frac{\partial^3}{\partial x^3} \bar{\xi}_y(t, l) &= 0. \end{aligned}$$

On introduit alors les notations :

$$k^2 = \frac{F}{EI}, \quad a = \frac{\rho |S|}{EI},$$

de sorte que le problème aux limites s'écrit maintenant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \bar{\xi}_y}{\partial x^4} + k^2 \frac{\partial^2 \bar{\xi}_y}{\partial x^2} + a \frac{\partial^2 \bar{\xi}_y}{\partial t^2} &= 0, \\ \bar{\xi}_y(t, 0) = \frac{\partial}{\partial x} \bar{\xi}_y(t, 0) &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{\xi}_y(t, l) = \frac{\partial^3}{\partial x^3} \bar{\xi}_y(t, l) &= 0. \end{aligned}$$

Les coefficients étant constants, cherchons-en les solutions de la forme :

$$\bar{\xi}_y(t, x) = q(x) e^{i\omega t}. \quad (5.29)$$

La fonction  $q$  doit satisfaire le problème aux limites :

$$\begin{aligned}\frac{d^4 q}{dx^4}(x) + k^2 \frac{d^2 q}{dx^2}(x) - a\omega^2 q(x) &= 0, \\ q(0) = \frac{dq}{dx}(0) &= 0, \\ \frac{d^2 q}{dx^2}(l) = \frac{d^3 q}{dx^3}(l) &= 0,\end{aligned}$$

dont la solution générale est donnée par :

$$q(x) = A \cosh \lambda_1 x + B \sinh \lambda_1 x + C \cos \lambda_2 x + D \sin \lambda_2 x,$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \left( \sqrt{a\omega^2 + \frac{k^4}{4} - \frac{k^2}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \lambda_2 &= \left( \sqrt{a\omega^2 + \frac{k^4}{4} + \frac{k^2}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Les conditions aux limites fournissent un système d'équations linéaire homogène pour les quatre constantes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  qui n'admet de solution non-triviale que si son déterminant s'annule :

$$2a\omega^2 + 2a\omega^2 \cosh \lambda_1 l \cos \lambda_2 l + k^2 \sqrt{a\omega^2} \sinh \lambda_1 l \sin \lambda_2 l + k^4 = 0. \quad (5.30)$$

On constate alors que  $\omega = 0$  ne peut être solution de l'équation aux pulsations (5.30) en dehors du cas  $F = 0$ . En d'autres termes, la courbe d'équilibre fondamentale ne présente plus aucun point critique au sens de la section 5.3.1.

Considérons maintenant le cas  $F = 0$  pour lequel :

$$k^2 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \sqrt[4]{a\omega^2}.$$

L'équation aux pulsations (5.30) se réduit alors à l'équation transcendante :

$$\cosh(l\sqrt[4]{a\omega^2}) \cos(l\sqrt[4]{a\omega^2}) = -1,$$

(déjà rencontrée page 63) qui détermine les pulsations propres de la poutre rectiligne ayant une extrémité encastree et l'autre libre et dont toutes les racines sont réelles. Les valeurs numériques des deux plus petites sont reportées dans la deuxième colonne du tableau 5.1. On trouve également dans le tableau 5.1 l'évolution de ces pulsations propres telles qu'elles sont déterminées par l'équation (5.30) lorsque  $F$  croît à partir de 0. Tant que :

$$\frac{Fl^2}{\pi^2 EI} < 2,0316, \quad (5.31)$$

toutes les racines  $\omega$  de l'équation aux pulsations (5.30) sont réelles et les petits mouvements dynamiques autour de n'importe quel équilibre rectiligne correspondant sont une somme de modes propres de vibration de la forme :

$$q(x) \cos \omega t, \quad \text{et} \quad q(x) \sin \omega t.$$



$\frac{Fl^2}{\pi^2 EI}$	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,032
$\frac{\omega_1^2 al^4}{\pi^4}$	0,127	0,182	0,272	0,441	0,992	1,246
$\frac{\omega_2^2 al^4}{\pi^4}$	4,984	4,296	3,567	2,750	1,542	1,246

TAB. 5.1 – Premières fréquences propres de la poutre encastrée soumise à une force suiveuse (d'après [6]).

Tous les équilibres rectilignes tels que la condition (5.31) soit remplie sont stables. Lorsque  $F$  atteint le seuil correspondant, les deux plus petites pulsations propres se confondent et on peut montrer que dès que le seuil est dépassé, ces racines  $\omega = m + in$  ont une partie imaginaire  $n$  non nulle. Substituant dans l'expression (5.29), on obtient des évolutions dynamiques particulières de la forme :

$$q(x) e^{(n+im)t}, \quad \text{et} \quad q(x) e^{(-n+im)t}.$$

Comme, soit  $n$ , soit  $-n$ , est strictement positif, certains de ces petits mouvements s'amplifient indéfiniment au cours du temps, suggérant que les équilibres correspondants sont instables. Concrètement, dès que  $F$  excède le seuil :

$$F_s = 2,0316 \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

(environ 8 fois supérieur à la charge critique d'Euler du même problème avec charge morte), la poutre entre en vibration. L'introduction d'une très petite viscosité permet d'ailleurs de satisfaire les hypothèses du théorème de Hopf (cf section 5.3.3) qui garantit l'existence d'orbites périodiques pour la dynamique non-linéaire.

Rapprochant cette analyse avec celle du flambage d'Euler telle qu'elle a été menée dans la section 5.1, on voit que les états d'équilibre de la courbe fondamentale sont les mêmes dans les deux problèmes. Cependant, les valeurs de l'amplitude  $F$  pour lesquelles ces équilibres sont déstabilisés dépendent crucialement de la manière dont le chargement accompagne les variations de configurations lors de l'abandon de la configuration rectiligne. Le fait que la charge soit morte ou suiveuse change non seulement le comportement qualitatif du système lors de l'apparition de l'instabilité, mais aussi la valeur même du seuil pour lequel apparaît cette instabilité.

## 5.5 Analyse de post-bifurcation à l'ordre supérieur

Il ressort de l'étude menée dans ce chapitre que les équations de la dynamique linéarisées non plus au voisinage de l'état naturel, mais d'un état précontraint arbitraire (équations du cadre d'analyse TIEP) donnent accès de façon systématique aux charges critiques des bifurcations statiques (flambage) et des bifurcations dynamiques ou de Hopf (flottement). Ces

équations donnent également accès au *mode de bifurcation* des bifurcations statiques, qui s'interprète en terme de géométrie de la configuration flambée, au moins lorsque l'amplitude du flambage demeure infinitésimale.

On a pu constater, en revanche, que l'amplitude du mode de bifurcation reste indéterminée dans ce cadre d'analyse linéarisé. Ce fait s'éclaire agréablement (cf section 5.1.5) à la lumière de l'interprétation du mode de bifurcation en terme de direction de la tangente à la branche bifurquée de la courbe d'équilibre du problème paramétré. On peut alors penser que l'amplitude sur le mode de bifurcation est gouvernée par les termes d'ordre supérieur. On se propose maintenant d'approfondir cette idée sur l'exemple du flambage d'Euler.

### 5.5.1 Retour sur le flambage d'Euler

On considère à nouveau l'équilibre de la tige inextensible de longueur  $l$ , encastrée en l'extrémité amont et soumise à la force de compression axiale, de direction invariable, en l'extrémité aval (cas  $\beta = \pi$  du problème de la section 5.1). Les configurations d'équilibre dans le cadre d'analyse non-linéaire DI-RF sont gouvernées par le problème aux limites non-linéaire :

$$\begin{aligned} EI \frac{d^2}{dx^2} \theta(x) + F \sin \theta(x) &= 0, \\ \theta(0) &= 0, \quad \frac{d}{dx} \theta(l) = 0, \end{aligned} \tag{5.32}$$

où  $\theta(x)$  est l'angle formé par la tangente à la fibre moyenne dans les configurations initiales et actuelles. De façon exceptionnelle, l'analyse des solutions de ce problème aux limites non-linéaire a pu être menée quasi-explicitement (en terme d'intégrale elliptique) dans la section 5.1.3, mettant en évidence l'existence, en sus de la configuration d'équilibre rectiligne indéformée, de configurations d'équilibre fléchies dès lors que l'amplitude  $F$  de la force excède la charge critique d'Euler  $F_c = \pi^2 EI / 4l^2$ . Ce résultat se schématise typiquement sur le diagramme de bifurcation rappelé sur la figure 5.18.

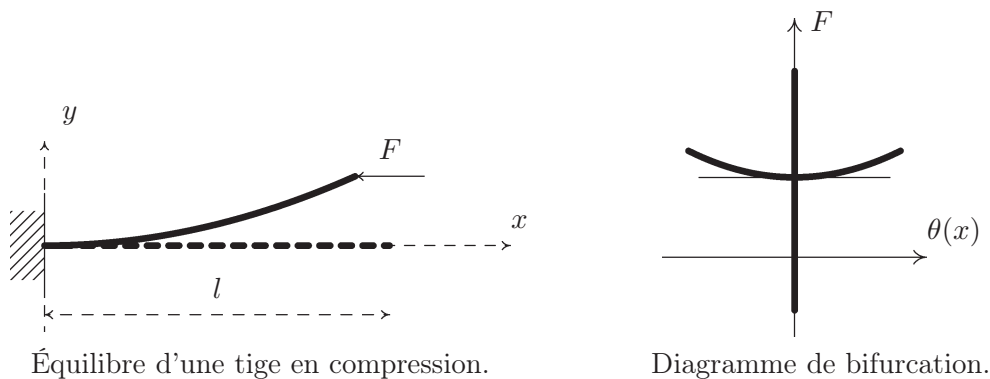


FIG. 5.18 – Le problème de l'*Elastica* d'Euler.

La *linéarisation* du problème aux limites (5.32) au voisinage d'un point arbitraire  $(\theta(x) \equiv 0, F)$  de la courbe d'équilibre fondamentale, conduit au problème aux limites linéa-

risé :

$$EI \frac{d^2}{dx^2} \theta(x) + F \theta(x) = 0,$$

$$\theta(0) = 0, \quad \frac{d}{dx} \theta(l) = 0.$$

La plus petite valeur de  $F$  pour laquelle le problème linéarisé admet une solution non-triviale est la charge critique d'Euler  $F_c = \pi^2 EI / 4l^2$  (cf section 5.1.5). Les solutions non-triviales s'expriment alors à l'aide du *mode de bifurcation* :

$$\theta(x) = C \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{l}\right),$$

où l'amplitude  $C$  reste indéterminée dans ce cadre linéarisé. L'analyse linéarisée permet seulement d'exhiber la tangente à la branche bifurquée en un point de bifurcation de la courbe d'équilibre fondamentale (cf le diagramme de bifurcation de la figure 5.18). En particulier, cette analyse linéarisée ne donne pas accès à l'amplitude de la flexion lorsque  $F$  excède la valeur critique  $F_c$ . Bien entendu, cette information est accessible à partir de l'expression exacte (formules (5.8) et (5.9) avec  $\beta = \pi$ ) des configurations fléchies en terme d'intégrale elliptique issue de la résolution du problème aux limites non-linéaire (5.32). Mais, comme la résolution explicite du problème non-linéaire restera une circonstance exceptionnelle, on se propose maintenant « d'oublier » ce résultat, et de chercher à accéder à cette information (décrire la configuration fléchie lorsque l'amplitude du chargement excède la charge critique) en calculant des termes d'ordre supérieur.

Plus précisément, on va chercher à identifier formellement un développement limité à un ordre arbitraire :

$$\begin{aligned} F &= F_0 + F_1 \eta + F_2 \eta^2 + F_3 \eta^3 + \dots, \\ \theta(x) &= \theta_1(x) \eta + \theta_2(x) \eta^2 + \theta_3(x) \eta^3 + \dots, \end{aligned} \tag{5.33}$$

d'une équation paramétrique (le paramètre en question étant noté  $\eta$ ) de la branche bifurquée, au voisinage d'un point quelconque ( $\theta_0(x) \equiv 0, F_0$ ) de la courbe d'équilibre fondamentale. Pour ce faire, on injecte les expressions (5.33) dans le problème aux limites non-linéaire (5.32) :

$$EI \left( \theta_1'' \eta + \theta_2'' \eta^2 + \dots \right) + \left( F_0 + F_1 \eta + F_2 \eta^2 + \dots \right) \sin\left( \theta_1 \eta + \theta_2 \eta^2 + \dots \right) = 0,$$

$$\theta_1(0) \eta + \theta_2(0) \eta^2 + \theta_3(0) \eta^3 + \dots = 0, \quad \theta_1(l)' \eta + \theta_2(l)' \eta^2 + \theta_3(l)' \eta^3 + \dots = 0,$$

et on résoud successivement les problèmes aux limites issues de la nullité du facteur des puissances successives du paramètre  $\eta$ . Le terme dominant est l'ordre 1 en  $\eta$ .

**Ordre 1.** On obtient le problème aux limites :

$$EI \theta_1''(x) + F_0 \theta_1(x) = 0,$$

$$\theta_1(0) = 0, \quad \theta_1'(l) = 0.$$

Comme attendu, il s'agit du problème aux limites fourni par la linéarisation au voisinage de l'état précontraint ( $\theta_0(x) \equiv 0, F_0$ ), et déjà étudié dans la section 5.1.5. La plus petite

valeur de  $F_0$  pour laquelle il admet une solution  $\theta_1(x)$  non-triviale est la charge critique d'Euler  $F_c = \pi^2 EI/4l^2$  et la fonction  $\theta_1(x)$  est alors donnée par le mode de bifurcation :

$$\theta_1(x) = C_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{l}\right),$$

où  $C_1$  désigne une constante multiplicative arbitraire. Cette constante arbitraire ne doit pas étonner. Une même courbe admet une infinité d'équations paramétriques, chacune associée à un choix particulier pour la paramétrisation. Ainsi les coefficients des développements formels (5.33) dépendront du choix fait pour le paramètre  $\eta$ . En particulier, on voit bien que le changement de paramétrisation  $\eta' = C\eta$  modifie tous les coefficients de ces développements formels. Cette simple remarque montre d'ailleurs que l'on peut faire impunément le choix  $C_1 = 1$  dans le résultat ci-dessus. Cela revient à préciser en partie le choix de la paramétrisation. Celui-ci restera encore à préciser puisque le changement de paramétrisation  $\eta' = f(\eta)$  où  $f$  est une fonction dont la dérivée en l'origine vaut 1 modifie seulement les coefficients des développements formels à l'ordre supérieur et est donc compatible avec le choix  $C_1 = 1$  précédemment effectué. Dans la suite, on retiendra :

$$\theta_1(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{l}\right), \quad (5.34)$$

**Ordre 2.** Il vient le problème aux limites :

$$\begin{aligned} EI \theta_2''(x) + F_c \theta_2(x) &= -F_1 \theta_1(x), \\ \theta_2(0) &= 0, \quad \theta_2'(l) = 0, \end{aligned}$$

où il est maintenant entendu que  $\theta_1(x)$  est donné par l'équation (5.34). Multipliant l'équation différentielle par une fonction arbitraire  $\theta^*$  et intégrant, on a :

$$EI \int_0^l \theta_2''(x) \theta^*(x) dx + F_c \int_0^l \theta_2(x) \theta^*(x) dx = -F_1 \int_0^l \theta_1(x) \theta^*(x) dx$$

Appliquant cette identité à la fonction auxiliaire :

$$\theta^*(x) = \theta_1(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{l}\right),$$

on constate en intégrant deux fois par partie la première intégrale, que le premier membre de l'égalité est nul. Comme l'intégrale du second membre est strictement positive, on aboutit à la nécessaire conclusion :

$$F_1 = 0,$$

qui entraîne :

$$\theta_2(x) = C_2 \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{l}\right),$$

où la constante réelle  $C_2$  demeure, pour l'instant, indéterminée. Comme pour l'ordre 1, cette indétermination provient de l'indétermination subsistant encore sur le choix du paramétrage. Revenant aux développements formels (5.33), on *décide* d'expliciter le lien entre  $\theta$  et  $\eta$  sous la forme :

$$\eta \int_0^l \theta_1^2(x) dx = \int_0^l \theta(x) \theta_1(x) dx. \quad (5.35)$$

La condition supplémentaire (5.35) fixe donc définitivement le choix du paramétrage. Elle est cohérente avec le choix  $C_1 = 1$  déjà effectué dans l'analyse au premier ordre, et impose désormais la condition suivante aux ordres supérieurs :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \int_0^l \theta_n(x) \theta_1(x) dx = 0. \quad (5.36)$$

Au deuxième ordre, la condition supplémentaire (5.35) requiert donc  $C_2 = 0$  et le terme d'ordre 2 dans le développement de  $\theta$  disparaît.

**Ordre 3.** Il vient le problème aux limites :

$$\begin{aligned} EI \theta_3''(x) + F_c \theta_3(x) &= \frac{F_c}{6} \theta_1^3(x) - F_2 \theta_1(x), \\ \theta_3(0) &= 0, \quad \theta_3'(l) = 0, \end{aligned}$$

Multipliant comme précédemment l'équation différentielle par la fonction  $\theta_1(x)$  et intégrant sur  $[0, l]$ , il vient :

$$F_2 \int_0^l \sin^2\left(\frac{\pi x}{2l}\right) dx = \frac{F_c}{6} \int_0^l \sin^4\left(\frac{\pi x}{2l}\right) dx,$$

qui donne :

$$F_2 = \frac{F_c}{8} = \frac{\pi^2 EI}{32l^2},$$

et la solution générale de l'équation différentielle s'exprime alors sous la forme :

$$\theta_3(x) = C_3 \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right) - \frac{1}{48} \sin^3\left(\frac{\pi x}{2l}\right),$$

où la constante réelle  $C_3$  demeure, pour l'instant, indéterminée. Sa valeur est fixée par le choix du paramétrage qui impose la condition supplémentaire (5.36), et donc :

$$\theta_3(x) = \frac{1}{64} \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right) - \frac{1}{48} \sin^3\left(\frac{\pi x}{2l}\right).$$

**Ordre 4.** Il vient le problème aux limites :

$$\begin{aligned} EI \theta_4''(x) + F_c \theta_4(x) &= -F_3 \theta_1(x), \\ \theta_4(0) &= 0, \quad \theta_4'(l) = 0, \end{aligned}$$

Multipliant à nouveau l'équation différentielle par la fonction  $\theta_1(x)$  et intégrant sur  $[0, l]$ , il vient :

$$F_3 = 0,$$

puis :

$$\theta_4(x) = C_4 \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right),$$

et la condition supplémentaire (5.36) montre alors que le terme d'ordre 4 dans le développement de  $\theta$  disparaît.

**Ordre 5.** Il vient le problème aux limites :

$$EI \theta_5''(x) + F_c \theta_5(x) = -F_c \left( \frac{\theta_1^5(x)}{120} - \frac{\theta_1^2(x) \theta_3(x)}{2} \right) + F_c \left( \frac{\theta_1^3(x)}{48} - \frac{\theta_3(x)}{8} \right) - F_4 \theta_1(x),$$

$$\theta_5(0) = 0, \quad \theta_5'(l) = 0.$$

La technique utilisée pour l'analyse de l'ordre 3 fournit ici :

$$F_4 = \frac{5F_c}{512},$$

et permettrait également de calculer  $\theta_5$ .

On voit ainsi se dégager l'algorithme permettant de calculer formellement les développements (5.33) à n'importe quel ordre. On constate qu'à chaque étape, on est amené à résoudre un problème aux limites *linéaire* dont le second membre est déterminé par les ordres inférieurs calculés aux étapes précédentes. Il apparaît, compte-tenu du choix du paramétrage  $\eta$  défini par la formule (5.35), que le développement de  $F$  sur la branche bifurquée ne contient que des puissances paires de  $\eta$  et que le développement de  $\theta$ , que des puissances impaires.

Rassemblant les résultats de l'analyse menée, on a ainsi obtenu :

$$F = F_c \left( 1 + \frac{\eta^2}{8} + \frac{5\eta^4}{512} + \dots \right),$$

$$\theta(x) = \eta \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right) + \eta^3 \left[ \frac{1}{64} \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right) - \frac{1}{48} \sin^3\left(\frac{\pi x}{2l}\right) \right] + \dots,$$

qui permet d'obtenir les deux premiers termes du développement formel des configurations fléchies de la branche bifurquée en terme de l'écart à la charge critique :

$$\theta(x) = 2\sqrt{2} \left( \frac{F - F_c}{F_c} \right)^{1/2} \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right) - \frac{\sqrt{2}}{24} \left( \frac{F - F_c}{F_c} \right)^{3/2} \left\{ 9 \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right) + 8 \sin^3\left(\frac{\pi x}{2l}\right) \right\}$$

$$+ \text{termes en } \left( \frac{F - F_c}{F_c} \right)^{5/2} + \dots$$

### 5.5.2 Cas général : la méthode de Lyapunov-Schmidt

Dans cette section, on introduit brièvement la généralisation de la technique d'analyse de bifurcation statique à l'ordre supérieur présentée dans le cas particulier du flambage d'Euler dans la section 5.5.1. Cette technique est connue sous le nom de méthode de Lyapunov-Schmidt.

Le contexte de travail est celui présenté à la section 5.3.1, dont on conserve les notations, du problème d'équilibre paramétré dans le cadre d'analyse non-linéaire DI-RF. On écrit ainsi formellement les équations d'équilibre non-linéaires sous la forme :

$$\mathcal{E}(\mathbb{D}, Q) = 0.$$

Considérant un équilibre donné  $(\mathbb{D}_0, Q_0)$ , on cherche à exprimer les équilibres  $(\mathbb{D}, Q)$  « voisins » de  $(\mathbb{D}_0, Q_0)$ , en terme de développement en séries de Taylor formelles :

$$\begin{aligned} Q &= Q_0 + Q_1 \eta + Q_2 \eta^2 + Q_3 \eta^3 + \dots, \\ \mathbb{D} &= \mathbb{D}_0 + \mathbb{D}_1 \eta + \mathbb{D}_2 \eta^2 + \mathbb{D}_3 \eta^3 + \dots. \end{aligned}$$

On écrira donc  $\mathcal{E}(\mathbb{D}, Q) = 0$ , et on supposera que les équations d'équilibre non-linéaires peuvent s'écrire au moins formellement en série de Taylor :

$$\mathcal{E}(\mathbb{D}, Q) = \sum_{i+j>0} \mathcal{E}_{ij} \cdot (\mathbb{D} - \mathbb{D}_0)^i (Q - Q_0)^j = 0. \quad (5.37)$$

Dans ce développement formel, le terme correspondant à  $(i, j) = (1, 0)$  qui s'écrit :

$$\mathcal{E}_{10} \cdot (\mathbb{D} - \mathbb{D}_0) = 0,$$

est homogène de degré 1 en  $\mathbb{D} - \mathbb{D}_0$ . Il s'agit donc des équations d'équilibre *linéarisées* au voisinage de l'état d'équilibre défini par  $(\mathbb{D}_0, Q_0)$ , dont l'expression exacte a été établie en toute généralité dans la section 5.2.3.

Dire que  $(\mathbb{D}_0, Q_0)$  est un point critique est alors équivalent (cf section 5.3.1) à dire que ces équations linéarisées autorisent un déplacement de l'équilibre, c'est-à-dire que l'opérateur linéaire  $\mathcal{E}_{10}$  est non-injectif :

$$\exists \delta \mathbb{D} \neq 0, \quad \mathcal{E}_{10} \cdot \delta \mathbb{D} = 0.$$

Ce contexte constitue le point de départ de la méthode de Lyapunov-Schmidt qui généralise l'analyse menée dans la section 5.5.1. Cette méthode permet aussi bien l'analyse à un ordre supérieur arbitraire des bifurcations que des points limites. Nous ne la développerons pas plus avant. Signalons juste qu'il existe également une méthode de Lyapunov-Schmidt permettant l'analyse à l'ordre supérieur des bifurcations de Hopf. On est alors amené à travailler avec un développement formel du type :

$$\mathbb{D}(t) = \mathbb{D}_0 + \mathbb{D}_1(t) \eta + \mathbb{D}_2(t) \eta^2 + \mathbb{D}_3(t) \eta^3 + \dots,$$

où les  $\mathbb{D}_i(t)$  sont des fonctions périodiques du temps, dont on peut chercher à identifier des développements en séries de Fourier.

## 5.6 Récapitulatif des formules essentielles

- Ensemble des équations gouvernant le mouvement d'une poutre naturelle élastique dans le cadre d'analyse linéarisé TIEP autour de l'état précontraint (exemple de condition à la limite purement cinématique imposée en l'extrémité amont et purement statique en l'extrémité aval) :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial S} (\underline{R} - \underline{R}_0), \frac{\partial}{\partial S} (\underline{M} - \underline{M}_0) + \underline{T} \wedge (\underline{R} - \underline{R}_0) + \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S} \wedge \underline{R}_0 \right] - \left( \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S} \cdot \underline{T} \right) \left[ \frac{d\underline{R}_0}{dS}, \frac{d\underline{M}_0}{dS} + \underline{T} \wedge \underline{R}_0 \right] + \mathcal{L}(\bar{\xi}, \underline{\theta}) = \left[ \bar{\rho} \ddot{\bar{\xi}}, \underline{I}^\rho \cdot \ddot{\underline{\theta}} \right],$$

$$\begin{pmatrix} \underline{R} - \underline{R}_0 \\ \underline{M} - \underline{M}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{\theta} \wedge \underline{R}_0 \\ \underline{\theta} \wedge \underline{M}_0 \end{pmatrix} + \underline{A} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S} + \underline{T} \wedge \underline{\theta} \\ \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial S} \end{pmatrix},$$

$$\{\bar{\xi}(0), \underline{\theta}(0)\} = \{\underline{0}, \underline{0}\}, \quad \left[ (\underline{R} - \underline{R}_0)(L), (\underline{M} - \underline{M}_0)(L) \right] = \mathcal{L}_L(\bar{\xi}, \underline{\theta}).$$

- Ensemble des équations gouvernant le mouvement d'une poutre élastique obéissant à la loi de comportement standard dans le cadre d'analyse linéarisé TIEP (exemple de condition à la limite purement cinématique imposée en l'extrémité amont et purement statique en l'extrémité aval) :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial S} (\underline{R} - \underline{R}_0), \frac{\partial}{\partial S} (\underline{M} - \underline{M}_0) + \underline{T} \wedge (\underline{R} - \underline{R}_0) + \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S} \wedge \underline{R}_0 \right] - \left( \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S} \cdot \underline{T} \right) \left[ \frac{d\underline{R}_0}{dS}, \frac{d\underline{M}_0}{dS} + \underline{T} \wedge \underline{R}_0 \right] + \mathcal{L}(\bar{\xi}, \underline{\theta}) = \left[ \bar{\rho} \ddot{\bar{\xi}}, \underline{I}^\rho \cdot \ddot{\underline{\theta}} \right],$$

$$(\underline{R} - \underline{R}_0)_T = (\underline{\theta} \wedge \underline{R}_0) \cdot \underline{T} + E|\mathcal{S}| \underline{T} \cdot \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S},$$

$$\underline{\theta}_\perp = \underline{T} \wedge \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial S},$$

$$(\underline{M} - \underline{M}_0)_T = (\underline{\theta} \wedge \underline{M}_0) \cdot \underline{T} + \mu J \underline{T} \cdot \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial S},$$

$$(\underline{M} - \underline{M}_0)_\perp = (\underline{\theta} \wedge \underline{M}_0)_\perp + E \underline{I} \cdot \left( \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial S} \right)_\perp,$$

$$\{\bar{\xi}(0), \underline{\theta}(0)\} = \{\underline{0}, \underline{0}\}, \quad \left[ (\underline{R} - \underline{R}_0)(L), (\underline{M} - \underline{M}_0)(L) \right] = \mathcal{L}_L(\bar{\xi}, \underline{\theta}).$$



- Ensemble des équations gouvernant le mouvement d'une poutre élastique obéissant à la loi de comportement standard inextensible dans le cadre d'analyse linéarisé TIEP (exemple de condition à la limite purement cinématique imposée en l'extrémité amont et purement statique en l'extrémité aval) :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial S} (\underline{R} - \underline{R}_0), \frac{\partial}{\partial S} (\underline{M} - \underline{M}_0) + \underline{T} \wedge (\underline{R} - \underline{R}_0) + \frac{\partial \bar{\underline{\xi}}}{\partial S} \wedge \underline{R}_0 \right] + \mathcal{L}(\bar{\underline{\xi}}, \underline{\theta}) = \left[ \bar{\rho} \ddot{\underline{\xi}}, \underline{I}^\rho \cdot \ddot{\underline{\theta}} \right],$$

$$\frac{\partial \bar{\underline{\xi}}}{\partial S} + \underline{T} \wedge \underline{\theta} = \underline{0}, \quad (\underline{M} - \underline{M}_0)_T = (\underline{\theta} \wedge \underline{M}_0) \cdot \underline{T} + \mu J \underline{T} \cdot \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial S},$$

$$(\underline{M} - \underline{M}_0)_\perp = (\underline{\theta} \wedge \underline{M}_0)_\perp + EI \cdot \left( \frac{\partial \underline{\theta}}{\partial S} \right)_\perp,$$

$$\left\{ \bar{\underline{\xi}}(0), \underline{\theta}(0) \right\} = \left\{ \underline{0}, \underline{0} \right\}, \quad \left[ (\underline{R} - \underline{R}_0)(L), (\underline{M} - \underline{M}_0)(L) \right] = \mathcal{L}_L(\bar{\underline{\xi}}, \underline{\theta}).$$

## 5.7 Exercices

**Exercice 1. Équilibres de poutre en rotation finie.** On considère la poutre cylindrique encastrée, rectiligne dans sa configuration initiale supposée naturelle et obéissant à la loi de comportement standard inextensible, déjà considérée dans la section 5.1. Parmi les configurations (planes) représentées sur la figure 5.19, indiquer celles qui correspondent à des équilibres (en rotation finie) et celles qui ne peuvent être des équilibres, sous l'action de la force exercée par la masse pesante à l'extrémité non-encastrée.

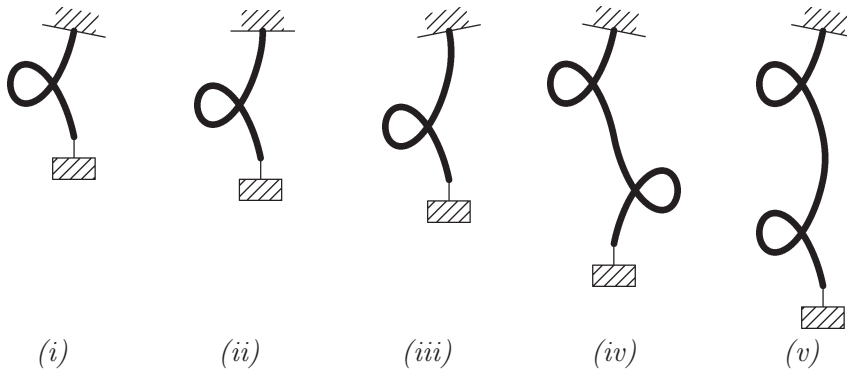
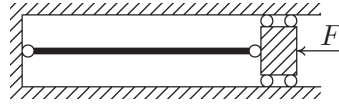


FIG. 5.19 – Diverses configurations de poutre.

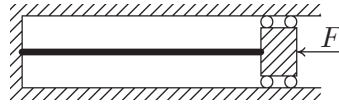
**Éléments de réponses.** On traduit ces diverses configurations en terme de mouvements du pendule simple, soumis seulement à la pesanteur, dont l'existence est commodément analysée en terme de l'intégrale première et du portrait de phase que l'on en déduit. L'encastrement correspond à la configuration initiale imposée, tandis que le moment nul à l'autre extrémité correspond à la vitesse finale qui doit s'annuler.

- (i) Cela correspond à un mouvement du pendule simple à partir d'une configuration légèrement inclinée par rapport à la « position haute », dans laquelle il serait au repos. Le pendule passe alors avec une vitesse maximale dans la « position basse », pour arriver à vitesse nulle dans la configuration symétrique de la configuration initiale par rapport à la verticale. Un tel mouvement existe et la configuration (i) correspond effectivement à un équilibre.
- (ii) Il s'agit ici du mouvement du pendule simple à partir de la « configuration haute ». Si la vitesse initiale est nulle, l'unique solution fournie par la dynamique est l'immobilité. Si la vitesse initiale est non nulle, le pendule ne s'arrête plus jamais. Il en résulte que la configuration (ii) n'est pas une configuration d'équilibre possible.
- (iii) Cela correspond au mouvement d'un pendule simple qui passerait par la « configuration haute » au cours de son mouvement et arriverait à l'immobilité en temps fini. Un tel mouvement est impossible et la configuration (iii) n'est pas une configuration d'équilibre possible.
- (iv) Le pendule simple part de la même configuration initiale qu'en (i), passe avec une vitesse maximale dans la « position basse », arrive à vitesse nulle dans la configuration symétrique de la configuration initiale par rapport à la verticale, repasse dans la « position basse » avec une vitesse égale à l'opposé de la vitesse maximale, pour s'arrêter enfin dans la configuration initiale à vitesse nulle. Un tel mouvement existe et la configuration (iv) correspond effectivement à un équilibre.
- (v) Il s'agit du mouvement d'un pendule simple qui effectuerait plus d'un tour complet avant de s'immobiliser en temps fini. Un tel mouvement est impossible et la configuration (v) n'est pas une configuration d'équilibre possible.

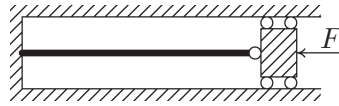
**Exercice 2. Influence des conditions aux limites sur le flambage d'Euler.** On considère une poutre cylindrique de révolution, rectiligne dans sa configuration initiale supposée naturelle et obéissant à la loi de comportement standard inextensible. On note  $l$  sa longueur,  $I$  le moment principal d'inertie géométrique commun à toutes les sections et  $E$  le module d'Young du matériau constitutif. On considère les trois problèmes de bifurcation représentés sur la figure 5.20. Calculer les charges critiques d'Euler de chacun de ces problèmes de bifurcations, ainsi que les modes de bifurcation associés. Commenter.



Problème 1.



Problème 2.



Problème 3.

FIG. 5.20 – Description des trois problèmes de bifurcation.

**Éléments de réponses.** L'analyse est menée en considérant les états précontraints définis par la configuration rectiligne indéformée associée à l'état de contrainte homogène :

$$[\underline{R}_0, \underline{M}_0] = [-F\underline{e}_x, \underline{0}],$$

où  $\underline{e}_x$  est le vecteur unitaire défini par la direction de cette configuration. On est alors amené à rechercher la possibilité d'éventuel déplacement de l'équilibre autorisé par l'ensemble des équations régissant l'équilibre, linéarisées sous l'hypothèse de la transformation infinitésimale à partir de l'état précontraint (cadre d'analyse TIEP). Ces équations découplant les deux composantes transversales  $\bar{\xi}_y$  et  $\bar{\xi}_z$  du déplacement de la ligne moyenne, on pourra se borner à ne considérer que les équations qui ne font intervenir qu'une seule de ces composantes, par exemple  $\bar{\xi}_y$ .

- **Problème 1.** L'ensemble des équations régissant les équilibres plans dans le cadre d'analyse TIEP s'écrit aisément à partir du récapitulatif de la page 135, en remarquant que les conditions de chargement sont du type « charge morte » :

$$\begin{aligned} \frac{dR_x}{dx} = \frac{dR_y}{dx} = 0, & \quad \bar{\xi}_x(0) = 0, \\ \frac{dM_z}{dx} + R_y + F\theta = 0, & \quad R_x(l) = -F, \\ \theta = \frac{d\bar{\xi}_y}{dx}, & \quad M_z(0) = M_z(l) = 0, \\ M_z = EI \frac{d\theta}{dx}, & \quad \bar{\xi}_y(0) = \bar{\xi}_y(l) = 0. \end{aligned}$$

Compte-tenu de la liaison de Navier-Bernoulli,  $\theta$  peut être systématiquement éliminé au profit du déplacement transversal  $\bar{\xi}_y$  de la fibre moyenne. Les équations qui en résultent se réduisent au problème aux limites :

$$EI \frac{d^4 \bar{\xi}_y}{dx^4} + F \frac{d^2 \bar{\xi}_y}{dx^2} = 0,$$

$$\bar{\xi}_y(0) = \bar{\xi}_y(l) = \frac{d^2}{dx^2} \bar{\xi}_y(0) = \frac{d^2}{dx^2} \bar{\xi}_y(l) = 0.$$

qui gouverne donc un éventuel déplacement de l'équilibre sous l'hypothèse de la transformation infinitésimale à partir de l'état précontraint. Toute solution de l'équation différentielle satisfaisant les conditions à la limite  $x = 0$  s'écrit :

$$\bar{\xi}_y(x) = Ax + B \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right),$$

Il en résulte alors facilement que le système admet une solution non triviale si et seulement si :

$$F = (n+1)^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \quad (n \in \mathbb{N}),$$

de sorte que la charge critique d'Euler pour ce nouveau problème :

$$F_c^{\textcircled{1}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2},$$

diffère de celle obtenue à la section 5.1 d'un facteur 4. Le mode de bifurcation associé est donné par :

$$\bar{\xi}_y^{\textcircled{1}}(x) = C \sin \frac{\pi x}{l}.$$

- **Problème 2.** Le système des équations du cadre d'analyse TIEP est le même que pour le problème 1 à la condition de remplacer les conditions aux limites :

$$M_z(0) = M_z(l) = 0,$$

du problème 1 par :

$$\theta(0) = \theta(l) = 0,$$

et le problème aux limites résultant de la linéarisation de ces équations autour de l'état précontraint est :

$$EI \frac{d^4 \bar{\xi}_y}{dx^4} + F \frac{d^2 \bar{\xi}_y}{dx^2} = 0,$$

$$\bar{\xi}_y(0) = \bar{\xi}_y(l) = \frac{d}{dx} \bar{\xi}_y(0) = \frac{d}{dx} \bar{\xi}_y(l) = 0.$$

Toute solution de l'équation différentielle satisfaisant les conditions à la limite  $x = 0$  s'écrit :

$$\bar{\xi}_y(x) = A \left[ 1 - \cos\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right) \right] + B \left[ \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} x\right) - \sqrt{\frac{F}{EI}} x \right].$$

Le système admet alors une solution non identiquement nulle si et seulement si le déterminant du système linéaire en  $(A, B)$ , issu de la condition à la limite  $x = l$  est nul :

$$\left[ \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} \frac{l}{2}\right) - \left(\sqrt{\frac{F}{EI}} \frac{l}{2}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} \frac{l}{2}\right) \right] \sin\left(\sqrt{\frac{F}{EI}} \frac{l}{2}\right) = 0.$$

La plus petite valeur de  $F$  qui annule cette expression, annule en fait le facteur en sinus, de sorte que la charge critique d'Euler pour ce nouveau problème est :

$$F_c^{(2)} = \frac{4\pi^2 EI}{l^2},$$

et le mode de bifurcation associé est :

$$\bar{\xi}_y^{(2)}(x) = C \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{l} \right).$$

- **Problème 3.** Le nouveau problème aux limites résultant de la linéarisation des équations d'équilibre autour de l'état précontraint est :

$$EI \frac{d^4 \bar{\xi}_y}{dx^4} + F \frac{d^2 \bar{\xi}_y}{dx^2} = 0,$$

$$\bar{\xi}_y(0) = \bar{\xi}_y(l) = \frac{d}{dx} \bar{\xi}_y(0) = \frac{d^2}{dx^2} \bar{\xi}_y(l) = 0.$$

Comme précédemment, toute solution de l'équation différentielle satisfaisant les conditions à la limite  $x = 0$  s'écrit :

$$\bar{\xi}_y(x) = A \left[ 1 - \cos \left( \sqrt{\frac{F}{EI}} x \right) \right] + B \left[ \sin \left( \sqrt{\frac{F}{EI}} x \right) - \sqrt{\frac{F}{EI}} x \right].$$

Le système admet alors une solution non identiquement nulle si et seulement si le déterminant du système linéaire en  $(A, B)$ , issu de la condition à la limite  $x = l$  est nul :

$$\sin \left( \sqrt{\frac{F}{EI}} l \right) - \left( \sqrt{\frac{F}{EI}} l \right) \cos \left( \sqrt{\frac{F}{EI}} l \right) = 0.$$

La charge critique d'Euler est alors :

$$F_c^{(3)} = \frac{\beta^2 EI}{l^2},$$

où  $\beta$  désigne l'unique solution dans l'intervalle  $]\pi, 3\pi/2[$  de l'équation  $\tan x = x$  et le mode de bifurcation associé est :

$$\bar{\xi}_y^{(3)}(x) = C \left[ \sin \frac{\beta x}{l} + \beta \left( 1 - \frac{x}{l} \right) - \beta \cos \frac{\beta x}{l} \right].$$

On obtient ainsi les inégalités :

$$F_c^{(1)} < F_c^{(3)} < F_c^{(2)},$$

qui s'interprètent comme le fait que l'imposition de liaisons cinématiques supplémentaires augmente la charge critique d'Euler.

**Exercice 3. Influence du relachement de la liaison interne d'inextensibilité sur la charge critique d'Euler.** Reprendre le premier problème de bifurcation de l'exercice 2 en supposant que la poutre obéit à la loi de comportement standard au lieu de la loi de comportement standard inextensible. Discuter l'influence du relachement de la liaison interne d'inextensibilité sur la charge critique d'Euler.

**Éléments de réponses.** L'analyse est menée en considérant la configuration précontrainte définie par la configuration rectiligne (dirigée par  $\underline{e}_x$  unitaire et de longueur  $L = L_0(1 - F/E|\mathcal{S}|)$ ) associée à l'état de contrainte homogène :

$$[\underline{R}_0, \underline{M}_0] = [-F\underline{e}_x, \underline{0}].$$

L'ensemble des équations régissant les équilibres plans dans le cadre d'analyse TIEP s'écrit aisément à partir du récapitulatif de la page 134, en remarquant que les conditions de chargement sont du type « charge morte » :

$$\begin{aligned} \frac{dR_x}{dx} = \frac{dR_y}{dx} = 0, & \quad \bar{\xi}_x(0) = 0, \\ \frac{dM_z}{dx} + R_y + F\theta = 0, & \quad R_x(l) = -F, \\ \theta = \frac{d\bar{\xi}_y}{dx}, & \quad M_z(0) = M_z(l) = 0, \\ M_z = EI \frac{d\theta}{dx}, & \quad \bar{\xi}_y(0) = \bar{\xi}_y(l) = 0, \\ R_x + F = E|\mathcal{S}| \frac{d\bar{\xi}_x}{dx}. \end{aligned}$$

Éliminant  $\theta$  au profit du déplacement transversal  $\bar{\xi}_y$  de la fibre moyenne, on obtient le problème aux limites :

$$\begin{aligned} EI \frac{d^4 \bar{\xi}_y}{dx^4} + F \frac{d^2 \bar{\xi}_y}{dx^2} = 0, \\ \bar{\xi}_y(0) = \bar{\xi}_y(l) = \frac{d^2 \bar{\xi}_y}{dx^2}(0) = \frac{d^2 \bar{\xi}_y}{dx^2}(l) = 0, \end{aligned}$$

qui gouverne donc un éventuel déplacement de l'équilibre sous l'hypothèse de la transformation infinitésimale à partir de l'état précontraint. La charge critique d'Euler  $F_c$  est donc donnée par l'équation :

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2 EI}{L_0^2 [1 - F_c/(E|\mathcal{S}|)]^2}.$$

Or, les équations du cadre d'analyse TIEP récapitulées à la page 134, ont été obtenues sous l'hypothèse de la déformation infinitésimale entre configurations naturelle et précontrainte :

$$\left| \frac{dS}{dS_0} - 1 \right| = \left| \frac{F}{E|\mathcal{S}|} \right| \ll 1,$$

qui a notamment permis de confondre les modules d'élasticité de la poutre dans les deux configurations (cf page 106). En particulier, les quantités  $EI$  et  $EI dS/dS_0$  sont indiscernables à l'approximation consentie (linéarisation de la loi de comportement sous l'hypothèse des petites déformations). Constatons d'ailleurs que cela revient à affirmer que le calcul du moment principal d'inertie géométrique peut être conduit indifféremment à partir de la connaissance de la géométrie des sections dans la configuration naturelle ou dans la configuration précontrainte. Au final, on *doit* confondre la charge critique d'Euler avec la valeur :

$$F_c \simeq \frac{\pi^2 EI}{L_0^2},$$

et l'on voit que la correction à la charge critique d'Euler résultant de la prise en compte d'une raideur en extension finie est négligeable, dans le cadre des hypothèses où l'analyse est menée.

**Exercice 4. Compétition entre flambage global et flambage local dans un treillis élancé périodique.** On considère le treillis isostatique périodique dont la géométrie de la configuration de référence supposée dénuée de contrainte, est représentée sur la figure 5.21. Chacune des poutres constitutives est issue de la considération d'un cylindre élancé consti-

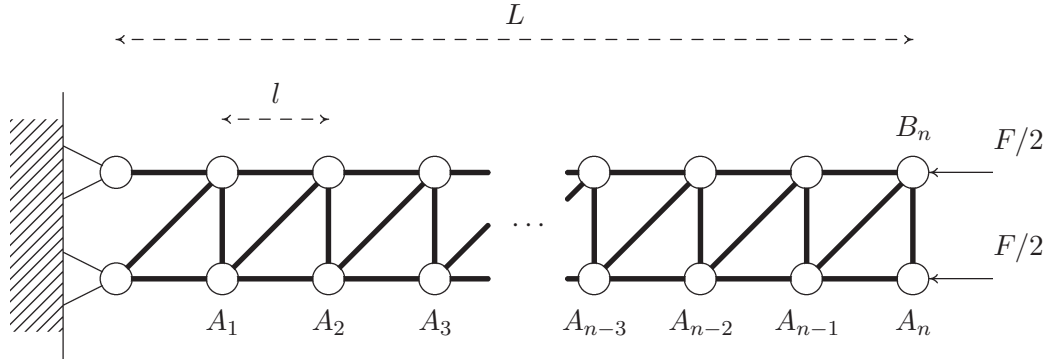


FIG. 5.21 – Flambage d'un treillis élancé de barres.

tué du même matériau élastique homogène isotrope de module d'Young  $E$ . L'aire de toutes les sections est notée  $|\mathcal{S}|$  et on supposera la direction orthogonale à la figure, direction principale d'inertie géométrique, de moment  $I$ , pour toutes les sections. Chacune des poutres constitutives du treillis sera supposée obéir à la loi comportement standard. Dans l'exercice 2 du chapitre 4, on trouvera une démonstration du fait que, dans le cadre linéarisé TIEN (transformation infinitésimale à partir de l'état naturel), le treillis se comporte asymptotiquement, à la limite de l'élancement infini, comme une poutre de Navier-Bernoulli inextensible de raideur en flexion  $E|\mathcal{S}|l^2/2$ . On admettra que ce résultat est encore vrai dans le cadre d'analyse « déformations infinitésimales—rotations finies ». Le chargement consistant en les seules deux forces extérieures identiques appliquées sur les rotules  $A_n$  et  $B_n$  et de direction invariablement « horizontale », représentées sur la figure 5.21, on voit que deux modes de flambage peuvent entrer en compétition : le flambage d'Euler d'une poutre constitutive (flambage local), d'une part, et le flambage d'Euler de l'ensemble de la structure puisque celle-ci se comporte asymptotiquement comme une poutre de Navier-Bernoulli quand l'élancement est assez grand. *Discuter la compétition entre ces deux modes de flambage en fonction de l'élancement.*

**Éléments de réponses.** La structure étant isostatique, on voit que la distribution des efforts intérieurs en tout équilibre de la courbe fondamentale consiste en une tension homogène, égale à  $-F/2$  dans toutes les poutres « horizontales », les autres poutres étant libres de contraintes. Les résultats de la section 5.1.6 complétés par l'exercice 3, fournissent alors la valeur critique de  $F$  vis-à-vis du flambage local :

$$F_{\text{loc}} = \frac{2\pi^2 EI}{l^2}.$$

La valeur critique de  $F$  vis-à-vis du flambage global découle des résultats de la section 5.1 :

$$F_{\text{glob}} = \frac{\pi^2 E|\mathcal{S}|l^2}{8L^2}.$$

Le rapport entre ces deux valeurs critiques est donc :

$$\frac{F_{\text{loc}}}{F_{\text{glob}}} = 16 \frac{I}{|\mathcal{S}|l^2} \frac{L^2}{l^2},$$

où le premier quotient est du même ordre que l'inverse du carré de l'élanement de chacune des poutres « horizontales », tandis que le deuxième quotient est exactement le carré de l'élanement du treillis. On en tire les conclusions suivantes :

- Si le treillis périodique a un élanement beaucoup plus grand que l'élanement de chacune des poutres constitutives, il faudra s'attendre à observer plutôt un mode de flambage global : flexion de l'ensemble du treillis.
- En revanche, si le treillis, tout en étant suffisamment élané pour justifier son analyse en terme de théorie des poutres, a un élanement beaucoup plus petit que chacune des poutres constitutives, il faudra s'attendre à un mode de flambage local : flexion d'une (ou plusieurs) poutre constitutive.

L'analyse a été menée en privilégiant un mode de flambage local : celui associé au flambage d'Euler des poutres « horizontales ». En toute rigueur, il faudrait aussi examiner les modes associés au flambage d'autres poutres, en particulier des poutres « diagonales ». On constaterait cependant que la charge critique correspondante est plus élevée que celle associée au flambage des poutres « horizontales ».

**Exercice 5. Flambage sous chargement combiné de traction-torsion.** Il est un fait d'expérience courante qu'un « élastique » de cuisine sollicité simultanément en traction et en torsion puisse abandonner spontanément sa configuration d'équilibre rectiligne. L'objectif de cet exercice est l'analyse de cette expérience dans le cadre de la théorie des poutres.

On considère un cylindre (qui n'est pas nécessairement de révolution) constitué d'un matériau élastique homogène et isotrope (du point de vue du comportement tridimensionnel). On notera  $E$  et  $\nu$  son module d'Young et son coefficient de Poisson, ainsi que  $\mu = E/(2(1 + \nu))$ , son module de cisaillement. Ce cylindre sera supposé suffisamment élané pour qu'il puisse être modélisé comme une poutre élastique qui sera donc supposée obéir à la loi de comportement standard inextensible, c'est-à-dire qu'elle respecte les liaisons internes d'inextensibilité et de Navier-Bernoulli ainsi que la relation :

$$\underline{\mathcal{M}} = \mu J W_T \underline{T} + EI W_{\perp},$$

où  $J$  désigne l'inertie de torsion de la section droite et où il est supposé que le tenseur  $\underline{\underline{I}} = I \underline{\underline{1}}_2$  d'inertie géométrique de la section droite se réduit à une homothétie dans le plan de la section. Dans la configuration initiale, supposée dénuée de contrainte et prise comme référence, la ligne moyenne occupe un segment de longueur notée  $l$  et dirigé suivant  $\underline{e}_x$ . L'espace sera rapporté au repérage  $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$  cartésien orthonormé dont l'origine est placée en l'extrémité amont de la ligne moyenne. L'extrémité amont de la poutre est fixée à un support invariablement immobile à l'aide d'un dispositif de type « cardan<sup>4</sup> ». Un tel dispositif empêche tout déplacement de l'extrémité amont de la ligne moyenne et impose que l'axe de la rotation de la section qui lui est attachée, soit orthogonal à  $\underline{e}_x$ . L'amplitude de la rotation, ainsi que la direction de son axe dans le plan  $(\underline{e}_y, \underline{e}_z)$  sont laissés totalement libres par le dispositif. L'extrémité aval de la poutre est fixée, au moyen du même dispositif de « cardan » à un support libre de se mouvoir dans la direction  $\underline{e}_x$ , mais dont tout déplacement

<sup>4</sup>chaque roue avant d'une automobile est fixée au train avant au moyen d'un tel dispositif de cardan (cas des tractions avant).



dans le plan  $(\underline{e}_y, \underline{e}_z)$  est bloqué. Ici encore, l'amplitude de la rotation de la section, ainsi que la direction de son axe dans le plan  $(\underline{e}_y, \underline{e}_z)$  sont laissées totalement libres par le dispositif. Le support conserve la possibilité de subir une rotation autour de l'axe  $Ox$ .

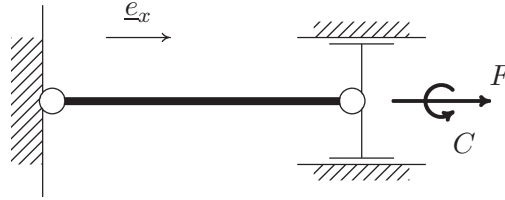


FIG. 5.22 – Poutre rectiligne sollicitée en traction-torsion.

La poutre étant supposée libre de toute densité linéique d'effort extérieur (pesanteur négligée), on exerce sur le support fixé à l'extrémité aval une force axiale  $F \underline{e}_x$  de direction invariable, ainsi qu'un couple de torsion  $C \underline{e}_x$ , lui aussi de direction invariable (charge morte).

- 1) Écrire l'ensemble des équations et conditions à la limite gouvernant l'équilibre de cette poutre dans le cadre d'analyse linéarisé TIEN. Décrire la configuration (ligne moyenne et rotation des sections) d'équilibre adoptée par le système dans ce cadre d'analyse linéarisé. Expliciter l'hypothèse de la transformation infinitésimale en terme des données du problème d'équilibre considéré, en vue de quantifier le cadre de validité de cette analyse linéarisée.
- 2) Exhiber une solution des équations de l'équilibre du cadre non-linéaire DI-RF, sur la base d'une configuration d'équilibre rectiligne et d'une répartition de contrainte généralisée homogène. Expliciter l'hypothèse de la déformation infinitésimale en terme des données du problème d'équilibre considéré, en vue de quantifier le cadre de validité de cette analyse. Comparer avec le cadre de validité de l'analyse linéarisée TIEN.
- 3) Écrire l'ensemble des équations et conditions à la limite gouvernant un éventuel déplacement de l'équilibre à partir d'une des configurations précontraintes décrites à la question précédente, dans le cadre d'analyse linéarisé TIEP. En déduire qu'un déplacement de l'équilibre est possible si et seulement s'il existe une solution non triviale  $(\bar{\xi}_y(x), \bar{\xi}_z(x)) \neq (0, 0)$  au système différentiel :

$$\begin{aligned}
 EI \frac{d^2 \bar{\xi}_y}{dx^2} + C \frac{d \bar{\xi}_z}{dx} - F \bar{\xi}_y &= 0, \\
 EI \frac{d^2 \bar{\xi}_z}{dx^2} - C \frac{d \bar{\xi}_y}{dx} - F \bar{\xi}_z &= 0, \\
 \bar{\xi}_y(0) = \bar{\xi}_y(l) = \bar{\xi}_z(0) = \bar{\xi}_z(l) &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

- 4) Vérifier que la solution générale du système différentiel constitué des deux premières équations de (5.38) s'écrit, en général :

$$\begin{aligned}
 \bar{\xi}_y(x) &= A \sin(m_1 x + \phi_1) + B \sin(m_2 x + \phi_2), \\
 \bar{\xi}_z(x) &= A \cos(m_1 x + \phi_1) + B \cos(m_2 x + \phi_2),
 \end{aligned}$$

où  $m_1$  et  $m_2$  sont les deux racines (éventuellement complexes) d'une équation du second degré que l'on déterminera. Ce résultat est cependant à amender pour certaines valeurs du couple  $(F, C)$  que l'on précisera pour lesquelles les deux racines de cette équation du second degré sont confondues en une même valeur  $m_0$ . Vérifier alors, dans cette circonstance particulière, que la solution générale du système différentiel s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_y(x) &= Ax \sin(m_0x + \phi_1) + B \sin(m_0x + \phi_2), \\ \bar{\xi}_z(x) &= Ax \cos(m_0x + \phi_1) + B \cos(m_0x + \phi_2).\end{aligned}$$

5) Déterminer l'ensemble des valeurs critiques du couple  $(F, C)$ . Quelles sont les valeurs correspondant à la première bifurcation, lorsque l'on parcourt des demi-droites partant de l'origine dans le plan  $(F, C)$ . Expliciter le mode de bifurcation correspondant. À quoi correspond la situation  $C = 0$ ? Le flambage peut-il avoir lieu sous le seul effet du couple de torsion (cas  $F = 0$ )? Que peut-on dire de l'effet d'une force axiale sur la valeur critique du couple de torsion?

6) L'exemple de chargement considéré dans cet exercice permet d'illustrer l'assertion suivante de la page 113 : « en théorie des poutres, les charges mortes ne sont pas forcément conservatives ». On considère une variation de configuration arbitraire paramétrée par le temps  $t$ . Par définition, le travail d'un effort extérieur imposé est l'intégrale sur le temps de la puissance dissipée par cet effort. Un effort extérieur imposé est dit conservatif si son travail dans n'importe quel mouvement du système ne dépend que des configurations initiale et finale. Montrer que la force axiale  $F \underline{e}_x$ , exercée en charge morte, est conservative, puis que le couple de torsion  $C \underline{e}_x$ , exercé en charge morte, n'est pas conservatif.

#### Éléments de réponses.

1) L'ensemble des équations gouvernant l'équilibre dans le cadre linéarisé TIEN s'écrit aisément à partir du récapitulatif de la page 69.

- Équations d'équilibre.

$$\begin{aligned}\frac{d\underline{R}(x)}{dx} &= \underline{0}, & \frac{d\underline{M}(x)}{dx} + \underline{e}_x \wedge \underline{R}(x) &= \underline{0}, \\ M_y(0) = M_z(0) &= M_y(l) = M_z(l) = 0, \\ R_x(l) = F, & & M_x(l) &= C.\end{aligned}$$

- Loi de comportement standard inextensible.

$$\begin{aligned}\frac{d\underline{\xi}(x)}{dx} + \underline{e}_x \wedge \underline{\theta}(x) &= \underline{0}, \\ \underline{M}(x) &= \mu J \frac{d\underline{\theta}_x(x)}{dx} \underline{e}_x + EI \frac{d\underline{\theta}_\perp(x)}{dx}.\end{aligned}$$

- Conditions aux limites cinématiques.

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_x(0) = \bar{\xi}_y(0) = \bar{\xi}_z(0) &= 0, & \theta_x(0) &= 0, \\ \bar{\xi}_y(l) = \bar{\xi}_z(l) &= 0.\end{aligned}$$

La première équation d'équilibre montre que  $\underline{R}(x)$  est constant. De la deuxième équation d'équilibre, on déduit d'abord que les fonctions  $M_y(x)$  et  $M_z(x)$  sont affines. Comme elles sont nulles aux

extrémités, elles sont identiquement nulles. Revenant alors à la deuxième équation, on en déduit la nullité des deux fonctions  $R_y(x)$  et  $R_z(x)$ . Comme  $M_x(x)$  est constant, en vertu de la deuxième équation, on constate que la seule répartition de contrainte généralisée statiquement admissible est :

$$[\underline{R}(x), \underline{M}(x)] = [F \underline{e}_x, C \underline{e}_x],$$

et le problème d'équilibre considéré est donc isostatique.

La loi de comportement standard montre alors que les fonctions  $\theta_y(x)$  et  $\theta_z(x)$  sont constantes. De la liaison interne de Navier-Bernoulli, on déduit alors que les fonctions  $\bar{\xi}_y(x)$  et  $\bar{\xi}_z(x)$  sont affines. Comme elles s'annulent en  $x = 0, l$ , elles sont identiquement nulles. Il en est de même pour  $\bar{\xi}_x(x)$ . Revenant à la loi de comportement standard, on voit que la fonction  $\theta_x(x)$  a sa dérivée égale à la constante  $C/(\mu J)$ , et comme elle est nulle en  $x = 0$ , elle est linéaire. Au final, on a montré :

$$\{\bar{\xi}(x), \underline{\theta}(x)\} = \left\{ \underline{0}, \frac{Cx}{\mu J} \underline{e}_x \right\}.$$

La ligne moyenne reste rectiligne indéformée et chaque section subit une rotation infinitésimale autour d'elle, d'angle proportionnel à l'abscisse  $x$  de la section en question.

L'hypothèse de la transformation infinitésimale :

$$\left| \frac{d\bar{\xi}}{dx} \right| \ll 1, \quad |\underline{\theta}| \ll 1,$$

se réduit ici à la deuxième condition qui s'explique en :

$$|C| \ll \frac{\mu J}{l}. \quad (5.39)$$

**2)** Considérons une configuration rectiligne telle que la rotation  $\underline{R}(x)$  soit une rotation d'angle  $\theta(x)$  autour de  $\underline{e}_x$ , et dans laquelle règne l'état de contrainte généralisée :

$$[\underline{R}(x), \underline{M}(x)] = [F \underline{e}_x, C \underline{e}_x].$$

Du fait de la liaison interne d'inextensibilité,  $x$  est aussi l'abscisse curviligne sur la configuration actuelle, et l'on voit que ce champ de contrainte est en équilibre avec tous les efforts extérieurs imposés au système :

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{R}(x)}{dx} &= \underline{0}, & \frac{d\underline{M}(x)}{dx} + \underline{e}_x \wedge \underline{R}(x) &= \underline{0}, \\ M_y(0) = M_z(0) = M_y(l) = M_z(l) &= 0, \\ R_x(l) = F, & & M_x(l) &= C. \end{aligned}$$

Calculons maintenant la déformation lagrangienne  $(\underline{E}, \underline{W})$  entre configurations initiale et actuelle. Il est d'abord immédiat de constater que la triple liaison interne d'inextensibilité et de Navier-Bernoulli  $\underline{E} \equiv \underline{0}$  est acquise, et un calcul élémentaire donne :

$$\underline{W} = {}^t \underline{R} \cdot \frac{d\underline{R}}{dx} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta \theta' & -\cos \theta \theta' \\ 0 & \cos \theta \theta' & -\sin \theta \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta' \\ 0 & \theta' & 0 \end{pmatrix},$$

dont on déduit :

$$\underline{W} = \frac{d\theta(x)}{dx} \underline{e}_x.$$

On voit alors que la loi de comportement :

$$\underline{\mathcal{M}} = {}^t \underline{R} \cdot \underline{M} = \mu J W_T \underline{T} + EI \underline{W}_\perp,$$

se réduit ici à :

$$M_x(x) = \mu J \frac{d\theta(x)}{dx},$$

qui permet de satisfaire les conditions aux limites cinématiques qui se réduisent ici à  $\theta(0) = 0$ , si et seulement si :

$$\theta(x) = \frac{Cx}{\mu J}.$$

L'hypothèse de la déformation infinitésimale :

$$|\underline{E}| \ll 1, \quad d|\underline{W}| \ll 1,$$

( $d$  diamètre de la section), se réduit ici à :

$$d \left| \frac{d\theta(x)}{dx} \right| \ll 1,$$

soit :

$$|C| \ll \frac{\mu J}{d}.$$

Cette quantification de l'hypothèse de la déformation infinitésimale du cadre DI-RF est à rapprocher de la quantification (5.39) beaucoup plus restrictive puisque le rapport entre les bornes n'est autre que l'élanement  $e = l/d$ . L'hypothèse de la transformation infinitésimale exige que la rotation de la section aval par rapport à la section amont reste très petite. C'est évidemment très restrictif notamment dans le cas de poutre élancée. L'hypothèse de la déformation infinitésimale exige que la même condition soit remplie seulement pour n'importe quel tronçon dont la longueur est du même ordre que le diamètre des sections. C'est beaucoup moins restrictif dans la circonstance de grand élanement et autorise en particulier que la rotation de la section aval par rapport à la section amont soit de plusieurs tours.

**3)** La transposition des équations du récapitulatif de la page 135 à la circonstance en jeu, est immédiate. Les efforts extérieurs intervenant étant du type « charge morte », les opérateurs linéaires tels que  $\mathcal{L}$ , ou  $\mathcal{L}_L$ , sont ici nuls. On obtient :

- Équation d'équilibre :

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{R}(x)}{dx} &= \underline{0}, & \frac{d\underline{M}(x)}{dx} + \underline{e}_x \wedge \underline{R}(x) - F \underline{e}_x \wedge \frac{d\underline{\xi}(x)}{dx} &= \underline{0}, \\ M_y(0) = M_z(0) = M_y(l) = M_z(l) &= 0, & R_x(l) - F = M_x(l) - C &= 0, \end{aligned}$$

- Loi de comportement élastique linéarisée :

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{\xi}}{dx} + \underline{e}_x \wedge \underline{\theta} &= \underline{0}, \\ \underline{M} - C \underline{e}_x &= -C \underline{e}_x \wedge \underline{\theta} + \mu J \frac{d\theta_x(x)}{dx} \underline{e}_x + EI \frac{d\theta_{\perp}(x)}{dx}, \end{aligned}$$

- Conditions aux limites cinématiques :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_x(0) = \bar{\xi}_y(0) = \bar{\xi}_z(0) &= 0, & \theta_x(0) &= 0, \\ \bar{\xi}_y(l) = \bar{\xi}_z(l) &= 0. \end{aligned}$$

Il résulte immédiatement des équations de l'équilibre que les deux fonctions  $R_x(x)$  et  $M_x(x)$  sont nécessairement constantes et donc égales respectivement à  $F$  et  $C$ . On en déduit que toute solution des équations d'équilibre TIEP vérifie inmanquablement  $\bar{\xi}_x \equiv 0$  et  $\theta_x \equiv 0$ . Revenant alors aux deux équations de l'équilibre, on constate que la dérivée de la fonction  $\underline{M}_{\perp}(x) - F \underline{e}_x \wedge \underline{\xi}_{\perp}$  est constante, et

donc que cette fonction est affine. Comme, en outre, elle est nulle en  $x = 0, l$ , elle est identiquement nulle :

$$\underline{M}_\perp(x) - F \underline{e}_x \wedge \bar{\underline{\xi}}_\perp \equiv 0.$$

Utilisant enfin  $\underline{\theta}_\perp = \underline{e}_x \wedge d\bar{\underline{\xi}}_\perp/dx$ , en vertu de la liaison interne de Navier-Bernoulli, on a établi l'équivalence du précédent problème aux limites avec :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_x(x) &= 0, & \theta_x(x) &= 0, & R_x(x) &= F, & M_x(x) &= C, \\ \underline{\theta}_\perp &= \underline{e}_x \wedge \frac{d\bar{\underline{\xi}}_\perp(x)}{dx}, \\ \underline{M}_\perp(x) &= C \frac{d\bar{\underline{\xi}}_\perp(x)}{dx} + EI \underline{e}_x \wedge \frac{d^2\bar{\underline{\xi}}_\perp(x)}{dx^2} = F \underline{e}_x \wedge \bar{\underline{\xi}}_\perp(x), \\ \bar{\underline{\xi}}_\perp(0) &= \bar{\underline{\xi}}_\perp(l) = \underline{0}. \end{aligned}$$

Passant en composantes, les deux dernières lignes sont exactement le problème aux limites figurant dans l'énoncé de la question. Ceci établit donc l'équivalence entre la possibilité d'un déplacement de l'équilibre dans le cadre d'analyse TIEP et l'existence d'une solution non-triviale à ce problème aux limites.

4) Les solutions proposées dans l'énoncé, qui s'écrivent de manière équivalente sous la forme :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_y(x) &= A_1 \sin(m_1 x) + B_1 \cos(m_1 x) + A_2 \sin(m_2 x) + B_2 \cos(m_2 x), \\ \bar{\xi}_z(x) &= A_1 \cos(m_1 x) - B_1 \sin(m_1 x) + A_2 \cos(m_2 x) - B_2 \sin(m_2 x), \end{aligned}$$

fournissent bien des solutions du système différentiel considéré pourvu que  $m_1$  et  $m_2$  soient racines de l'équation du second degré :

$$EI m^2 + C m + F = 0.$$

Cette proposition forme bien un espace vectoriel de dimension 4, et est donc exhaustive, pourvu que  $m_1 \neq m_2$ . Ainsi, dès que :

$$C^2 \neq 4EIF,$$

on dispose bien de toutes les solutions du système différentiel. Lorsque  $C^2 = 4EIF$ , le réel  $m_0 = -C/(2EI)$  est l'unique racine double de l'équation du second degré, et l'on vérifie immédiatement que la solution fournie dans l'énoncé constitue bien l'espace vectoriel de dimension 4 de toutes les solutions du système différentiel.

5) Considérons d'abord le cas  $C^2 = 4EIF$ , où l'équation caractéristique du second degré a ses deux racines confondues. Les solutions du système différentiel satisfaisant la condition à la limite en 0 sont alors telles que :

$$B \sin \phi_2 = B \cos \phi_2 = 0 \quad \implies \quad B = 0.$$

Écrivant alors la condition à la limite en  $l$ , on constate que, nécessairement  $A = 0$  et il ne peut donc y avoir de solution non-triviale dans cette circonstance.

Considérons donc l'autre cas  $C^2 \neq 4EIF$ , où l'équation caractéristique du second degré admet deux racines distinctes  $m_1$  et  $m_2$ . La satisfaction de toutes les conditions aux limites exige alors :

$$\begin{aligned} A \sin \phi_1 + B \sin \phi_2 &= 0, \\ A \cos \phi_1 + B \cos \phi_2 &= 0, \\ A \sin(m_1 l + \phi_1) + B \sin(m_2 l + \phi_2) &= 0, \\ A \cos(m_1 l + \phi_1) + B \cos(m_2 l + \phi_2) &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}
& A \sin(m_1 l + \phi_1) + B \sin(m_2 l + \phi_2) \\
&= A \sin(m_1 l + \phi_1) + B \sin m_2 l \cos \phi_2 + B \cos m_2 l \sin \phi_2, \\
&= A \sin(m_1 l + \phi_1) - A \sin m_2 l \cos \phi_1 - A \cos m_2 l \sin \phi_1, \\
&= A \left[ \sin(m_1 l + \phi_1) - \sin(m_2 l + \phi_1) \right].
\end{aligned}$$

Au final, cela exige donc :

$$\begin{aligned}
A \sin \phi_1 + B \sin \phi_2 &= 0, \\
A \cos \phi_1 + B \cos \phi_2 &= 0, \\
A \left[ \sin(m_1 l + \phi_1) - \sin(m_2 l + \phi_1) \right] &= 0, \\
A \left[ \cos(m_1 l + \phi_1) - \cos(m_2 l + \phi_1) \right] &= 0,
\end{aligned}$$

et l'on constate qu'il existe des solutions non-triviales si et seulement si  $m_1 l$  et  $m_2 l$  diffèrent d'un multiple de  $2\pi$ . Cela exige, en particulier, que  $m_1$  et  $m_2$  soient réelles. Notant  $m_1$  la plus grande des deux racines de l'équation du second degré, on voit que les points critiques sont caractérisés par :

$$m_1 l - m_2 l = 2(n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Revenant alors à l'équation caractéristique du second degré, on voit que les valeurs critiques du couple  $(F, C)$  de paramètres de chargement sont exactement données par :

$$\frac{C^2}{4EI} - F = (n+1)^2 \frac{\pi^2 EI}{l^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dans le plan  $(F, C)$ , il s'agit d'une famille de paraboles qui ne se croisent pas. Parcourant un rayon arbitraire issu de l'origine, la première parabole croisée est invariablement celle qui correspond au choix  $n = 0$ . La charge critique d'Euler du problème considéré est donc définie par la parabole d'équation :

$$\frac{C^2}{4EI} - F = \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

Dans ce cas, on calcule immédiatement :

$$m_1 = -\frac{C}{2EI} + \frac{\pi}{l}, \quad m_2 = -\frac{C}{2EI} - \frac{\pi}{l},$$

et le mode de bifurcation correspondant s'écrit :

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}_y(x) &= A \left\{ \sin \left[ \left( \frac{C}{2EI} + \frac{\pi}{l} \right) x + \phi \right] - \sin \left[ \left( \frac{C}{2EI} - \frac{\pi}{l} \right) x + \phi \right] \right\}, \\
&= 2A \sin \frac{\pi x}{l} \cos \left( \frac{Cx}{2EI} + \phi \right), \\
\bar{\xi}_z(x) &= -A \left\{ \cos \left[ \left( \frac{C}{2EI} + \frac{\pi}{l} \right) x + \phi \right] - \cos \left[ \left( \frac{C}{2EI} - \frac{\pi}{l} \right) x + \phi \right] \right\}, \\
&= 2A \sin \frac{\pi x}{l} \sin \left( \frac{Cx}{2EI} + \phi \right),
\end{aligned}$$

où  $A$  et  $\phi$  sont des constantes réelles arbitraires.

La situation  $C = 0$  correspond au cas où la poutre n'est sollicitée qu'en traction-compression, et l'on retrouve la charge critique d'Euler en compression  $\pi^2 EI/l^2$  obtenue à la page 100 de ce

chapitre. Dans le cas où la poutre est seulement sollicitée en torsion ( $F = 0$ ), on voit qu'il existe une valeur critique finie du couple de torsion :

$$|C| = \frac{2\pi EI}{l},$$

susceptible de provoquer un flambage de la poutre. Lorsque ce couple de torsion est combiné avec une force axiale, on voit que la valeur critique de la valeur absolue du couple de torsion est augmentée si la force axiale est une traction et diminuée s'il s'agit d'une compression, la compression en question ne pouvant, en tout état de cause, excéder la valeur critique d'Euler donnée par la formule  $\pi^2 EI/l^2$ .

6) La puissance dissipée par la force axiale en charge morte est donnée par le produit avec la composante suivant la direction  $\underline{e}_x$  (direction invariable de la force) de la vitesse du point d'application de la force :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = F \frac{\partial \bar{\xi}_x(t, l)}{\partial t}.$$

Le travail dissipé par la force sur l'intervalle de temps  $[0, T]$  est donc :

$$W_{\text{ext}} = F \left( \bar{\xi}_x(T, l) - \bar{\xi}_x(0, l) \right),$$

qui montre le caractère conservatif de cet effort extérieur.

La puissance dissipée par le couple de torsion exercé en charge morte est :

$$\mathcal{P}_{\text{ext}} = C \underline{e}_x \cdot \underline{\Omega}(l),$$

où  $\underline{\Omega}(l)$  est le vecteur vitesse de rotation instantanée de la section attachée à l'extrémité aval. On considère un mouvement de la poutre tel que celle-ci soit dans sa configuration de référence à l'instant initial et dans une configuration où la normale à la section attachée à l'extrémité aval soit colinéaire à  $\underline{e}_z$  :

$$\underline{t}(l) = \underline{e}_z.$$

On va considérer deux mouvements conduisant à cette configuration finale. Au cours du premier de ces mouvements, la section attachée à l'extrémité aval tourne constamment autour de la direction  $\underline{e}_y$  : le travail du couple de torsion en charge morte est nul. Le deuxième mouvement considéré est décomposé en deux phases :

- Dans la première phase, la section attachée à l'extrémité aval tourne constamment autour de la direction  $\underline{e}_z$ , de sorte qu'à la fin de cette première phase du mouvement, on ait  $\underline{t}(l) = \underline{e}_y$ . Le couple de torsion en charge morte ne travaille pas durant cette phase.
- Dans la deuxième phase, la section attachée à l'extrémité aval tourne constamment autour de la direction  $\underline{e}_x$ , de sorte qu'à la fin de cette deuxième phase du mouvement, on ait  $\underline{t}(l) = \underline{e}_z$ . Le travail dissipé par le couple de torsion dans cette deuxième phase vaut :

$$W_{\text{ext}} = C \pi/2.$$

Ceci suffit à établir le caractère non-conservatif du couple de torsion exercé en charge morte.

**Exercice 6. Stabilité d'un arbre en rotation uniforme.** Les machines tournantes sont d'un usage courant dans l'industrie. Cependant, leur fonctionnement ne s'est pas toujours déroulé sans problème et a même parfois donné lieu à certains accidents spectaculaires. On se propose ici d'étudier le comportement d'un arbre en rotation uniforme et soumis à un effort axial supposé de direction invariable. Un exemple d'une telle situation est celui d'un arbre placé en position verticale et supportant le poids d'équipements supérieurs.

On considère donc un arbre en forme de cylindre (qui n'est pas nécessairement de révolution), constitué d'un matériau élastique homogène isotrope de module d'Young  $E$  et

de coefficient de Poisson  $\nu$ . On notera  $\mu = E/(2(1 + \nu))$ , le module de cisaillement. Cet arbre sera supposé suffisamment élancé pour être assimilable à une poutre, rectiligne dans sa configuration initiale (à l'arrêt) dénuée de contrainte (état naturel) et de longueur  $l$ . Cette poutre sera supposée obéir à la loi de comportement standard inextensible, c'est-à-dire qu'elle respecte les liaisons internes d'inextensibilité et de Navier-Bernoulli ainsi que la relation :

$$\underline{\mathcal{M}} = \mu J W_T \underline{T} + E \underline{I} \cdot \underline{W}_\perp,$$

où  $J$  désigne l'inertie de torsion de la section droite et  $\underline{I}$  son tenseur d'inertie géométrique dans la configuration de référence. On notera  $I_y$  et  $I_z$  les moments principaux d'inertie géométrique associés aux directions principales  $\underline{e}_y$  et  $\underline{e}_z$ . Le trièdre orthonormé  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$  sera choisi comme base de repérage dans le référentiel tournant. L'origine est placée de sorte que la variable  $x$  se confonde avec l'abscisse curviligne sur la configuration de référence de la ligne moyenne qui est donc un segment de l'axe  $Ox$ .

La poutre est fixée à ses extrémités comme indiqué sur la figure 5.23. À l'extrémité amont, la poutre est fixée à un équipage tournant dont la rotation est imposée autour de l'axe  $Ox$ , de façon à conférer au référentiel tournant une vitesse de rotation  $\Omega_0$  constante au cours du temps. Tout déplacement éventuel du point de fixation de la poutre à cet équipage tournant est bloqué. Le dispositif de fixation de la poutre à l'équipage tournant laisse libre la rotation de la section d'extrémité amont en imposant néanmoins que l'axe de cette rotation demeure constamment orthogonal à  $\underline{e}_x$ . À l'extrémité aval, la poutre est fixée à une articulation sphérique, elle-même libre de se déplacer selon l'axe  $Ox$ .

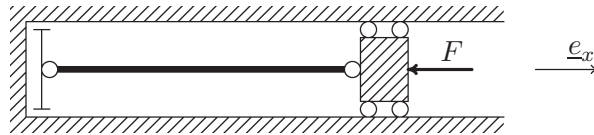


FIG. 5.23 – Conditions aux limites de la poutre.

La poutre étant supposée libre de toute densité linéique d'effort extérieur (pesanteur négligée), on exerce sur le support (de masse négligeable) fixé à l'extrémité aval une force axiale  $-F \underline{e}_x$  de direction invariable, et dont l'amplitude  $F$  est supposée positive en compression.

On note  $\underline{\Omega}_0 = \Omega_0 \underline{e}_x$  le vecteur vitesse de rotation (pseudo-vecteur associé au tenseur antisymétrique  $\underline{\underline{\Omega}}_0$ ) imposé à la poutre et indépendant du temps. La rotation à l'instant  $t$  du référentiel tournant par rapport au référentiel fixe est donc :

$$\underline{\underline{R}}_0(t) = e^{t \underline{\underline{\Omega}}_0},$$

et on dispose de :

$$\underline{\underline{\Omega}}_0 = \dot{\underline{\underline{R}}}_0 \cdot {}^t \underline{\underline{R}}_0 = {}^t \underline{\underline{R}}_0 \cdot \dot{\underline{\underline{R}}}_0.$$

Un point quelconque de la poutre, identifié par le vecteur  $\underline{Om} = \underline{x}$  dans le référentiel tournant sera donc identifié dans le référentiel fixe par le vecteur  $\underline{x}_F$  tel que :

$$\underline{x}_F = \underline{\underline{R}}_0(t) \cdot \underline{x}.$$



On utilisera constamment le référentiel tournant pour décrire les positions d'équilibre et les mouvements de la poutre.

1) Exprimer, dans le repère tournant, l'accélération par rapport au référentiel fixe d'un point quelconque de la poutre. En déduire que la puissance virtuelle des quantités d'accélération par rapport au référentiel fixe s'écrit, en référentiel tournant, sous la forme :

$$\begin{aligned} A(\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\Omega}}) &= \int_0^l \bar{\rho} \ddot{\underline{\xi}} \cdot \hat{\underline{U}} + \left[ \dot{\underline{\Omega}} \cdot \underline{i}^\rho + \underline{\Omega} \wedge (\underline{i}^\rho \cdot \underline{\Omega}) \right] \cdot \hat{\underline{\Omega}} \\ &\quad + 2 \bar{\rho} (\underline{\Omega}_0 \wedge \dot{\underline{\xi}}) \cdot \hat{\underline{U}} + 2 \left[ \underline{\Omega}_0 \wedge (\underline{i}^\rho \cdot \underline{\Omega}) - (\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{\Omega}) \cdot \underline{j}^\rho \right] \cdot \hat{\underline{\Omega}} \\ &\quad + \bar{\rho} \left[ \underline{\Omega}_0 \wedge (\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x}) \right] \cdot \hat{\underline{U}} + \left[ \underline{\Omega}_0 \wedge (\underline{i}^\rho \cdot \underline{\Omega}_0) \right] \cdot \hat{\underline{\Omega}}, \end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\underline{j}^\rho(s) = \int_{S(s)} \rho \underline{x}_\perp \otimes \underline{x}_\perp.$$

Donner alors les expressions des puissances virtuelles des efforts intérieurs. En déduire les équations du mouvement en référentiel tournant pour le problème considéré.

2) Montrer que la configuration rectiligne indéformée fournit une solution des équations de l'équilibre dans le cadre d'analyse non-linéaire DI-RF.

3) Étendre les équations des petits mouvements autour de la configuration précontrainte (cadre d'analyse TIEP) établies dans ce chapitre, en y incorporant les termes supplémentaires dus à la rotation imposée à la poutre, convenablement linéarisés. Compte-tenu du caractère élané de la poutre, on décide de négliger systématiquement les termes d'inertie (d'accélération) associés aux rotations des sections, devant ceux associés aux déplacements transverses, conformément à l'habitude en élasto-dynamique linéarisée. Dans ces conditions, montrer que les déplacements transverses  $\bar{\xi}_y(x, t)$  et  $\bar{\xi}_z(x, t)$  sont régis par les deux équations aux dérivées partielles couplées suivantes :

$$\begin{cases} EI_y \frac{\partial^4 \bar{\xi}_z}{\partial x^4} + F \frac{\partial^2 \bar{\xi}_z}{\partial x^2} - \bar{\rho}_0 \Omega_0^2 \bar{\xi}_z + \bar{\rho}_0 \frac{\partial^2 \bar{\xi}_z}{\partial t^2} + 2\bar{\rho}_0 \Omega_0 \frac{\partial \bar{\xi}_y}{\partial t} = 0, \\ EI_z \frac{\partial^4 \bar{\xi}_y}{\partial x^4} + F \frac{\partial^2 \bar{\xi}_y}{\partial x^2} - \bar{\rho}_0 \Omega_0^2 \bar{\xi}_y + \bar{\rho}_0 \frac{\partial^2 \bar{\xi}_y}{\partial t^2} - 2\bar{\rho}_0 \Omega_0 \frac{\partial \bar{\xi}_z}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (5.40)$$

Écrire les conditions aux limites qui leur sont associées.

4) En particulierisant les équations précédentes (5.40) à la recherche d'un déplacement d'équilibre à partir de l'état précontraint, déterminer l'ensemble des valeurs critiques du couple  $(\Omega_0^2, F)$ , et expliciter les modes de bifurcation correspondants. Quelles sont les valeurs correspondant à la première bifurcation, lorsque l'on parcourt des demi-droites partant de l'origine, dans le plan  $(\Omega_0^2, F)$  ? À quoi correspond le cas  $\Omega_0^2 = 0$  ? Le flambage peut-il avoir lieu sous le seul effet de la rotation imposée (cas où  $F = 0$ ) ? Discuter respectivement les effets d'une rotation imposée sur la valeur critique de la force axiale et d'une force axiale sur la rotation critique d'un arbre.

5) On pose :

$$\Omega_y^2 = \pi^4 \frac{EI_z}{\rho_0 l^4}, \quad \Omega_z^2 = \pi^4 \frac{EI_y}{\rho_0 l^4} \quad \text{et} \quad f = \frac{\pi^2 F}{\rho_0 l^2}.$$

En vue d'étudier la dynamique linéarisée autour de l'état précontraint pour statuer sur la stabilité de la configuration rectiligne, on décide d'utiliser la base des modes propres de vibration de la poutre soumise ni à une rotation imposée ni à une force axiale, pour exprimer l'évolution dynamique des déplacements transverses :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_y(x, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} q_y^m(t) \sin \frac{m\pi x}{l}, \\ \bar{\xi}_z(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} q_z^n(t) \sin \frac{n\pi x}{l}. \end{aligned}$$

Montrer que les effets des différents modes propres se découpent et que l'on est donc ainsi ramené à un ensemble infini dénombrable de systèmes de deux équations différentielles en temps du second ordre couplées. Pour l'un de ces systèmes, correspondant à l'entier  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , montrer que l'équation donnant les pulsations de petits mouvements de vibration autour de l'état précontraint est donnée par :

$$\omega^4 - \omega^2 \left[ k^4 (\Omega_y^2 + \Omega_z^2) - 2k^2 f + 2\Omega_0^2 \right] + \left[ k^4 \Omega_y^2 - k^2 f - \Omega_0^2 \right] \left[ k^4 \Omega_z^2 - k^2 f - \Omega_0^2 \right] = 0.$$

Discuter les conditions d'existence de racines réelles positives et étudier les possibilités d'instabilité par flottement et par flambage. Représenter alors, dans le demi-plan  $(\Omega_0^2, f)$ , les domaines de stabilité pour les petits mouvements de vibration transverse de l'arbre autour de l'état précontraint. Que deviennent les résultats précédents dans le cas particulier d'un arbre cylindrique de révolution ( $I_y = I_z$ ) ?

### Éléments de réponses.

1) On écrit successivement :

$$\begin{aligned} \underline{x}_F(S, t) &= \underline{R}_0(t) \cdot [S \underline{e}_x + \bar{\xi}(S, t) + \underline{x}_\perp], \\ \underline{U}_F(S, t) &= \underline{R}_0(t) \cdot \left[ \dot{\bar{\xi}}(S, t) + \underline{\Omega} \wedge \underline{x}_\perp \right] + \dot{\underline{R}}_0 \cdot {}^t \underline{R}_0 \cdot \underline{x}_F, \\ &= \underline{R}_0(t) \cdot \left[ \dot{\bar{\xi}}(S, t) + \underline{\Omega} \wedge \underline{x}_\perp \right] + \underline{\Omega}_0 \cdot \underline{x}_F, \\ \underline{\gamma}_F &= \underline{R}_0 \cdot \left[ \ddot{\bar{\xi}} + \dot{\underline{\Omega}} \wedge \underline{x}_\perp + \underline{\Omega} \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{x}_\perp) \right] + \dot{\underline{R}}_0 \cdot \left[ \dot{\bar{\xi}} + \underline{\Omega} \wedge \underline{x}_\perp \right] + \underline{\Omega}_0 \cdot \underline{U}_F, \\ &= \underline{R}_0 \cdot \left[ \ddot{\bar{\xi}} + \dot{\underline{\Omega}} \wedge \underline{x}_\perp + \underline{\Omega} \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{x}_\perp) \right] + \underline{\Omega}_0 \cdot \underline{R}_0 \cdot \left[ \dot{\bar{\xi}} + \underline{\Omega} \wedge \underline{x}_\perp \right] \\ &\quad + \underline{\Omega}_0 \cdot \left[ \underline{R}_0 \cdot (\dot{\bar{\xi}} + \underline{\Omega} \wedge \underline{x}_\perp) + \underline{\Omega}_0 \cdot \underline{x}_F \right], \\ \underline{\gamma} &= \ddot{\bar{\xi}} + \dot{\underline{\Omega}} \wedge \underline{x}_\perp + \underline{\Omega} \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{x}_\perp) + 2 \underline{{}^t R}_0 \cdot \underline{\Omega}_0 \cdot \underline{R}_0 \cdot (\dot{\bar{\xi}} + \underline{\Omega} \wedge \underline{x}_\perp) \\ &\quad + \underline{{}^t R}_0 \cdot \underline{\Omega}_0 \cdot \underline{\Omega}_0 \cdot \underline{R}_0 \cdot \underline{x}, \\ &= \ddot{\bar{\xi}} + \dot{\underline{\Omega}} \wedge \underline{x}_\perp + \underline{\Omega} \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{x}_\perp) + 2 \underline{\Omega}_0 \cdot (\dot{\bar{\xi}} + \underline{\Omega} \wedge \underline{x}_\perp) + \underline{\Omega}_0 \cdot \underline{\Omega}_0 \cdot \underline{x}, \\ &= \left[ \ddot{\bar{\xi}} + \dot{\underline{\Omega}} \wedge \underline{x}_\perp + \underline{\Omega} \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{x}_\perp) \right] + \left[ 2 \underline{\Omega}_0 \wedge (\dot{\bar{\xi}} + \underline{\Omega} \wedge \underline{x}_\perp) \right] + \left[ \underline{\Omega}_0 \wedge (\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x}) \right], \end{aligned}$$

puisque  $\underline{\Omega}_0 \cdot \underline{R}_0 = \underline{\dot{R}}_0 = \underline{R}_0 \cdot \underline{\Omega}_0$ . Dans la dernière expression, le premier terme correspond à l'accélération relative dans le référentiel tournant, le second terme à l'accélération de Coriolis et le troisième à l'accélération d'entraînement.

La vitesse virtuelle d'un point quelconque de la poutre dans le référentiel tournant, est donnée par :

$$\hat{\underline{u}} = \hat{\underline{U}}(s) + \hat{\underline{\Omega}}(s) \wedge \underline{x}_\perp.$$

Dès lors, la puissance virtuelle des quantités d'accélération est donnée par :

$$\mathcal{A}(\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\Omega}}) = \int_0^l \int_{\mathcal{S}(s)} \rho \left[ \ddot{\underline{\xi}} + \hat{\underline{\Omega}} \wedge \underline{x}_\perp + \underline{\Omega} \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{x}_\perp) + 2 \underline{\Omega}_0 \wedge (\dot{\underline{\xi}} + \underline{\Omega} \wedge \underline{x}_\perp) + \underline{\Omega}_0 \wedge (\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x}) \right] \cdot \left[ \hat{\underline{U}} + \hat{\underline{\Omega}} \wedge \underline{x}_\perp \right].$$

Compte-tenu du choix de la ligne moyenne, et en reprenant les notations du polycopié,  $\bar{\rho}$  pour la densité linéique et  $\underline{i}^\rho$  pour le tenseur d'inertie de la section droite  $\mathcal{S}(s)$ , il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\Omega}}) &= \int_0^l \bar{\rho} \ddot{\underline{\xi}} \cdot \hat{\underline{U}} + \left[ \hat{\underline{\Omega}} \cdot \underline{i}^\rho + \underline{\Omega} \wedge (\underline{i}^\rho \cdot \underline{\Omega}) \right] \cdot \hat{\underline{\Omega}} \\ &\quad + \bar{\rho} \left[ \underline{\Omega}_0 \wedge (\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x}) \right] \cdot \hat{\underline{U}} + \left[ \underline{\Omega}_0 \wedge (\underline{i}^\rho \cdot \underline{\Omega}_0) \right] \cdot \hat{\underline{\Omega}} + 2 \bar{\rho} (\underline{\Omega}_0 \wedge \dot{\underline{\xi}}) \cdot \hat{\underline{U}} \\ &\quad + \int_0^l \int_{\mathcal{S}(s)} 2\rho \left[ \underline{\Omega}_0 \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{x}_\perp) \right] \cdot \left[ \hat{\underline{\Omega}} \wedge \underline{x}_\perp \right]. \end{aligned}$$

Le dernier terme peut se calculer comme suit :

$$\left[ \underline{\Omega}_0 \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{x}_\perp) \right] \cdot \left[ \hat{\underline{\Omega}} \wedge \underline{x}_\perp \right] = \left( \underline{x}_\perp \wedge \left[ \underline{\Omega}_0 \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{x}_\perp) \right] \right) \cdot \hat{\underline{\Omega}}.$$

Par ailleurs, l'identité :

$$\underline{a} \wedge \left[ \underline{b} \wedge (\underline{c} \wedge \underline{a}) \right] = \underline{b} \wedge \left[ \underline{a} \wedge (\underline{c} \wedge \underline{a}) \right] - \left[ \underline{a} \cdot (\underline{b} \wedge \underline{c}) \right] \underline{a},$$

fournit :

$$\underline{x}_\perp \wedge \left[ \underline{\Omega}_0 \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{x}_\perp) \right] = \underline{\Omega}_0 \wedge \left[ \underline{x}_\perp \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{x}_\perp) \right] - \left[ \underline{x}_\perp \cdot (\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{\Omega}) \right] \underline{x}_\perp.$$

Comme :

$$\underline{a} \cdot \underline{i}^\rho \cdot \underline{\Omega} = \int_{\mathcal{S}} \rho (\underline{a} \wedge \underline{x}_\perp) \cdot (\underline{\Omega} \wedge \underline{x}_\perp) = \underline{a} \cdot \int_{\mathcal{S}} \rho \left[ \underline{x}_\perp \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{x}_\perp) \right],$$

on en déduit :

$$\int_{\mathcal{S}} \rho \left[ \underline{x}_\perp \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{x}_\perp) \right] = \underline{i}^\rho \cdot \underline{\Omega},$$

Au final :

$$\int_{\mathcal{S}} 2\rho \left[ \underline{\Omega}_0 \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{x}_\perp) \right] \cdot \left[ \hat{\underline{\Omega}} \wedge \underline{x}_\perp \right] = 2 \left[ \underline{\Omega}_0 \wedge (\underline{i}^\rho \cdot \underline{\Omega}) - (\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{\Omega}) \cdot \underline{j}^\rho \right] \cdot \hat{\underline{\Omega}},$$

où l'on a posé :

$$\underline{j}^\rho = \int_{\mathcal{S}} \rho \underline{x}_\perp \otimes \underline{x}_\perp.$$

Au final, on obtient l'expression demandée dans l'énoncé :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\Omega}}) &= \int_0^l \bar{\rho} \ddot{\underline{\xi}} \cdot \hat{\underline{U}} + \left[ \hat{\underline{\Omega}} \cdot \underline{i}^\rho + \underline{\Omega} \wedge (\underline{i}^\rho \cdot \underline{\Omega}) \right] \cdot \hat{\underline{\Omega}} \\ &\quad + 2 \bar{\rho} (\underline{\Omega}_0 \wedge \dot{\underline{\xi}}) \cdot \hat{\underline{U}} + 2 \left[ \underline{\Omega}_0 \wedge (\underline{i}^\rho \cdot \underline{\Omega}) - (\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{\Omega}) \cdot \underline{j}^\rho \right] \cdot \hat{\underline{\Omega}} \\ &\quad + \bar{\rho} \left[ \underline{\Omega}_0 \wedge (\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x}) \right] \cdot \hat{\underline{U}} + \left[ \underline{\Omega}_0 \wedge (\underline{i}^\rho \cdot \underline{\Omega}_0) \right] \cdot \hat{\underline{\Omega}}. \end{aligned}$$

La puissance virtuelle des efforts intérieurs s'écrit :

$$\mathcal{P}_i(\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\Omega}}) = - \int_0^l [\underline{R}, \underline{M}] \cdot \frac{d}{ds} \{\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\Omega}}\},$$

étant donné la nullité de la puissance des efforts intérieurs dans la rotation du référentiel tournant. Enfin, la puissance virtuelle des efforts extérieurs a pour expression :

$$\mathcal{P}_e(\hat{\underline{U}}, \hat{\underline{\Omega}}) = -F \underline{e}_x \cdot \hat{\underline{U}}(l).$$

Dès lors, les équations du mouvement dans le référentiel tournant sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{R}}{\partial S} &= \bar{\rho} \ddot{\underline{\xi}} + 2\bar{\rho} (\underline{\Omega}_0 \wedge \dot{\underline{\xi}}) + \bar{\rho} [\underline{\Omega}_0 \wedge (\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{x})], \\ \frac{\partial \underline{M}}{\partial S} + \underline{t} \wedge \underline{R} &= \underline{j}^\rho \cdot \dot{\underline{\Omega}} + \underline{\Omega} \wedge (\underline{j}^\rho \cdot \underline{\Omega}) + 2\underline{\Omega}_0 \wedge (\underline{j}^\rho \cdot \underline{\Omega}) - 2\underline{j}^\rho \cdot (\underline{\Omega}_0 \wedge \underline{\Omega}) + \underline{\Omega}_0 \wedge (\underline{j}^\rho \cdot \underline{\Omega}_0). \end{aligned}$$

2) Dans le cadre d'analyse DI-RF et compte-tenu de la liaison interne d'inextensibilité, les équations de l'équilibre dans le référentiel tournant s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{R}}{dx} &= \bar{\rho}_0 \left( \underline{\Omega}_0 \wedge [\underline{\Omega}_0 \wedge (\underline{x} + \bar{\underline{\xi}})] \right), \\ \frac{d\underline{M}}{dx} + \left( \underline{e}_x + \frac{d\bar{\underline{\xi}}}{dx} \right) \wedge \underline{R} &= \underline{\Omega}_0 \wedge (\underline{j}^\rho \cdot \underline{\Omega}_0), \end{aligned}$$

et les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} R_x(l) &= -F, \\ M_y(0) &= M_z(0) = 0, \\ M_x(l) &= M_y(l) = M_z(l) = 0, \end{aligned} \right\} \text{ statiques,} \\ \left. \begin{aligned} \bar{\xi}_x(0) &= \bar{\xi}_y(0) = \bar{\xi}_z(0) = 0, \\ \bar{\xi}_y(l) &= \bar{\xi}_z(l) = 0, \\ \exists \underline{u} \neq \underline{0}, \quad \underline{R}(0) \cdot \underline{u} &= \underline{u} \text{ et } \underline{u} \cdot \underline{e}_x = 0, \end{aligned} \right\} \text{ cinématiques,} \end{aligned}$$

où  $\underline{R}$  désigne ici la rotation des sections (entre configurations initiale et actuelle) dans le référentiel tournant. Les liaisons internes (Navier-Bernoulli et inextensibilité) s'écrivent :

$$\underline{E} = \underline{0} = ({}^t\underline{R} - \underline{\mathbb{1}}) \cdot \underline{e}_x + {}^t\underline{R} \cdot \frac{d\bar{\underline{\xi}}}{dx},$$

et la loi de comportement :

$${}^t\underline{R} \cdot \underline{M} = \mu J W_T \underline{e}_x + E \underline{I} \cdot W_\perp, \quad \text{avec : } \underline{W} = {}^t\underline{R} \cdot \frac{d\underline{R}}{dx}.$$

Dans la configuration rectiligne indéformée :  $\underline{E} = \underline{0}$ ,  $\underline{W} = \underline{0}$ . Les équations d'équilibre se simplifient alors en :

$$\frac{d\underline{R}}{dx} = \underline{0}, \quad \frac{d\underline{M}}{dx} + \underline{e}_x \wedge \underline{R} = \underline{0},$$

et sont alors clairement satisfaites par la distribution de contrainte généralisée :  $\underline{R}(x) = -F \underline{e}_x$ ,  $\underline{M}(x) = \underline{0}$ . Au final, on a bien exhibé une solution des équations d'équilibre dans le cadre d'analyse DI-RF :

$$\begin{aligned} \bar{\underline{\xi}}(x) &= \underline{0}, & \underline{R}(x) &= \underline{\mathbb{1}}, \\ \underline{R}(x) &= -F \underline{e}_x, & \underline{M}(x) &= \underline{0}. \end{aligned}$$

**3)** Les équations des petits mouvements de la poutre autour de la configuration précontrainte (cadre d'analyse TIEP), telles qu'on les trouve dans le récapitulatif de la page 135, doivent être complétées ici par les termes issus de la rotation du référentiel :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\underline{R} - \underline{R}_0) + \mathcal{L}_R(\underline{\xi}, \underline{\theta}) &= \bar{\rho}_0 \left[ \ddot{\underline{\xi}} + 2\Omega_0 \underline{e}_x \wedge \dot{\underline{\xi}} + \Omega_0^2 \underline{e}_x \wedge (\underline{e}_x \wedge \underline{\xi}) \right], \\ \frac{\partial}{\partial x}(\underline{M} - \underline{M}_0) + \underline{e}_x \wedge (\underline{R} - \underline{R}_0) + \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial x} \wedge \underline{R}_0 + \mathcal{L}_M(\underline{\xi}, \underline{\theta}) &= \underline{I}^\rho \cdot \ddot{\underline{\theta}} + 2\Omega_0 \underline{e}_x \wedge (\underline{I}^\rho \cdot \dot{\underline{\theta}}) \\ &\quad - 2\Omega_0 \underline{J}^\rho \cdot (\underline{e}_x \wedge \dot{\underline{\theta}}) + \Omega_0^2 \underline{e}_x \wedge (\underline{e}_x \cdot \underline{\underline{\Delta I}}^\rho \cdot \underline{\theta}), \end{aligned}$$

où on a noté :

$$\underline{J}^\rho = \int_S \rho_0 \underline{X}_\perp \otimes \underline{X}_\perp,$$

et  $\underline{\underline{\Delta I}}^\rho \cdot \underline{\theta}$  le terme d'ordre 1 dans la linéarisation de  $\underline{i}^\rho$  par rapport au déplacement, le terme d'ordre 0 disparaissant.

Les opérateurs linéaires  $\mathcal{L}_R$  et  $\mathcal{L}_M$  sont nuls dans le cas présent (charge morte). Les conditions aux limites portant sur les contraintes généralisées s'écrivent comme précédemment :

$$\begin{aligned} R_x(l) &= -F, \\ M_y(0) &= M_z(0) = 0, \\ M_x(l) &= M_y(l) = M_z(l) = 0. \end{aligned}$$

Les conditions aux limites cinématiques sont :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_x(0) &= \bar{\xi}_y(0) = \bar{\xi}_z(0) = 0, \\ \bar{\xi}_y(l) &= \bar{\xi}_z(l) = 0, \\ \theta_x(0) &= 0, \end{aligned}$$

Ces équations s'écrivent en composantes sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial R_x}{\partial x} &= \bar{\rho}_0 \ddot{\xi}_x, \\ \frac{\partial R_y}{\partial x} &= \bar{\rho}_0 \ddot{\xi}_y - 2\bar{\rho}_0 \Omega_0 \dot{\xi}_z - \bar{\rho}_0 \Omega_0^2 \bar{\xi}_y, \\ \frac{\partial R_z}{\partial x} &= \bar{\rho}_0 \ddot{\xi}_z + 2\bar{\rho}_0 \Omega_0 \dot{\xi}_y - \bar{\rho}_0 \Omega_0^2 \bar{\xi}_z, \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} &= I_{xx}^\rho \ddot{\theta}_x + \mathcal{L}_x(\underline{\theta}, \dot{\underline{\theta}}), \\ \frac{\partial M_y}{\partial x} - R_z - F \frac{\partial \bar{\xi}_z}{\partial x} &= I_{yy}^\rho \ddot{\theta}_y + \mathcal{L}_y(\underline{\theta}, \dot{\underline{\theta}}), \\ \frac{\partial M_z}{\partial x} + R_y + F \frac{\partial \bar{\xi}_y}{\partial x} &= I_{zz}^\rho \ddot{\theta}_z + \mathcal{L}_z(\underline{\theta}, \dot{\underline{\theta}}). \end{aligned}$$

Les termes  $\mathcal{L}_i$  sont des fonctions linéaires en  $\underline{\theta}, \dot{\underline{\theta}}$  dont les coefficients, qui s'expriment à l'aide de  $\underline{I}^\rho, \underline{J}^\rho, \underline{\underline{\Delta I}}^\rho$ , sont tous des  $O(|S|^2)$ .

En dérivant les deux dernières équations par rapport à  $x$ , en remplaçant  $\underline{\theta}$  en terme de  $\bar{\xi}$ , en portant dedans les équations en  $R_y, R_z$ , et en négligeant tous les termes d'ordre  $|S|/l^2$  devant 1, on aboutit finalement aux deux équations aux dérivées partielles couplées :

$$\begin{cases} EI_y \frac{\partial^4 \bar{\xi}_z}{\partial x^4} + F \frac{\partial^2 \bar{\xi}_z}{\partial x^2} - \bar{\rho}_0 \Omega_0^2 \bar{\xi}_z + \bar{\rho}_0 \frac{\partial^2 \bar{\xi}_z}{\partial t^2} + 2\bar{\rho}_0 \Omega_0 \frac{\partial \bar{\xi}_y}{\partial t} = 0, \\ EI_z \frac{\partial^4 \bar{\xi}_y}{\partial x^4} + F \frac{\partial^2 \bar{\xi}_y}{\partial x^2} - \bar{\rho}_0 \Omega_0^2 \bar{\xi}_y + \bar{\rho}_0 \frac{\partial^2 \bar{\xi}_y}{\partial t^2} - 2\bar{\rho}_0 \Omega_0 \frac{\partial \bar{\xi}_z}{\partial t} = 0, \end{cases}$$

régissant les déplacements transverses de la poutre. Les conditions aux limites associées sont :

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_y(0) = \bar{\xi}_y(l) = 0, & \quad \frac{\partial^2 \bar{\xi}_y}{\partial x^2}(0) = \frac{\partial^2 \bar{\xi}_y}{\partial x^2}(l) = 0, \\ \bar{\xi}_z(0) = \bar{\xi}_z(l) = 0, & \quad \frac{\partial^2 \bar{\xi}_z}{\partial x^2}(0) = \frac{\partial^2 \bar{\xi}_z}{\partial x^2}(l) = 0.\end{aligned}$$

4) Dans le cas de la recherche d'un déplacement d'équilibre à partir de l'état précontraint, les équations précédentes se découpent en :

$$\begin{cases} EI_z \frac{\partial^4 \bar{\xi}_y}{\partial x^4} + F \frac{\partial^2 \bar{\xi}_y}{\partial x^2} - \bar{\rho}_0 \Omega_0^2 \bar{\xi}_y = 0, \\ EI_y \frac{\partial^4 \bar{\xi}_z}{\partial x^4} + F \frac{\partial^2 \bar{\xi}_z}{\partial x^2} - \bar{\rho}_0 \Omega_0^2 \bar{\xi}_z = 0. \end{cases}$$

La recherche de solution exponentielle  $e^{sx}$  dans la première équation fournit l'équation caractéristique :

$$EI_z s^4 + F s^2 - \bar{\rho}_0 \Omega_0^2 = 0,$$

dont les racines sont :

$$\begin{aligned}s_1^2 &= \frac{-F + \sqrt{F^2 + 4EI_z \bar{\rho}_0 \Omega_0^2}}{2EI_z} = \mu_1^2, \quad \mu_1 \in \mathbb{R}^+, \\ s_2^2 &= \frac{-F - \sqrt{F^2 + 4EI_z \bar{\rho}_0 \Omega_0^2}}{2EI_z} = -\mu_2^2, \quad \mu_2 \in \mathbb{R}^+.\end{aligned}$$

On peut supposer  $\Omega_0 \neq 0$ , le cas où la vitesse est nulle ayant déjà été étudié dans ce chapitre à la section 5.1. Dès lors,  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont non nuls et la solution générale s'écrit :

$$\bar{\xi}_y(x) = A \cosh \mu_1 x + B \sinh \mu_1 x + C \cos \mu_2 x + D \sin \mu_2 x.$$

Les conditions aux limites imposent :

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_y(0) = 0 & \implies A + C = 0 \implies A = -C, \\ \frac{\partial^2 \bar{\xi}_y}{\partial x^2}(0) = 0 & \implies A(\mu_1^2 + \mu_2^2) = 0 \implies A = C = 0, \\ \bar{\xi}_y(l) = 0 & \implies B \sinh \mu_1 l + D \sin \mu_2 l = 0, \\ \frac{\partial^2 \bar{\xi}_y}{\partial x^2}(l) = 0 & \implies B \mu_1^2 \sinh \mu_1 l - D \mu_2^2 \sin \mu_2 l = 0.\end{aligned}$$

Pour qu'il existe une solution  $\bar{\xi}_y(x)$  non identiquement nulle, il faut que :

$$\det \begin{vmatrix} \sinh \mu_1 l & \sin \mu_2 l \\ \mu_1^2 \sinh \mu_1 l & -\mu_2^2 \sin \mu_2 l \end{vmatrix} = 0,$$

soit :

$$(\mu_1^2 + \mu_2^2) \sinh \mu_1 l \sin \mu_2 l = 0 \implies \mu_2 l = m\pi, \quad m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

On en déduit la caractérisation des points critiques sous la forme d'une relation qui lie la force  $F$  à la vitesse de rotation imposée  $\Omega_0$  :

$$F + \frac{\bar{\rho}_0 l^2 \Omega_0^2}{m^2 \pi^2} = \frac{m^2 \pi^2 EI_z}{l^2}, \quad m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Les résultats précédents s'étendent directement au déplacement transverse  $\bar{\xi}_z(x)$  pour lequel la relation entre  $F$  et  $\Omega_0^2$  s'écrit :

$$F + \frac{\bar{\rho}_0 l^2 \Omega_0^2}{n^2 \pi^2} = \frac{n^2 \pi^2 E I_y}{l^2}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Les modes de bifurcation correspondants sont donnés respectivement par :

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_y(x) &= C \sin \frac{m\pi x}{l}, & \bar{\xi}_z(x) &= 0, \\ \bar{\xi}_z(x) &= D \sin \frac{n\pi x}{l}, & \bar{\xi}_y(x) &= 0. \end{aligned}$$

Dans le demi-plan  $(\Omega_0^2, F)$ , ces relations définissent deux familles de demi-droites qui ne se croisent pas. En considérant un rayon arbitraire partant de l'origine, les premières droites de chacune des deux familles rencontrées correspondent à  $m = 1$  et  $n = 1$ , c'est-à-dire :

$$F_{\text{cr}} + \frac{\bar{\rho}_0 l^2 \Omega_0^2}{\pi^2} = \frac{\pi^2 E I_z}{l^2}, \quad F_{\text{cr}} + \frac{\bar{\rho}_0 l^2 \Omega_0^2}{\pi^2} = \frac{\pi^2 E I_y}{l^2}.$$

La première droite rencontrée sera celle qui correspond au plus petit moment principal d'inertie géométrique, par exemple  $I_y \leq I_z$ .

Le cas  $\Omega_0^2 = 0$  correspond au problème de la charge critique d'Euler de l'Elastica et la charge critique de flambage est donnée par l'expression classique :

$$F_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 E I_y}{l^2}.$$

Le cas  $F = 0$  correspond à un flambage sous le seul effet de la rotation imposée à la poutre. La vitesse critique de rotation de l'arbre est donnée par :

$$\Omega_{0\text{cr}}^2 = \frac{\pi^4 E I_y}{\bar{\rho}_0 l^4}.$$

Pour cette valeur critique de rotation imposée, on trouve un déplacement d'équilibre possible dans lequel les efforts intérieurs de flexion équilibrent les effets de l'accélération centrifuge. L'accélération centrifuge, pour une vitesse de rotation  $\Omega_0$  donnée, a pour effet de diminuer la charge critique axiale de la poutre :

$$F_{\text{cr}}(\Omega_0^2) = F_{\text{cr}}(0) - \frac{\bar{\rho}_0 l^2 \Omega_0^2}{\pi^2}.$$

De même, l'application d'une charge axiale de compression sur la poutre, a pour effet de diminuer la vitesse de rotation critique, tandis qu'une charge de traction l'augmente, conformément à l'intuition :

$$\Omega_{0\text{cr}}^2(F) = \frac{\pi^4 E I_y}{\bar{\rho}_0 l^4} - \frac{\pi^2 F}{\bar{\rho}_0 l^2}.$$

5) Lorsque la poutre n'est soumise ni à une rotation imposée, ni à une force axiale, les mouvements de vibrations propres transverses sont donnés par :

$$\begin{cases} E I_z \frac{d^4 \bar{\xi}_y}{dx^4} - \bar{\rho}_0 \omega^2 \bar{\xi}_y = 0, \\ E I_y \frac{d^4 \bar{\xi}_z}{dx^4} - \bar{\rho}_0 \omega^2 \bar{\xi}_z = 0. \end{cases}$$

Les pulsations propres sont :

$$\begin{aligned}\omega_y^{(m)} &= m^2 \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_z}{\bar{\rho}_0}} = m^2 \Omega_y, & \text{en posant : } \Omega_y &= \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_z}{\bar{\rho}_0}}, \\ \omega_z^{(n)} &= n^2 \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_y}{\bar{\rho}_0}} = n^2 \Omega_z, & \text{en posant : } \Omega_z &= \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI_y}{\bar{\rho}_0}},\end{aligned}$$

et les modes propres associés :

$$\bar{\xi}_y^{(m)} = \alpha \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad \bar{\xi}_z^{(n)} = \beta \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

La formulation faible des équations de la dynamique des petits mouvements autour de l'état précontraint établies à la question 3), est obtenue en multipliant les équations de champ respectivement par les déplacements cinématiquement admissibles à zéro  $\hat{u}_y(x)$  et  $\hat{u}_z(x)$  et en intégrant ensuite par parties. Il vient ainsi :

$$\begin{aligned}EI_z \int_0^l \frac{\partial^2 \bar{\xi}_y}{\partial x^2} \frac{d^2 \hat{u}_y}{dx^2} - F \int_0^l \frac{\partial \bar{\xi}_y}{\partial x} \frac{d\hat{u}_y}{dx} - \bar{\rho}_0 \Omega_0^2 \int_0^l \bar{\xi}_y \hat{u}_y + \bar{\rho}_0 \frac{d^2}{dt^2} \int_0^l \bar{\xi}_y \hat{u}_y - 2\bar{\rho}_0 \Omega_0 \frac{d}{dt} \int_0^l \bar{\xi}_z \hat{u}_y &= 0, \\ EI_y \int_0^l \frac{\partial^2 \bar{\xi}_z}{\partial x^2} \frac{d^2 \hat{u}_z}{dx^2} - F \int_0^l \frac{\partial \bar{\xi}_z}{\partial x} \frac{d\hat{u}_z}{dx} - \bar{\rho}_0 \Omega_0^2 \int_0^l \bar{\xi}_z \hat{u}_z + \bar{\rho}_0 \frac{d^2}{dt^2} \int_0^l \bar{\xi}_z \hat{u}_z + 2\bar{\rho}_0 \Omega_0 \frac{d}{dt} \int_0^l \bar{\xi}_y \hat{u}_z &= 0,\end{aligned}$$

avec, pour tout  $t$  :

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_y(0, t) = \bar{\xi}_y(l, t) = 0, & \quad \frac{\partial^2 \bar{\xi}_y}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 \bar{\xi}_y}{\partial x^2}(l, t) = 0, \\ \bar{\xi}_z(0, t) = \bar{\xi}_z(l, t) = 0, & \quad \frac{\partial^2 \bar{\xi}_z}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial^2 \bar{\xi}_z}{\partial x^2}(l, t) = 0.\end{aligned}$$

En portant dans la formulation faible les expressions des déplacements  $\bar{\xi}_y(x, t)$  et  $\bar{\xi}_z(x, t)$  :

$$\bar{\xi}_y(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} q_y^{(m)}(t) \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad \bar{\xi}_z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_z^{(n)}(t) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

et en choisissant les déplacements cinématiquement admissibles à 0 :

$$\hat{u}_y(x) = \hat{U}_y^{(k)} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad \hat{u}_z(x) = \hat{U}_z^{(k)} \sin \frac{k\pi x}{l},$$

il vient, compte-tenu de l'orthogonalité des modes propres vis-à-vis des deux produits scalaires « en énergie cinétique » et « en énergie élastique de déformation », pour tout  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  :

$$\begin{cases} \bar{\rho}_0 \ddot{q}_y^{(k)}(t) - 2\bar{\rho}_0 \Omega_0 \dot{q}_z^{(k)}(t) + \left( EI_z \frac{k^4 \pi^4}{l^4} - F \frac{k^2 \pi^2}{l^2} - \bar{\rho}_0 \Omega_0^2 \right) q_y^{(k)}(t) = 0, \\ \bar{\rho}_0 \ddot{q}_z^{(k)}(t) + 2\bar{\rho}_0 \Omega_0 \dot{q}_y^{(k)}(t) + \left( EI_y \frac{k^4 \pi^4}{l^4} - F \frac{k^2 \pi^2}{l^2} - \bar{\rho}_0 \Omega_0^2 \right) q_z^{(k)}(t) = 0, \end{cases}$$

ou encore, en introduisant les notations  $\Omega_y$  et  $\Omega_z$  et en posant  $f = F\pi^2/(\bar{\rho}_0 l^2)$  :

$$\begin{cases} \ddot{q}_y^{(k)}(t) - 2\Omega_0 \dot{q}_z^{(k)}(t) + (k^4 \Omega_y^2 - k^2 f - \Omega_0^2) q_y^{(k)}(t) = 0, \\ \ddot{q}_z^{(k)}(t) + 2\Omega_0 \dot{q}_y^{(k)}(t) + (k^4 \Omega_z^2 - k^2 f - \Omega_0^2) q_z^{(k)}(t) = 0. \end{cases}$$



En cherchant des solutions périodiques auto-entretenuës de la forme :

$$q_y^{(k)}(t) = Q_y^{(k)} e^{i\omega t}, \quad q_z^{(k)}(t) = Q_z^{(k)} e^{i\omega t},$$

où les amplitudes  $Q_y^{(k)}$  et  $Q_z^{(k)}$  sont non simultanément nulles, on trouve l'équation caractéristique donnant les pulsations  $\omega$  :

$$\left[ k^4 \Omega_y^2 - k^2 f - (\Omega_0^2 + \omega^2) \right] \left[ k^4 \Omega_z^2 - k^2 f - (\Omega_0^2 + \omega^2) \right] = 4\Omega_0^2 \omega^2,$$

soit encore :

$$\omega^4 - \omega^2 \left[ k^4 (\Omega_y^2 + \Omega_z^2) - 2k^2 f + 2\Omega_0^2 \right] + \left[ k^4 \Omega_y^2 - k^2 f - \Omega_0^2 \right] \left[ k^4 \Omega_z^2 - k^2 f - \Omega_0^2 \right] = 0. \quad (5.41)$$

La stabilité de la configuration rectiligne exige que, pour tous les entiers  $k$  non nuls, cette équation du second degré admette deux racines  $\omega^2$  positives.

L'existence de racines  $\omega^2$  réelles est conditionnée par la positivité du discriminant, ce qui s'écrit :

$$\Delta = \left[ k^4 (\Omega_y^2 - \Omega_z^2) \right]^2 + 8\Omega_0^2 \left[ k^4 (\Omega_y^2 + \Omega_z^2) - 2k^2 f \right] \geq 0.$$

La condition  $\Delta = 0$  (deux racines confonduës) définit dans le plan  $(\Omega_0^2, f)$  une hyperbole, qui détermine la limite de flottage. Les hyperboles correspondant aux différentes valeurs de  $k$  ne se coupent pas. Par suite, le domaine de stabilité vis-à-vis du flottage est déterminé par la première hyperbole ( $k = 1$ ), c'est-à-dire :

$$(\Omega_y^2 - \Omega_z^2)^2 + 16\Omega_0^2 \left( \frac{\Omega_y^2 + \Omega_z^2}{2} - f \right) \geq 0.$$

Dans le demi-plan  $(\Omega_0^2, f)$ , cette hyperbole, définissant la limite de flottage, a pour asymptote horizontale la droite d'équation :

$$f = \frac{\Omega_y^2 + \Omega_z^2}{2},$$

et pour asymptote verticale l'axe  $\Omega_0^2 = 0$ . Dans le cas particulier où  $f = 0$ , il n'y a plus de risque d'instabilité par flottage, quelle que soit  $\Omega_0$ .

Le second risque d'instabilité est un risque d'instabilité associé au flambage. En effet, lorsqu'une racine au moins de l'équation du second degré (5.41) est négative, une pulsation  $\omega$  au moins, est imaginaire pure et conduit à une croissance exponentielle du déplacement. Pour que cela ne se produise pas, il faut et il suffit que le produit et la somme des deux racines de l'équation (5.41) soient tous les deux positifs et ce, quel que soit  $k$  entier non nul.

Le produit des racines est négatif pour les valeurs du couple  $(\Omega_0^2, f)$  telles que :

$$k^4 \Omega_z^2 \leq k^2 f + \Omega_0^2 \leq k^4 \Omega_y^2.$$

Cette condition définit une infinité dénombrable de bandes dans le demi-plan  $(\Omega_0^2, f)$  qui ne se coupent pas. Dans chacune de ces bandes, la configuration rectiligne est instable. La première bande (celle qui correspond à  $k = 1$ ) est tangente à l'hyperbole définissant la limite de flottage au point  $A$  de coordonnées :

$$f = \frac{3\Omega_y^2 + \Omega_z^2}{4}, \quad \Omega_0^2 = \frac{\Omega_y^2 - \Omega_z^2}{4}.$$

Ce point est donc critique à la fois vis-à-vis du flambage et du flottage. Il faut maintenant examiner la circonstance où la somme des racines de l'équation (5.41) est négative :

$$k^4 (\Omega_y^2 + \Omega_z^2) - 2k^2 f + 2\Omega_0^2 < 0.$$

Pour  $k = 1$ , cela conduit à déclarer instable le domaine défini par :

$$f - \Omega_0^2 > \frac{\Omega_y^2 + \Omega_z^2}{2},$$

dont le bord est une droite passant par  $A$ . L'examen des  $k \geq 2$  ne conduit à aucune extension de la zone d'instabilité.

Notons, en revanche, que la stricte positivité du produit des racines ainsi que de leur somme entraîne aussi la positivité de chacune des deux racines, garantissant ainsi la stabilité. L'ensemble de cette analyse permet ainsi d'identifier tous les domaines d'instabilité ainsi que les domaines de stabilité dans le demi-plan  $(\Omega_0^2, f)$ . Les résultats sont consignés sur la figure 5.24, où les domaines de stabilité sont exactement les domaines laissés en blanc.

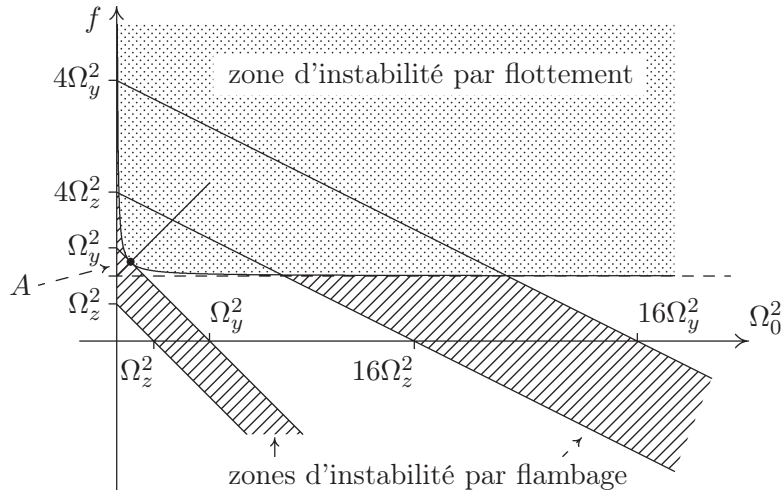


FIG. 5.24 – Domaines d'instabilité dans le demi-plan  $(\Omega_0^2, f)$ .

Ainsi, aussi bien pour  $f = 0$  que pour  $f$  donnée non nulle, il existe une infinité dénombrable de plages de vitesses de rotations conduisant à une instabilité des petits mouvements de l'arbre. Ce fait est bien connu des exploitants de machines tournantes, qui, à partir de l'arbre au repos, montent à la vitesse de rotation nominale en passant le plus vite possible ces plages critiques. Les deux limites d'une plage de vitesses de rotation instables correspondent aux points critiques déjà exhibés à la question V.2) :

$$\begin{cases} k^4 \Omega_y^2 - k^2 \frac{F\pi^2}{\bar{\rho}_0 l^2} - \Omega_0^2 = 0, \\ k^4 \Omega_z^2 - k^2 \frac{F\pi^2}{\bar{\rho}_0 l^2} - \Omega_0^2 = 0, \end{cases}$$

et qui donnent à la fois, comme on l'a vu, les charges critiques de la poutre à l'arrêt ( $\Omega_0 = 0, F \neq 0$ ) et de la poutre en rotation non chargée ( $\Omega_0 \neq 0, F = 0$ ). Il est intéressant de voir que pour certaines vitesses de rotation non nulles, l'arbre peut supporter des charges supérieures à la charge critique d'Euler. La mise en rotation de l'arbre peut donc avoir aussi bien un effet stabilisateur que déstabilisateur, suivant la valeur de la vitesse de rotation.

Dans le cas particulier où l'arbre est un cylindre de révolution ( $I_y = I_z = I$ ), les deux pulsations  $\Omega_y$  et  $\Omega_z$  sont égales à la valeur  $\Omega = \pi^2 \sqrt{EI/\bar{\rho}_0}/l^2$ . L'équation (5.41) se réduit à :

$$\omega^4 - 2\omega^2(k^4 \Omega^2 - k^2 f + \Omega_0^2) + (k^4 \Omega^2 - k^2 f - \Omega_0^2)^2 = 0,$$

dont le discriminant  $\Delta$  s'écrit :

$$\Delta = k^4 \Omega^2 - k^2 f$$

et par suite, la limite de flottement est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad k^4 \Omega^2 \geq k^2 f.$$

Là encore, pour un effort nul, il n'y a pas de risque de flottement. En ce qui concerne les zones d'instabilité par bifurcation, elles se réduisent à présent à des droites<sup>5</sup> d'équations :

$$k^2 f + \Omega_0^2 = k^4 \Omega^2.$$

En particulier, pour  $f = 0$ , on trouve une infinité dénombrable de vitesses critiques :

$$\Omega_0^2 = k^4 \Omega^2, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

À présent, la limite de flottement pour l'arbre est donnée par :

$$F < \frac{\pi^2 EI}{l^2}.$$

qui n'est autre que la charge critique de flambage de la poutre à l'arrêt ( $\Omega_0 = 0$ ) soumise à la force  $F$ .

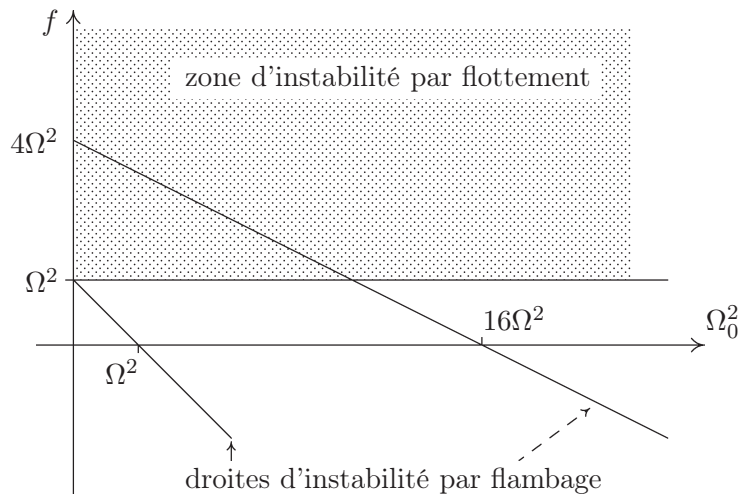


FIG. 5.25 – Domaines d'instabilité dans le demi-plan  $(\Omega_0^2, f)$  dans le cas de l'arbre de révolution.

<sup>5</sup>en toute rigueur, on n'a seulement qu'une pulsation nulle sur ces droites, et donc pas de croissance exponentielle d'une perturbation qui permettrait de conclure à l'instabilité pour la dynamique linéarisée *ainsi que* pour la dynamique non-linéaire. La conclusion d'instabilité pour ces vitesses de rotation est néanmoins étayée par l'analyse du cas général en considérant que l'égalité  $I_y = I_z$  n'est jamais parfaitement réalisée.



## Chapitre 6

# Poutres et solides tridimensionnels élastiques

La théorie des poutres élastiques a été construite, dans ce cours, de manière autonome, à partir d'une description cinématique simplifiée, adaptée au caractère élancé de la géométrie de certains solides, en reproduisant simplement la démarche générale qui avait permis de construire la théorie de l'élasticité du milieu continu tridimensionnel classique. Dans ce chapitre, on se propose maintenant d'examiner la théorie des poutres élastiques à la lumière de la théorie de l'élasticité du milieu continu tridimensionnel classique. La nécessité d'un tel travail apparaît pour deux raisons.

- D'un point de vue théorique, tout d'abord, on dispose maintenant de deux théories distinctes pour analyser les transformations d'un solide élancé : la théorie de l'élasticité des poutres et celle de l'élasticité du milieu continu tridimensionnel classique. Il importe donc de vérifier la cohérence des deux points de vue.
- D'un point de vue pratique, ensuite, la construction de la théorie des poutres élastiques a fait apparaître l'intervention d'une loi de comportement dont la connaissance précise de la seule version *linéarisée* (si l'on accepte de restreindre le champ de la théorie à celui des déformations infinitésimales) nécessite l'identification des 21 coefficients indépendants de la matrice du tenseur  $\underline{A}$ . Or, à la différence de la théorie de l'élasticité du milieu continu tridimensionnel classique, la loi de comportement élastique d'une poutre *ne saurait dépendre que de la seule nature du matériau constitutif* et prend nécessairement en compte des informations sur la géométrie de la section. Du point de vue de l'ingénieur qui souhaite appliquer la théorie à l'étude de problèmes concrets, il apparaît alors illusoire d'envisager la constitution de tables, construites à partir de données expérimentales, de lois de comportement de poutre élastique, qui recenseraient les principaux matériaux constitutifs rencontrés en pratique, *ainsi* que toutes les géométries de section. On est ainsi naturellement amené à faire intervenir la théorie de l'élasticité du milieu continu tridimensionnel classique dans le but d'identifier la loi de comportement d'une poutre élastique à partir de la connaissance du matériau constitutif, d'une part, et de la géométrie des sections d'autre part.

La question théorique de la cohérence des deux théories de l'élasticité des poutres, d'une part, et du milieu continu tridimensionnel, d'autre part, se pose en toute généralité dans le cadre des théories non-linéaires. Cependant, pour ce qui est de l'identification de la loi de comportement de poutre élastique *linéarisée sous l'hypothèse de la déformation infinitési-*

*male* (le tenseur  $\underline{\underline{A}}$ ), on peut se contenter de faire intervenir les deux théories de l'élasticité des poutres, d'une part, et du milieu continu tridimensionnel, d'autre part, *linéarisées sous l'hypothèse de la transformation infinitésimale à partir de l'état naturel* (théories TIEN). Nous nous limiterons donc à ce cadre restreint dans ce chapitre. Nous appliquerons la théorie de l'élasticité du milieu continu tridimensionnel classique en transformation infinitésimale à l'étude de l'équilibre de *cylindres*, sollicités exclusivement au moyen de distributions d'effort surfacique sur les sections d'extrémité. Dans le cas particulier du matériau constitutif élastique homogène et isotrope, la solution de Saint-Venant fournit des expressions explicites pour le déplacement d'équilibre. Nous montrerons alors que ce champ de déplacement tend asymptotiquement, à la limite des grands élancements, vers le champ de déplacement fourni par la théorie des poutres associée à la loi de comportement standard inextensible. Nous envisagerons ensuite le cas d'un matériau élastique anisotrope, éventuellement hétérogène dans la section. Nous montrerons que l'analyse asymptotique du déplacement d'équilibre, à la limite des grands élancements, permet de retrouver la théorie des poutres associée aux liaisons internes de Navier-Bernoulli et d'inextensibilité, et nous étudierons alors le problème de l'identification du tenseur  $\underline{\underline{A}}$  des modules d'élasticité du modèle de poutre ainsi obtenu.

## 6.1 Rappels d'élasticité tridimensionnelle en transformation infinitésimale

Dans cette partie, on notera  $\mathcal{E}$  l'espace affine euclidien tridimensionnel et  $E$  son espace vectoriel associé. On considère un milieu continu tridimensionnel classique occupant dans sa configuration initiale, supposée dénuée de contrainte et prise comme référence, un ouvert  $\Omega \subset \mathcal{E}$  supposé connexe et régulier (par exemple lipschitzien). Choissant une origine  $O \in \mathcal{E}$  permettant de repérer tout point matériel par sa position  $\underline{x} \in E$  dans la configuration de référence, toute *transformation* de ce milieu continu sera repérée par le champ des déplacements :

$$\underline{\xi}(\underline{x}), \quad \underline{\xi} : \Omega \rightarrow E,$$

où l'on a renomé  $\Omega$  l'ouvert de  $E$  associé au choix de l'origine  $O$ . Le champ des déformations *linéarisées*, ou *infinitésimales*, est la partie symétrique du gradient du champ de déplacement :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\nabla}}\underline{\xi} + {}^t\underline{\underline{\nabla}}\underline{\xi}). \quad (6.1)$$

Les champs de déplacement rigidifiants infinitésimaux :

$$\underline{\underline{\xi}}(\underline{x}) = \underline{t} + \underline{w} \wedge \underline{x}, \quad (6.2)$$

sont alors *caractérisés* par la condition :  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}) \equiv \underline{\underline{0}}$ , et on notera  $\mathcal{R}$  l'espace vectoriel de dimension 6 formé par l'ensemble de tous les champs de déplacement rigidifiants infinitésimaux. Si, à tout champ de déplacement  $\underline{\xi}$  régulier sur  $\Omega$ , on peut associer un champ de déformation linéarisée  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  par la formule (6.1), la réciproque n'est pas vraie : un champ tensoriel d'ordre 2 symétrique  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  quelconque n'est pas nécessairement la partie symétrique du gradient d'un certain champ de déplacement  $\underline{\xi}$ . Lorsque c'est le cas, on dit que le champ  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  est géométriquement compatible. Introduisant un repérage cartésien orthonormé  $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$

sur  $\Omega$ , une condition nécessaire pour qu'un champ tensoriel régulier d'ordre 2 symétrique  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  soit géométriquement compatible est :

$$\forall i, j, k, l \in \{x, y, z\}, \quad \varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0, \quad (6.3)$$

où les indices après la virgule désignent des dérivations partielles. Les équations (6.3), qui sont au nombre de 6, sont des équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre 2, appelées *conditions de compatibilité géométrique*. Lorsque  $\Omega$  est simplement connexe, elles suffisent à garantir que le champ  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  soit géométriquement compatible.

On s'intéresse à l'équilibre de ce milieu continu en présence du système d'effort extérieur constitué seulement d'une densité surfacique  $\underline{T}^d$  de force, connue sur la *totalité du bord*. En particulier, nous excluons donc ici, par souci de simplification, toute condition à la limite de type cinématique. Le matériau constitutif est élastique et, dans le cadre restreint où l'on peut supposer la transformation infinitésimale à partir de l'état naturel, la loi de comportement s'écrira :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}},$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}$  est le tenseur des contraintes de Cauchy et  $\underline{\underline{\Lambda}}$  le tenseur des modules élastiques, supposé symétrique défini positif. Dans le cas hétérogène, nous supposons l'existence de réels  $\lambda_{\min}$  (resp.  $\lambda_{\max}$ ) strictement positifs, minorant (resp. majorant) la borne inférieure (resp. la borne supérieure) de la plus petite (resp. la plus grande) valeur propre de  $\underline{\underline{\Lambda}}$  sur tout le volume  $\Omega$  :

$$\forall \underline{x} \in \Omega, \quad \forall \underline{\underline{\varepsilon}}, \quad \lambda_{\min} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \leq \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\Lambda}}(\underline{x}) : \underline{\underline{\varepsilon}} \leq \lambda_{\max} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}}. \quad (6.4)$$

Dans le cas particulier où le matériau élastique est homogène et isotrope, la loi de comportement générale :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \iff \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} : \underline{\underline{\sigma}}, \quad (6.5)$$

se particularise en :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \operatorname{tr} \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \quad \iff \quad \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\underline{\sigma}} - \frac{\nu}{E} \operatorname{tr} \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{1}}, \quad (6.6)$$

où le couple  $(\lambda, \mu)$  des constantes de Lamé et celui  $(E, \nu)$  du module d'Young et du coefficient de Poisson sont reliés par :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, & \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)}, \\ E &= \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}, & \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

La définie positivité de  $\underline{\underline{\Lambda}}$  s'exprime alors indifféremment sous la forme :

$$3\lambda + 2\mu > 0, \quad \mu > 0,$$

ou bien :

$$E > 0, \quad -1 < \nu < \frac{1}{2}.$$

Supposant alors la donnée en effort surfacique extérieur de carré intégrable ( $\underline{T}^d \in L^2(\partial\Omega)$ ) ainsi que la mesurabilité de  $\underline{\underline{\Lambda}}$  (ce qui, compte-tenu de l'hypothèse (6.4) s'écrit  $\underline{\underline{\Lambda}} \in L^\infty(\Omega)$ ), le problème de la recherche d'un déplacement d'équilibre  $\underline{\xi}$  sous l'hypothèse de la transformation infinitésimale à partir de l'état naturel (cadre d'analyse TIEN) se formule, en termes des équations locales associées aux conditions à la limite, sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\underline{\nabla}\underline{\xi} + {}^t\underline{\nabla}\underline{\xi}), \\ \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}}, \\ \underline{\text{div}}\underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}, \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{T}^d, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{dans } \Omega, \\ \\ \\ \text{sur } \partial\Omega, \end{array} \quad (6.8)$$

où, comme conséquence de la linéarisation sous l'hypothèse de la transformation infinitésimale à partir de l'état naturel, l'opérateur de divergence s'entend par rapport à la variable de position  $\underline{x}$  sur la *configuration de référence* et où  $\underline{n}$  est la normale unitaire sortante à la *configuration de référence*.

Introduisant l'espace des champs de déplacement cinématiquement admissibles avec les données du problème d'équilibre :

$$CA = \left\{ \underline{\xi}' : \Omega \rightarrow E ; \underline{\xi}' \in H^1(\Omega) \right\},$$

la fonctionnelle  $E_p : CA \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$E_p(\underline{\xi}') = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}') : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}') - \int_{\partial\Omega} \underline{T}^d \cdot \underline{\xi}',$$

dite « énergie potentielle totale » (la première intégrale dans l'expression de  $E_p$  est, en général, appelée « énergie élastique de déformation »), l'espace affine des champs de contrainte statiquement admissibles :

$$SA = \left\{ \underline{\underline{\sigma}}' \in L^2(\Omega) ; \underline{\text{div}}\underline{\underline{\sigma}}' = \underline{0}, \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\sigma}}' \cdot \underline{n} = \underline{T}^d \quad \text{sur } \partial\Omega \right\},$$

et enfin, la fonctionnelle  $E_c : SA \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$E_c(\underline{\underline{\sigma}}') = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}' : \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} : \underline{\underline{\sigma}}',$$

dite « énergie complémentaire », on dispose alors des cinq formulations équivalentes suivantes du problème d'équilibre dans le cadre d'analyse TIEN.

- **Équations locales.** Trouver  $\underline{\xi} \in H^1(\Omega)$  satisfaisant (6.8).
- **Formulation faible en déplacement.** Trouver  $\underline{\xi} \in CA$ , satisfaisant :

$$\forall \underline{\xi}' \in CA, \quad \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}) : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}' - \underline{\xi}) = \int_{\partial\Omega} \underline{T}^d \cdot (\underline{\xi}' - \underline{\xi}), \quad (6.9)$$

le champ de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  étant alors à calculer par la loi de comportement (6.5).



- **Formulation variationnelle en déplacement.** Trouver  $\underline{\xi} \in CA$ , réalisant le minimum de l'énergie potentielle totale parmi tous les champs de déplacement cinématiquement admissible :

$$\forall \underline{\xi}' \in CA, \quad E_p(\underline{\xi}) \leq E_p(\underline{\xi}'),$$

le champ de contrainte  $\underline{\sigma}$  étant alors à calculer par la loi de comportement (6.5).

- **Formulation faible en contrainte.** Trouver  $\underline{\sigma} \in SA$ , satisfaisant :

$$\forall \underline{\sigma}' \in SA, \quad \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\underline{\Lambda}}^{-1} : (\underline{\sigma}' - \underline{\sigma}) = 0,$$

le champ de déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  qui lui est associé par la loi de comportement (6.5) étant alors automatiquement géométriquement compatible.

- **Formulation variationnelle en contrainte.** Trouver  $\underline{\sigma} \in SA$ , réalisant le minimum de l'énergie complémentaire parmi tous les champs de contrainte statiquement admissibles :

$$\forall \underline{\sigma}' \in SA, \quad E_c(\underline{\sigma}) \leq E_c(\underline{\sigma}'),$$

le champ de déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  qui lui est associé par la loi de comportement (6.5) étant alors automatiquement géométriquement compatible.

Le caractère strictement convexe de l'énergie complémentaire montre l'*unicité* du champ de contrainte  $\underline{\sigma}$  à l'équilibre. On en déduit immédiatement, grâce au caractère bijectif de la loi de comportement élastique (6.5), l'unicité du champ de déformation linéarisée  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ , le déplacement d'équilibre  $\underline{\xi}$  n'étant alors unique que *modulo* l'addition d'un champ rigidifiant infinitésimal (6.2) arbitraire.

Introduisant les centre d'inertie géométrique  $g$  et tenseur d'inertie géométrique  $\underline{\underline{I}}$  de  $\Omega$  (cf Annexe A, ici le mot « géométrique » fait référence au choix  $\rho \equiv 1$  pour la masse volumique) définis par :

$$\begin{aligned} \underline{Og} &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{x}, \\ \underline{\underline{I}} &= \int_{\Omega} |\underline{gm}|^2 \underline{\underline{1}} - \underline{gm} \otimes \underline{gm}, \end{aligned}$$

la projection orthogonale (pour le produit scalaire  $L^2$ ) d'un champ de déplacement  $\underline{\xi}' \in CA$  cinématiquement admissible arbitraire sur l'espace  $\mathcal{R}$  des champs de déplacement rigidifiants infinitésimaux est donnée par<sup>1</sup> :

$$\underline{t}(\underline{\xi}') + \underline{w}(\underline{\xi}') \wedge \underline{x}, \quad \text{avec :} \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{t}(\underline{\xi}') = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \underline{\xi}' + \underline{Og} \wedge \underline{\underline{I}}^{-1} \cdot \int_{\Omega} (\underline{x} - \underline{Og}) \wedge \underline{\xi}', \\ \underline{w}(\underline{\xi}') = \underline{\underline{I}}^{-1} \cdot \int_{\Omega} (\underline{x} - \underline{Og}) \wedge \underline{\xi}'. \end{array} \right.$$

On dispose alors de l'*inégalité de Korn*<sup>2</sup> :

$$\forall \underline{\xi}' \in CA, \quad \int_{\Omega} |\underline{\xi}' - \underline{t}(\underline{\xi}') - \underline{w}(\underline{\xi}') \wedge \underline{x}|^2 + \int_{\Omega} |\underline{\underline{\nabla}} \underline{\xi}'|^2 \leq C \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}') : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}'), \quad (6.10)$$

<sup>1</sup>les valeurs précises de  $\underline{t}(\underline{\xi}')$  et  $\underline{w}(\underline{\xi}')$  ne jouent pas de rôle ici. Le détail de leur calcul pourra néanmoins être trouvé à la section 6.2

<sup>2</sup>il s'agit là d'un résultat profond dont la démonstration est difficile.

pour une certaine constante réelle  $C$  qui ne dépend que de  $\Omega$ . L'inégalité de Korn (6.10) montre, en particulier, que la racine carrée de l'énergie élastique induit une norme sur  $CA/\mathcal{R}$  qui est équivalente à la norme  $H^1$ . Elle permet également de démontrer le résultat d'existence suivant.

- Si :

$$\forall \underline{\xi}' \in \mathcal{R}, \quad \int_{\partial\Omega} \underline{T}^d \cdot \underline{\xi}' = 0, \quad (6.11)$$

c'est-à-dire (cf Annexe A) si le tenseur des efforts extérieurs définis par la densité surfacique de force  $\underline{T}^d$  est nul :

$$\int_{\partial\Omega} \underline{T}^d = \int_{\partial\Omega} \underline{x} \wedge \underline{T}^d = \underline{0},$$

alors il existe une solution  $\underline{\xi} \in CA$  au problème d'équilibre (6.8).

- En revanche, si le tenseur des efforts extérieurs définis par la densité surfacique de force  $\underline{T}^d$  est non nul, alors le problème d'équilibre (6.8) n'admet aucune solution.

L'énergie élastique de la solution  $\underline{\xi}$  est alors donnée par la *formule de Clapeyron* :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\varepsilon} : \underline{\Lambda} : \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \underline{T}^d \cdot \underline{\xi}, \quad (6.12)$$

dont on déduit immédiatement que les minima de l'énergie potentielle totale, d'une part, et de l'énergie complémentaire, d'autre part, sont *opposés* :

$$E_c(\underline{\sigma}) + E_p(\underline{\xi}) = 0,$$

(ce résultat est à l'origine de la terminologie d'« énergie complémentaire »). Les deux formulations variationnelles de l'équilibre conduisent alors à l'encadrement :

$$\forall (\underline{\xi}', \underline{\sigma}') \in CA \times SA, \quad -E_c(\underline{\sigma}') \leq -E_c(\underline{\sigma}) = E_p(\underline{\xi}) = -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \underline{T}^d \cdot \underline{\xi} \leq E_p(\underline{\xi}').$$

Enfin, l'écart (pour la norme associée à l'énergie élastique) entre un champ de déplacement  $\underline{\xi}' \in CA$  et le (un!) déplacement d'équilibre  $\underline{\xi}$  s'évalue commodément à l'aide de l'égalité (de démonstration immédiate) :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}' - \underline{\xi}) : \underline{\Lambda} : \underline{\varepsilon}(\underline{\xi}' - \underline{\xi}) = E_p(\underline{\xi}') - E_p(\underline{\xi}).$$

## 6.2 Le principe de Saint-Venant

On considère maintenant un cas particulier du problème d'équilibre envisagé dans la section 6.1, à savoir le cas où la géométrie  $\Omega$  de la configuration de référence est un tronçon de cylindre (pas nécessairement de révolution), et où l'effort extérieur surfacique  $\underline{T}^d$  est identiquement nul sur la paroi latérale. Il s'agit donc de l'étude de l'équilibre d'un corps cylindrique élastique sollicité exclusivement par des distributions imposées de force surfacique sur les sections extrêmes. On notera alors  $L$  la hauteur du cylindre au repos et  $D$  le diamètre d'une quelconque de ses sections.

À propos de ce problème d'équilibre, A. Barré de Saint-Venant a formulé en 1855, de façon heuristique, la conjecture suivante.

*Considérant l'équilibre linéarisé (TIEN) d'un cylindre élastique élancé ( $L/D \gg 1$ ) sollicité exclusivement par des distributions imposées de force surfacique sur les deux sections extrêmes, alors, à des effets de bords près, localisés au voisinage des deux sections extrêmes, la solution du problème d'équilibre ne dépend que du torseur des efforts surfaciques sur une des deux sections d'extrémité.*

En d'autres termes, cette conjecture exprime le fait que si l'on remplace la distribution d'effort surfacique sur une des sections extrêmes par une autre distribution de même torseur, alors, la solution du problème d'équilibre élastique n'est significativement perturbée qu'au voisinage de la section d'extrémité en question.

Cette conjecture a donné lieu à plusieurs formulations mathématiques qui ont toutes été démontrées dans la deuxième moitié du vingtième siècle. Celle que nous allons maintenant présenter a été adaptée de la version publiée en 1965 par Toupin. Avant d'énoncer son théorème, précisons quelques notations. On choisit un repérage cartésien orthonormé dont l'origine  $O$  appartient à une des sections d'extrémité et tel que la direction  $Ox$  soit orthogonale à toutes les sections droites courantes (axe du cylindre). La position d'un point matériel dans la configuration de référence  $\Omega$  s'écrira alors :

$$\underline{x} = x \underline{e}_x + \underline{x}_\perp, \quad \text{avec } \underline{x}_\perp \cdot \underline{e}_x = 0 \text{ et } x \in ]0, L[.$$

Pour mettre en valeur sa longueur caractéristique, la section droite courante sera notée ici  $DS(x)$ , suggérant par là qu'elle est obtenue par application d'une homothétie de rapport  $D$  sur une section « normalisée »  $\mathcal{S}(x)$  de diamètre 1. On note  $\Omega(x)$  la partie du cylindre « au delà » de la section d'abscisse  $x$  :

$$\Omega(x) = \bigcup_{x' \in ]x, L[} DS(x'),$$

de sorte que  $\Omega(0) = \Omega$ . Les autres notations sont celles de la section 6.1 et, en particulier, la distribution de module d'élasticité  $\underline{\underline{\underline{\Lambda}}}(x)$  est supposée satisfaire la condition (6.4).

**Théorème. [Toupin]** *On considère le problème de l'équilibre linéarisé (TIEN) de  $\Omega$  sous la seule action d'une distribution d'effort surfacique  $\underline{T}^d$  de torseur nécessairement nul sur la section d'extrémité  $DS(0)$ , le reste du bord de  $\Omega$  étant donc en particulier libre de contrainte. Alors :*

$$\forall x \in [0, L], \quad \int_{\Omega(x)} \underline{\underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} \leq \exp\left(-\frac{x}{D} \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{C \lambda_{\max}}}\right) \int_{\Omega(0)=\Omega} \underline{\underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}},$$

pour une certaine constante réelle  $C$ , indépendante de  $D$  et ne dépendant que de la géométrie de  $\mathcal{S}$ .

### Remarques.

1. Ce résultat montre, en particulier, que, dès que l'élancement  $L/D$  est plus grand qu'une certaine valeur ne dépendant que de  $\lambda_{\min}$ ,  $\lambda_{\max}$  et  $\mathcal{S}$ , alors, 99% de l'énergie élastique de la solution est concentrée dans la portion de cylindre définie par  $x \in ]0, L/100[$ , et ce, quelle que soit la distribution d'effort surfacique de torseur nul sur la section d'extrémité  $\mathcal{S}(0)$ .

2. Compte-tenu de la linéarité des équations gouvernant l'équilibre dans le cadre d'analyse TIEN, ce résultat permet de « localiser » l'énergie élastique de la différence des deux solutions associées à deux distributions d'effort surfacique sur les sections extrêmes, et dont les torseurs sur une section d'extrémité sont identiques.

**Preuve.** Considérons le tronçon de cylindre « normalisé »  $]0, 1[ \times \mathcal{S}$ , son centre d'inertie géométrique  $g$  et son tenseur d'inertie géométrique  $\underline{\underline{I}}$ , respectivement définis par :

$$\begin{aligned} \underline{Og} &= \frac{1}{|\mathcal{S}|} \int_{]0,1[ \times \mathcal{S}} \underline{x}, \\ \underline{\underline{I}} &= \int_{]0,1[ \times \mathcal{S}} |\underline{gm}|^2 \underline{\underline{1}} - \underline{gm} \otimes \underline{gm}. \end{aligned}$$

La projection orthogonale (pour le produit scalaire  $L^2$ ) sur l'espace  $\mathcal{R}$  des champs de déplacement rigidifiants infinitésimaux d'un champ de déplacement  $\underline{\xi}'$  est donnée par :

$$\underline{t}(\underline{\xi}') + \underline{w}(\underline{\xi}') \wedge \underline{x},$$

avec<sup>3</sup> :

$$\begin{aligned} \underline{t}(\underline{\xi}') &= \frac{1}{|\mathcal{S}|} \int_{]0,1[ \times \mathcal{S}} \underline{\xi}' + \underline{Og} \wedge \underline{\underline{I}}^{-1} \cdot \int_{]0,1[ \times \mathcal{S}} (\underline{x} - \underline{Og}) \wedge \underline{\xi}', \\ \underline{w}(\underline{\xi}') &= \underline{\underline{I}}^{-1} \cdot \int_{]0,1[ \times \mathcal{S}} (\underline{x} - \underline{Og}) \wedge \underline{\xi}'. \end{aligned}$$

L'inégalité de Korn (6.10) donne alors :

$$\forall \underline{\xi}' \in H^1, \quad \int_{]0,1[ \times \mathcal{S}} |\underline{\xi}' - \underline{t}(\underline{\xi}') - \underline{w}(\underline{\xi}') \wedge \underline{x}|^2 \leq C \int_{]0,1[ \times \mathcal{S}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}') : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}'),$$

pour une certaine constante réelle  $C$  qui ne dépend que de la géométrie de la section droite  $\mathcal{S}$ . Introduisant un changement de variable linéaire pour se ramener au tronçon de cylindre  $]0, h[ \times DS$ , on en déduit, pour tout  $\underline{\xi}' \in H^1$  :

$$\int_{]0,h[ \times DS} |\underline{\xi}' - \underline{t}(\underline{\xi}') - \underline{w}(\underline{\xi}') \wedge \underline{x}|^2 \leq C \max\{h^2, D^2\} \int_{]0,h[ \times DS} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}') : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}'). \quad (6.13)$$

Appliquons maintenant la formule de Clapeyron (6.12) à la restriction de la (une) solution  $(\underline{\xi}, \underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\sigma}})$  du problème d'équilibre considéré au volume  $\Omega(x)$ . Il vient :

$$\int_{\Omega(x)} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} = - \int_{DS(x)} \underline{e}_x \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\xi} = - \int_{DS(x)} \underline{e}_x \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot (\underline{\xi} - \underline{t} - \underline{w} \wedge \underline{x}),$$

<sup>3</sup>les valeurs précises de  $\underline{t}(\underline{\xi}')$  et  $\underline{w}(\underline{\xi}')$  ne jouent pas de rôle ici. Introduisant le repérage cartésien orthonormé  $(g, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$  associé aux directions principales d'inertie géométrique, le calcul de  $\underline{t}(\underline{\xi}')$  et  $\underline{w}(\underline{\xi}')$  est facilement mené en remarquant, compte-tenu du choix du repérage et de l'identité (A.15), que les six champs de déplacement :

$$\frac{1}{\sqrt{|\mathcal{S}|}} \underline{e}_i, \quad \frac{1}{\sqrt{\underline{e}_j \cdot \underline{\underline{I}} \cdot \underline{e}_j}} \underline{e}_j \wedge \underline{gm}, \quad i, j \in \{x, y, z\},$$

forment une base orthonormale (pour le produit scalaire induit par  $L^2$ ) de  $\mathcal{R}$ .

pour tout couple de vecteurs constants  $(\underline{t}, \underline{w})$  en vertu de l'expression dualisée (6.11) de la nullité du torseur de tous les efforts extérieurs s'exerçant sur  $\Omega(x)$  à l'équilibre. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors :

$$\int_{\Omega(x)} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \leq \left( \int_{DS(x)} |\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_x|^2 \right)^{1/2} \left( \int_{DS(x)} |\underline{\underline{\xi}} - \underline{t} - \underline{w} \wedge \underline{x}|^2 \right)^{1/2}.$$

Par la positivité de  $(\alpha\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$  qui donne l'inégalité générale :

$$\sqrt{a}\sqrt{b} \leq \frac{\alpha a}{2} + \frac{b}{2\alpha},$$

on en déduit :

$$\int_{\Omega(x)} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \leq \frac{\alpha}{2} \int_{DS(x)} |\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_x|^2 + \frac{1}{2\alpha} \int_{DS(x)} |\underline{\underline{\xi}} - \underline{t} - \underline{w} \wedge \underline{x}|^2,$$

pour tout réel positif  $\alpha$  et tout couple  $(\underline{t}, \underline{w})$  de vecteurs. Intégrons maintenant cette inégalité sur  $]x, x+h[$  :

$$\int_x^{x+h} \int_{\Omega(x')} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} dx' \leq \frac{\alpha}{2} \int_{]x, x+h[ \times DS} |\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_x|^2 + \frac{1}{2\alpha} \int_{]x, x+h[ \times DS} |\underline{\underline{\xi}} - \underline{t} - \underline{w} \wedge \underline{x}|^2,$$

pour pouvoir appliquer l'inégalité de Korn (6.13) :

$$\int_x^{x+h} \int_{\Omega(x')} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} dx' \leq \frac{\alpha}{2} \int_{]x, x+h[ \times DS} |\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_x|^2 + \frac{C \max\{h^2, D^2\}}{2\alpha} \int_{]x, x+h[ \times DS} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\varepsilon}}.$$

Par l'hypothèse (6.4) sur les modules élastiques, il vient :

$$|\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{e}_x|^2 \leq \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \leq \lambda_{\max} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}},$$

et donc :

$$\int_x^{x+h} \int_{\Omega(x')} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} dx' \leq \left( \frac{\alpha \lambda_{\max}}{2} + \frac{C \max\{h^2, D^2\}}{2\alpha \lambda_{\min}} \right) \int_{]x, x+h[ \times DS} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}}.$$

On peut alors choisir la valeur de  $\alpha$  rendant minimum le second membre de cette inégalité et en déduire :

$$\int_x^{x+h} \int_{\Omega(x')} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} dx' \leq \sqrt{\frac{C \lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}} \max\{h, D\} \left( \int_{\Omega(x)} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} - \int_{\Omega(x+h)} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \right).$$

Cette dernière inégalité implique :

$$\frac{d}{dx} \left\{ \exp\left( \frac{x}{\max\{h, D\}} \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{C \lambda_{\max}}} \right) \frac{1}{h} \int_x^{x+h} \int_{\Omega(x')} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} dx' \right\} \leq 0,$$

et donc, par intégration sur  $]0, x-h[$  :

$$\frac{1}{h} \int_{x-h}^x \int_{\Omega(x')} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} dx' \leq \exp\left( -\frac{x-h}{\max\{h, D\}} \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{C \lambda_{\max}}} \right) \frac{1}{h} \int_0^h \int_{\Omega(x')} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} dx',$$

pour tout  $x \in ]0, L[$  et tout  $h \in ]0, x[$ . Enfin, l'intégrande étant fonction décroissante de  $x'$ , sa valeur moyenne sur un intervalle  $]x_1, x_2[$  est encadrée par ses valeurs aux extrémités :

$$\int_{\Omega(x_2)} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \leq \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} \int_{\Omega(x')} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} dx' \leq \int_{\Omega(x_1)} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}},$$

et on en déduit :

$$\int_{\Omega(x)} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} \leq \exp\left(-\frac{x-h}{\max\{h, D\}} \sqrt{\frac{\lambda_{\min}}{C\lambda_{\max}}}\right) \int_{\Omega(0)=\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}},$$

pour tout  $x \in ]0, L[$  et tout  $h \in ]0, x[$ . Il suffit alors de laisser tendre  $h$  vers 0 pour obtenir le résultat annoncé.

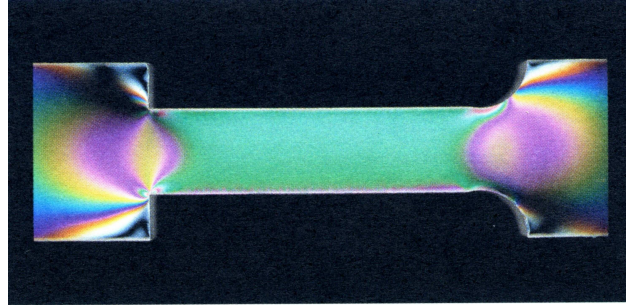


FIG. 6.1 – Vérification expérimentale du principe de Saint-Venant par photo-élasticité lors d'une expérience de traction (photo J. SALENÇON, [4]).

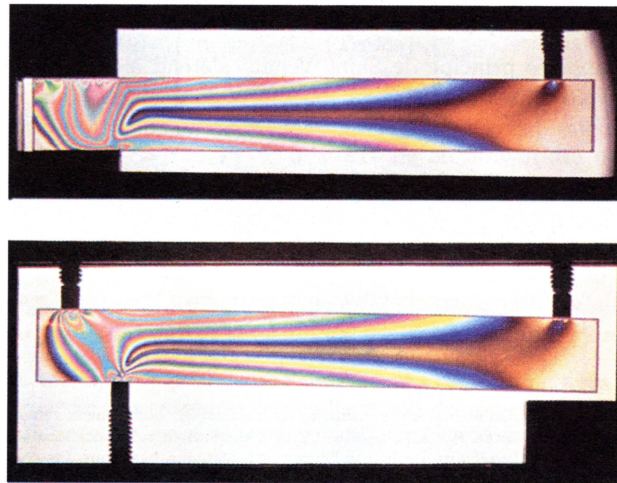


FIG. 6.2 – Vérification expérimentale du principe de Saint-Venant par photo-élasticité lors d'une expérience de flexion (d'après J. SALENÇON, [4]).

### 6.3 Problème et solution de Saint-Venant

Il s'agit là d'étudier l'équilibre dans le cadre d'analyse TIEN (théorie linéarisée sous l'hypothèse de la transformation infinitésimale à partir de l'état naturel) d'un cylindre (pas nécessairement de révolution) élastique *homogène isotrope, élancé* et chargé *exclusivement* par des distributions de force surfacique sur les deux sections extrêmes, la paroi latérale restant libre de contrainte.

#### 6.3.1 Description du problème et notations

On considère un milieu continu classique occupant dans sa configuration initiale, supposée dénuée de contrainte et prise comme référence, un tronçon de cylindre de longueur  $L$  (cf figure 6.3). L'espace affine tridimensionnel sera rapporté à un repère cartésien orthonormé

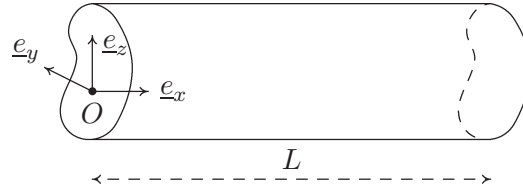


FIG. 6.3 – Configuration initiale d'un cylindre.

$(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ , l'origine  $O$  ayant été placée au centre d'inertie géométrique d'une des sections d'extrémité, le vecteur  $\underline{e}_x$  étant placé suivant la direction de l'axe du cylindre, et les vecteurs  $\underline{e}_y$  et  $\underline{e}_z$ , suivant les directions principales d'inertie géométrique communes à toutes les sections droites (cf Annexe A). Adoptant la notation  $x, y, z$  pour les coordonnées sur la configuration de référence, conformément à l'usage (la logique des notations employées jusqu'ici suggérerait plutôt l'emploi de majuscules), le choix du repérage permet d'affirmer :

$$\int_{\mathcal{S}} y = \int_{\mathcal{S}} z = \int_{\mathcal{S}} yz = 0,$$

où  $\mathcal{S}$  désigne la section droite courante du cylindre (d'aire  $|\mathcal{S}|$ ). On notera :

$$I_y = \int_{\mathcal{S}} z^2, \quad I_z = \int_{\mathcal{S}} y^2, \quad (6.14)$$

les moments principaux d'inertie géométrique, communs à toutes les sections droites, associés aux directions principales d'inertie géométrique  $\underline{e}_y$  et  $\underline{e}_z$ .

On suppose ce cylindre constitué d'un matériau élastique homogène et isotrope de module d'Young  $E$  et de coefficient de Poisson  $\nu$ . On pourra également faire usage du couple des constantes de Lamé  $(\lambda, \mu)$  qui s'expriment en fonction de  $(E, \nu)$  à l'aide des relations (6.7).

On souhaite analyser l'équilibre de ce cylindre sous des conditions de chargement constituées *exclusivement* d'effort surfacique sur les sections extrêmes. En particulier, l'effort volumique extérieur est choisi identiquement nul et la paroi latérale est supposée libre de contrainte. La donnée précise de répartition d'effort surfacique sur les sections extrêmes conduirait, sous réserve que cette répartition ait un torseur global nul, à un problème d'élasticité tridimensionnelle linéarisée *bien posé*, c'est-à-dire admettant une solution unique en

contrainte de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$ , et en déformation linéarisée  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ , le déplacement  $\underline{\underline{\xi}}$  n'étant déterminé que *modulo* un déplacement rigidifiant infinitésimal. Bien entendu, il serait illusoire de prétendre exhiber une solution explicite, quelle que soit la répartition de l'effort surfacique imposé sur les sections extrémales. Heureusement, le principe de Saint-Venant (cf section 6.2) permet d'affirmer que, dans le cas d'un cylindre *élancé*, la solution du problème d'équilibre élastique, ne dépend, à des effets de bord localisés au voisinage des sections extrémales près, de la distribution des efforts surfaciques imposés qu'au travers de leur torseur sur une des sections extrêmes, par exemple  $\mathcal{S}_L$  (définie par  $x = L$ ). Ce résultat conduit à se donner simplement le torseur :

$$\mathbb{T} = \left[ \underline{\underline{F}}_L, \underline{\underline{C}}_L \right] = \left[ F_x \underline{\underline{e}}_x + F_y \underline{\underline{e}}_y + F_z \underline{\underline{e}}_z, C_x \underline{\underline{e}}_x + C_y \underline{\underline{e}}_y + C_z \underline{\underline{e}}_z \right]$$

(dont les éléments de réduction sont donnés en le centre d'inertie géométrique de  $\mathcal{S}_L$ , c'est-à-dire en le point de coordonnées  $(L, 0, 0)$ ), des efforts surfaciques exercés sur  $\mathcal{S}_L$ . On recherchera alors *simultanément* une distribution  $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}}$  d'effort surfacique sur les sections extrémales, compatible avec la donnée du torseur  $\mathbb{T}$ , et la solution du problème d'équilibre élastique linéarisé bien posé correspondant.

### 6.3.2 Obtention de la solution de Saint-Venant

La proposition de Saint-Venant consiste à rechercher un champ de contrainte de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$  dont la matrice dans la base  $(\underline{\underline{e}}_x, \underline{\underline{e}}_y, \underline{\underline{e}}_z)$  s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(x, y, z) & \sigma_{xy}(x, y, z) & \sigma_{xz}(x, y, z) \\ \sigma_{xy}(x, y, z) & 0 & 0 \\ \sigma_{xz}(x, y, z) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit alors de vérifier qu'un choix judicieux des trois fonctions inconnues  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$  et  $\sigma_{xz}$  permet de construire une solution d'équilibre et ce, quelle que soit la donnée du torseur  $\mathbb{T}$ . Les efforts volumiques étant identiquement nuls, la nullité des composantes suivant  $\underline{\underline{e}}_y$  et  $\underline{\underline{e}}_z$  de  $\text{div } \underline{\underline{\sigma}}$  implique immédiatement que les deux fonctions  $\sigma_{xy}$  et  $\sigma_{xz}$  ne peuvent dépendre de  $x$  et conduit à la réécriture :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}(x, y, z) & \sigma_{xy}(y, z) & \sigma_{xz}(y, z) \\ \sigma_{xy}(y, z) & 0 & 0 \\ \sigma_{xz}(y, z) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où les trois fonctions scalaires  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$  et  $\sigma_{xz}$  sont liées par la relation :

$$\frac{\partial}{\partial x} \sigma_{xx}(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} \sigma_{xy}(y, z) + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{xz}(y, z) = 0. \quad (6.15)$$

La loi de comportement (6.6) élastique homogène isotrope en transformation infinitésimale donne alors :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{E} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & (1 + \nu)\sigma_{xy} & (1 + \nu)\sigma_{xz} \\ (1 + \nu)\sigma_{xy} & -\nu\sigma_{xx} & 0 \\ (1 + \nu)\sigma_{xz} & 0 & -\nu\sigma_{xx} \end{pmatrix},$$



qui est astreint à satisfaire les six conditions de compatibilité géométrique (6.3) qui s'écrivent ici :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx,yy} + \sigma_{xx,zz} &= 0, & \sigma_{xx,yz} &= 0, \\ \sigma_{xx,yy} - \nu\sigma_{xx,xx} &= 0, & (1 + \nu)\sigma_{xz,yz} - (1 + \nu)\sigma_{xy,zz} + \nu\sigma_{xx,xy} &= 0, \\ \sigma_{xx,zz} - \nu\sigma_{xx,xx} &= 0, & (1 + \nu)\sigma_{xy,yz} - (1 + \nu)\sigma_{xz,yy} + \nu\sigma_{xx,xz} &= 0,\end{aligned}$$

(où les indices après la virgule désignent des dérivations partielles). Comme  $\sigma_{xx,xx} = 0$  en conséquence de l'équation (6.15), on en déduit :

$$\sigma_{xx,xx} = \sigma_{xx,yy} = \sigma_{xx,yz} = \sigma_{xx,zz} = 0,$$

qui implique :

$$\sigma_{xx}(x, y, z) = a_1xy + a_2xz + a_3x + a_4y + a_5z + a_6.$$

Compte-tenu de l'équation d'équilibre (6.15), les deux dernières équations issues des conditions de compatibilité géométrique se réécrivent :

$$\Delta_2\sigma_{xy} + \frac{a_1}{1 + \nu} = 0, \quad \Delta_2\sigma_{xz} + \frac{a_2}{1 + \nu} = 0,$$

où  $\Delta_2 = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  désigne le Laplacien<sup>4</sup> bidimensionnel. Au total, parmi les champs de contrainte proposés, les seuls qui sont à divergence nulle et dont le tenseur des déformations linéarisées associé par la loi de comportement est géométriquement compatible, sont ceux qui s'écrivent :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\sigma}} &= \left( a_1xy + a_2xz + a_3x + a_4y + a_5z + a_6 \right) \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x \\ &+ \sigma_{xy}(y, z) \left( \underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x \right) + \sigma_{xz}(y, z) \left( \underline{e}_x \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x \right),\end{aligned}$$

où les  $a_i$  désignent six constantes réelles arbitraires et  $\sigma_{xy}(y, z)$  et  $\sigma_{xz}(y, z)$  sont deux fonctions sur  $\mathcal{S}$  satisfaisant :

$$\Delta_2\sigma_{xy} + \frac{a_1}{1 + \nu} = 0, \quad \Delta_2\sigma_{xz} + \frac{a_2}{1 + \nu} = 0, \quad \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} + a_1y + a_2z + a_3 = 0.$$

Il ne reste donc plus qu'à calculer la distribution d'effort surfacique que ce champ de contrainte induit sur la section d'extrémité aval, et vérifier qu'elle permet de réaliser n'importe quel torseur  $\mathbb{T}$ . Avant d'effectuer un tel travail (susceptible notamment de permettre l'identification des constantes  $a_i$  en terme des composantes des éléments de réduction du torseur  $\mathbb{T}$ ), on va néanmoins identifier les champs de déplacement associés à ces champs de contrainte. Remarquons auparavant que :

$$F_x = \int_{\mathcal{S}_L} \sigma_{xx} = \int_{\mathcal{S}_0} \sigma_{xx} \quad \Longrightarrow \quad a_3 = 0.$$

Intégrons maintenant le champ  $\underline{\underline{\sigma}}$  en vue d'obtenir l'expression des champs de déplacement  $\underline{\underline{\xi}}$  associés. De :

$$\sigma_{xx}(x, y, z) = a_1xy + a_2xz + a_4y + a_5z + a_6,$$

<sup>4</sup>On rappelle que la définition intrinsèque du Laplacien d'une fonction  $f$  est :  $\Delta f = \operatorname{div} \nabla f$ .

on déduit :

$$\begin{aligned}\xi_{x,x} &= \frac{1}{E} \left\{ a_1xy + a_2xz + a_4y + a_5z + a_6 \right\}, \\ \xi_{y,y} &= -\frac{\nu}{E} \left\{ a_1xy + a_2xz + a_4y + a_5z + a_6 \right\}, \\ \xi_{z,z} &= -\frac{\nu}{E} \left\{ a_1xy + a_2xz + a_4y + a_5z + a_6 \right\},\end{aligned}$$

qui donne dans un premier temps :

$$\begin{aligned}\xi_x &= \frac{1}{E} \left\{ \frac{a_1}{2}x^2y + \frac{a_2}{2}x^2z + a_4xy + a_5xz + a_6x + K_3(y, z) \right\}, \\ \xi_y &= -\frac{\nu}{E} \left\{ \frac{a_1}{2}xy^2 + a_2xyz + \frac{a_4}{2}y^2 + a_5yz + a_6y + K_y(x, z) \right\}, \\ \xi_z &= -\frac{\nu}{E} \left\{ a_1xyz + \frac{a_2}{2}xz^2 + a_4yz + \frac{a_5}{2}z^2 + a_6z + K_z(x, y) \right\}.\end{aligned}$$

La nullité de  $\varepsilon_{yz} = (\xi_{y,z} + \xi_{z,y})/2$  donne alors :

$$a_2xy + a_5y + \frac{\partial}{\partial z}K_y(x, z) + a_1xz + a_4z + \frac{\partial}{\partial y}K_z(x, y) = 0.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}K_y(x, z) &= -\frac{a_1}{2}xz^2 - \frac{a_4}{2}z^2 + K_1(x) - zK(x), \\ K_z(x, y) &= -\frac{a_2}{2}xy^2 - \frac{a_5}{2}y^2 + K_2(x) + yK(x),\end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned}\xi_x &= \frac{1}{E} \left\{ \frac{a_1}{2}x^2y + \frac{a_2}{2}x^2z + a_4xy + a_5xz + a_6x + K_3(y, z) \right\}, \\ \xi_y &= -\frac{\nu}{E} \left\{ \frac{a_1}{2}x(y^2 - z^2) + a_2xyz + \frac{a_4}{2}(y^2 - z^2) + a_5yz \right. \\ &\quad \left. + a_6y + K_1(x) - zK(x) \right\}, \\ \xi_z &= -\frac{\nu}{E} \left\{ a_1xyz + \frac{a_2}{2}x(z^2 - y^2) + a_4yz + \frac{a_5}{2}(z^2 - y^2) \right. \\ &\quad \left. + a_6z + K_2(x) + yK(x) \right\}.\end{aligned}$$

où  $K(x)$ ,  $K_1(x)$ ,  $K_2(x)$  et  $K_3(y, z)$  sont des fonctions pour l'instant arbitraires. On a alors :

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{1}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{a_1}{2}(x^2 - \nu y^2 + \nu z^2) - \nu a_2yz + a_4x \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y}K_3(y, z) - \nu K_1'(x) + \nu zK'(x) \right\}, \\ \sigma_{xz} &= \frac{1}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{a_2}{2}(x^2 + \nu y^2 - \nu z^2) - \nu a_1yz + a_5x \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z}K_3(y, z) - \nu K_2'(x) - \nu yK'(x) \right\},\end{aligned}$$

et le champ de contrainte est à divergence nulle si et seulement si :

$$\begin{aligned} K(x) &= cx - \frac{E}{\nu}p, \\ K_1(x) &= \frac{1}{\nu} \left( \frac{a_1}{6}x^3 + \frac{a_4}{2}x^2 - Erx - E\lambda_2 \right), \\ K_2(x) &= \frac{1}{\nu} \left( \frac{a_2}{6}x^3 + \frac{a_5}{2}x^2 + Eqx - E\lambda_3 \right), \\ \Delta_2 K_3(y, z) &= -2(a_1y + a_2z). \end{aligned}$$

En posant :

$$\varphi(y, z) = K_3(y, z) + Ery - Eqz,$$

(la fonction  $\varphi$  est appelée « fonction de gauchissement » pour des raisons qui apparaîtront lors de l'analyse des résultats dans la section 6.3.3), on obtient alors l'expression suivante pour le champ de déplacement :

$$\begin{aligned} \xi_x &= \frac{1}{E} \left\{ \frac{a_1}{2}x^2y + \frac{a_2}{2}x^2z + a_4xy + a_5xz + a_6x + \varphi(y, z) \right\} - ry + qz, \\ \xi_y &= -\frac{1}{E} \left\{ \frac{a_1}{2}x \left( \frac{x^2}{3} + \nu y^2 - \nu z^2 \right) + \nu a_2xyz + \frac{a_4}{2}(x^2 + \nu y^2 - \nu z^2) \right. \\ &\quad \left. + \nu a_5yz + \nu a_6y - \nu cxz \right\} + rx - pz + \lambda_2, \\ \xi_z &= -\frac{1}{E} \left\{ \nu a_1xyz + \frac{a_2}{2}x \left( \frac{x^2}{3} - \nu y^2 + \nu z^2 \right) + \nu a_4yz \right. \\ &\quad \left. + \frac{a_5}{2}(x^2 - \nu y^2 + \nu z^2) + \nu a_6z + \nu cxy \right\} + py - qx + \lambda_3, \end{aligned} \quad (6.16)$$

Le champ de contrainte correspondant :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= a_1xy + a_2xz + a_4y + a_5z + a_6, \\ \sigma_{xy} &= \frac{1}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \varphi(y, z) + \nu \frac{a_1}{2}(z^2 - y^2) - \nu a_2yz + \nu cz \right\}, \\ \sigma_{xz} &= \frac{1}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \varphi(y, z) - \nu a_1yz + \nu \frac{a_2}{2}(y^2 - z^2) - \nu cy \right\}, \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{zz} = \sigma_{yz} = 0, \end{aligned}$$

est en équilibre avec des efforts volumiques extérieurs identiquement nuls et la paroi latérale libre de contrainte si et seulement si la fonction de gauchissement  $\varphi(y, z)$  est solution du problème de Neumann :

$$\begin{aligned} \Delta_2 \varphi(y, z) &= -2(a_1y + a_2z) && \text{dans } \mathcal{S}, \\ \underline{\nabla} \varphi \cdot \underline{n} &= \nu \left\{ \left[ \frac{a_1}{2}(y^2 - z^2) + a_2yz - cz \right] n_y \right. \\ &\quad \left. + \left[ a_1yz + \frac{a_2}{2}(z^2 - y^2) + cy \right] n_z \right\} && \text{sur } \partial \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Ce problème de Neumann<sup>5</sup> admet des solutions si et seulement si :

$$\int_{\mathcal{S}} 2(a_1 y + a_2 z) + \int_{\partial\mathcal{S}} \nu \left\{ \left[ \frac{a_1}{2}(y^2 - z^2) + a_2 y z - c z \right] n_y + \left[ a_1 y z + \frac{a_2}{2}(z^2 - y^2) + c y \right] n_z \right\} = 0.$$

La première intégrale est clairement nulle compte-tenu du choix du repérage, et la deuxième l'est en vertu de la formule de Stokes<sup>6</sup>. La donnée des constantes  $a_1$ ,  $a_2$  et  $c$  détermine alors la fonction de gauchissement  $\varphi(y, z)$  à une constante arbitraire  $\lambda_1$  près, qui s'interprète comme une translation d'ensemble suivant  $\underline{e}_x$ .

Il reste maintenant à vérifier qu'un choix judicieux des six constantes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_4$ ,  $a_5$ ,  $a_6$  et  $c$  permet d'obtenir n'importe quel torseur  $\mathbb{T}$  des efforts surfaciques sur  $\mathcal{S}_L$ , associés à ce champ de contrainte. Avant d'effectuer cette vérification, remarquons que, pour toute fonction régulière  $f$  sur  $\mathcal{S}$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial f}{\partial y} &= \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( y \frac{\partial f}{\partial z} \right) - y \Delta_2 f, \\ &= \int_{\partial\mathcal{S}} y \underline{\nabla} f \cdot \underline{n} - \int_{\mathcal{S}} y \Delta_2 f, \end{aligned}$$

par la formule de Stokes. Appliquant cette identité à la fonction de gauchissement  $\varphi(y, z)$ , compte-tenu du choix du repérage et des définitions (6.14), il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= a_1 \left\{ 2I_z + \frac{5\nu}{2} I_z - \frac{\nu}{2} I_y \right\}, \\ \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= a_2 \left\{ 2I_y + \frac{5\nu}{2} I_y - \frac{\nu}{2} I_z \right\}. \end{aligned}$$

On a alors facilement les équivalences :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}_L} \sigma_{xx} = F_x &\Leftrightarrow a_6 = \frac{F_x}{|\mathcal{S}|}, \\ \int_{\mathcal{S}_L} \sigma_{xy} = F_y &\Leftrightarrow a_1 = \frac{F_y}{I_z}, \\ \int_{\mathcal{S}_L} \sigma_{xz} = F_z &\Leftrightarrow a_2 = \frac{F_z}{I_y}. \end{aligned} \tag{6.17}$$

<sup>5</sup>On appelle *problème de Neumann* la recherche d'une fonction  $f$ , définie sur un ouvert régulier  $\Omega$ , et telle que :

$$\begin{aligned} \Delta f &= g^d \quad \text{dans } \Omega, \\ \underline{\nabla} f \cdot \underline{n} &= h^d \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned}$$

où les données  $g^d$  et  $h^d$  sont supposées de carré intégrable. En vertu de la formule de Stokes, une condition nécessaire pour ce problème admette une solution est :

$$\int_{\Omega} g^d - \int_{\partial\Omega} h^d = 0.$$

On montre que cette condition est suffisante à garantir l'existence d'une solution  $f \in H^1(\Omega)$ , cette solution étant alors unique à une constante additive arbitraire près.

<sup>6</sup>On entend par « formule de Stokes », l'identité  $\int_{\Omega} \operatorname{div} T = \int_{\partial\Omega} T \cdot \underline{n}$ , valable quel que soit l'ordre du champ tensoriel  $T$ .

Ces valeurs de  $a_6$ ,  $a_1$  et  $a_2$  étant désormais adoptées, on obtient ensuite :

$$\begin{aligned} \int_{S_L} z\sigma_{xx} = C_y &\Leftrightarrow a_5 = \frac{C_y - LF_z}{I_y}, \\ \int_{S_L} -y\sigma_{xx} = C_z &\Leftrightarrow a_4 = -\frac{C_z + LF_y}{I_z}, \\ \int_{S_L} y\sigma_{xz} - z\sigma_{xy} = C_x &\Leftrightarrow 2(1+\nu)C_x = -\frac{\nu}{2} \int_{S_L} (a_1z - a_2y + 2c)(y^2 + z^2) \\ &\quad + \int_{S_L} y \frac{\partial\varphi}{\partial z} - z \frac{\partial\varphi}{\partial y}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

La fonction  $\varphi$  dépendant linéairement de  $a_1$ ,  $a_2$  et  $c$ , le deuxième membre de la dernière égalité est une fonction linéaire de  $a_1$ ,  $a_2$  et  $c$ , dont le coefficient de  $c$  est non nul comme on le verra dans la section suivante, et fixe donc la valeur de  $c$  de manière unique. Ceci montre que la proposition initiale de Saint-Venant sur la forme du champ de contrainte permet effectivement de construire une solution d'équilibre compatible avec la donnée de n'importe quel tenseur  $\mathbb{T}$  des efforts surfaciques sur une des sections extrêmes, et achève la résolution du problème.

### 6.3.3 Analyse des résultats

Combinant le résultat d'unicité de solution (modulo les déplacements rigidifiants infinitésimaux) du problème d'équilibre élastique linéarisé dans le cadre d'analyse TIEN avec le principe de Saint-Venant (en supposant donc le cylindre élané), on est en mesure d'affirmer que le travail effectué dans la section précédente permet d'évaluer déplacement  $\underline{\xi}$  et contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  dans un cylindre élastique homogène isotrope sollicité uniquement sur ses sections d'extrémité, sauf peut-être au voisinage des sections extrêmes où la solution dépend alors *a priori* de la distribution précise des efforts surfaciques dont seul le tenseur sur chacune de ces sections est imposé. On se propose ici d'analyser la déformée du cylindre, ainsi que le champ de contrainte à l'équilibre. Compte-tenu de la linéarité de l'ensemble des équations gouvernant le problème, on pourra traiter indépendamment les cas élémentaires :

- traction-compression simple :  $\mathbb{T} = \left[ F_x \underline{e}_x, \underline{0} \right]$ ,
- flexion pure :  $\mathbb{T} = \left[ \underline{0}, C_y \underline{e}_y + C_z \underline{e}_z \right]$ ,
- torsion :  $\mathbb{T} = \left[ \underline{0}, C_x \underline{e}_x \right]$ ,
- flexion simple :  $\mathbb{T} = \left[ F_y \underline{e}_y + F_z \underline{e}_z, \underline{0} \right]$ ,

le cas général n'étant qu'une superposition de ces cas élémentaires.

#### Traction-compression simple

On retrouve la solution bien connue dont le champ de contrainte est donné par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{F_x}{|S|} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x,$$

et le champ de déplacement par :

$$\underline{\xi} = \begin{pmatrix} \frac{F_x}{E|\mathcal{S}|}x \\ -\frac{\nu F_x}{E|\mathcal{S}|}y \\ \frac{\nu F_x}{E|\mathcal{S}|}z \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{déplacement rigidifiant infinitésimal arbitraire}}.$$

La contrainte est homogène et uniaxiale. Les sections droites restent planes et orthogonales à l'axe du cylindre, tout en subissant une dilatation (ou contraction) homogène dans leur plan : c'est « l'effet Poisson ».

### Flexion pure

Les champs de déplacement et de contrainte s'explicitent en :

$$\underline{\xi} = \begin{pmatrix} -\frac{C_z}{EI_z}xy + \frac{C_y}{EI_y}xz \\ \frac{C_z}{2EI_z}[x^2 + \nu(y^2 - z^2)] - \frac{\nu C_y}{EI_y}yz \\ \frac{\nu C_z}{EI_z}yz - \frac{C_y}{2EI_y}[x^2 - \nu(y^2 - z^2)] \end{pmatrix}, \quad \underline{\sigma} = \left\{ -\frac{C_z}{I_z}y + \frac{C_y}{I_y}z \right\} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x,$$

à un champ de déplacement rigidifiant infinitésimal près. La contrainte est uniaxiale, mais n'est pas homogène. Le tenseur de contrainte est même nul sur un plan passant par l'axe du cylindre, partageant chaque section droite en deux zones : une zone en traction et une zone en compression. La droite qui sépare ces deux zones dans la section s'appelle *l'axe neutre* (cf figure 6.4). Elle a pour équation dans le plan de la section :

$$-\frac{C_z}{I_z}y + \frac{C_y}{I_y}z = 0.$$

Pour analyser commodément le déplacement, commençons par en calculer le gradient :

$$\underline{\underline{\nabla}}\underline{\xi} = \begin{pmatrix} -\frac{C_z}{EI_z}y + \frac{C_y}{EI_y}z & -\frac{C_z}{EI_z}x & \frac{C_y}{EI_y}x \\ \frac{C_z}{EI_z}x & \frac{\nu C_z}{EI_z}y - \frac{\nu C_y}{EI_y}z & -\frac{\nu C_z}{EI_z}z - \frac{\nu C_y}{EI_y}y \\ -\frac{C_y}{EI_y}x & \frac{\nu C_z}{EI_z}z + \frac{\nu C_y}{EI_y}y & \frac{\nu C_z}{EI_z}y - \frac{\nu C_y}{EI_y}z \end{pmatrix},$$

en vue d'expliciter l'hypothèse de la transformation infinitésimale. Celle-ci s'écrit :

$$|\underline{\underline{\nabla}}\underline{\xi}| \ll 1 \quad \iff \quad \left| \frac{C_y L}{EI_y} \right| + \left| \frac{C_z L}{EI_z} \right| \ll 1,$$

en supposant le diamètre de la section inférieur à la longueur du cylindre. Introduisant les coordonnées  $(x', y', z')$  sur la configuration actuelle, la déformée de la section  $x = x_0$  a pour

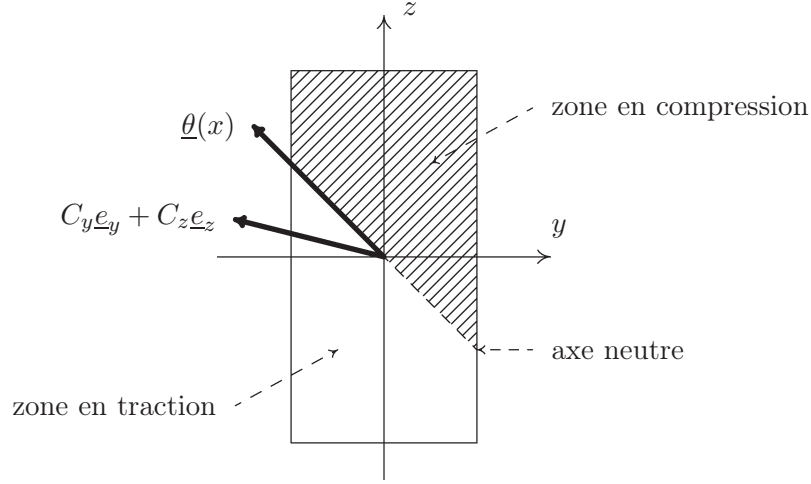


FIG. 6.4 – Section droite d'un cylindre en flexion pure.

équations paramétriques :

$$\begin{aligned} x' &= x_0 - \frac{C_z}{EI_z} x_0 y + \frac{C_y}{EI_y} x_0 z \quad \left( +L o\left(\left|\underline{\underline{\nabla}}\xi\right|\right) \right), \\ y' &= y + \frac{C_z}{2EI_z} \left[ x_0^2 + \nu(y^2 - z^2) \right] - \frac{\nu C_y}{EI_y} y z \quad \left( +L o\left(\left|\underline{\underline{\nabla}}\xi\right|\right) \right), \\ z' &= z + \frac{\nu C_z}{EI_z} y z - \frac{C_y}{2EI_y} \left[ x_0^2 - \nu(y^2 - z^2) \right] \quad \left( +L o\left(\left|\underline{\underline{\nabla}}\xi\right|\right) \right). \end{aligned}$$

Multipliant la deuxième équation par  $C_z/EI_z$  et la troisième par  $C_y/EI_y$ , on voit que la première équation est indiscernable, à l'ordre d'approximation consenti (hypothèse de la transformation infinitésimale), de :

$$x' = x_0 - \frac{C_z}{EI_z} x_0 y' + \frac{C_y}{EI_y} x_0 z',$$

qui est l'équation d'un plan. Ainsi, les sections droites restent-elles planes dans la transformation. Leur plan subit une rotation infinitésimale (par rapport au plan de la déformée de la section  $x = 0$ ) décrite par le vecteur rotation infinitésimale :

$$\underline{\theta}(x) = x \left( \frac{C_y}{EI_y} \underline{e}_y + \frac{C_z}{EI_z} \underline{e}_z \right),$$

qui est dirigé suivant l'axe neutre. Comme le tenseur des déformations linéarisées  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  est indépendant de  $x$ , chaque section se déforme de la même manière dans son plan. De plus, le tenseur de déformation  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  étant diagonal dans la base  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ , les sections droites restent orthogonales à la déformée de la fibre moyenne  $y = z = 0$ . La déformée de la fibre moyenne

a pour équations paramétriques :

$$\begin{aligned}x' &= x \quad \left( +L o\left(|\underline{\nabla\xi}\right| \right), \\y' &= \frac{C_z}{2EI_z} x^2 \quad \left( +L o\left(|\underline{\nabla\xi}\right| \right), \\z' &= -\frac{C_y}{2EI_y} x^2 \quad \left( +L o\left(|\underline{\nabla\xi}\right| \right),\end{aligned}$$

et donc pour équations cartésiennes :

$$\frac{C_y}{I_y} y' + \frac{C_z}{I_z} z' = 0, \quad -\frac{C_y}{EI_y} y' + \frac{C_z}{EI_z} z' + \frac{C_y C_z}{E^2 I_y I_z} x'^2 = 0 \quad \left( +o\left(|\underline{\nabla\xi}|^2\right) \right),$$

indiscernables, à l'approximation consentie, de :

$$\begin{aligned}\frac{C_y}{I_y} y' + \frac{C_z}{I_z} z' &= 0, \\x'^2 + \left( y' - \frac{EI_z}{2C_z} \right)^2 + \left( z' + \frac{EI_y}{2C_y} \right)^2 &= \frac{E^2}{4} \left[ \left( \frac{I_y}{C_y} \right)^2 + \left( \frac{I_z}{C_z} \right)^2 \right],\end{aligned}$$

qui définissent un arc de cercle (intersection d'une sphère et d'un plan) de rayon :

$$\frac{E}{\sqrt{(C_y/I_y)^2 + (C_z/I_z)^2}} \gg L.$$

Pour cette raison, la flexion pure est aussi appelée flexion *circulaire*. Ainsi, l'arc de cercle formé par la déformée de la fibre moyenne s'inscrit bien dans le plan d'équation :

$$\frac{C_y}{I_y} y' + \frac{C_z}{I_z} z' = 0,$$

c'est-à-dire le plan orthogonal à l'axe neutre qui est l'axe autour duquel tournent les sections. Ainsi, la déformée de la fibre moyenne est dans le plan orthogonal à la direction définie par l'axe neutre, et non pas, en général, dans le plan orthogonal à la direction définie par le moment des efforts surfaciques appliqués sur une des sections extrémales. On parle de *flexion déviée*. L'axe neutre est parallèle à la direction du moment si et seulement si celui-ci est dirigé suivant une direction principale d'inertie géométrique de la section, et dans ce cas particulier précis, on parle de *flexion normale*.

### Torsion

Posant :

$$\psi(y, z) = -\frac{\varphi(y, z)}{\nu c},$$

le champ de déplacement est donné par :

$$\underline{\xi} = \frac{C_x}{\mu J} \begin{pmatrix} \psi(y, z) \\ -xz \\ xy \end{pmatrix},$$



à un champ de déplacement rigidifiant infinitésimal près, où la fonction  $\psi(y, z)$  est la solution, définie à une constante près s'interprétant comme une translation axiale d'ensemble, du problème de Neumann :

$$\begin{aligned}\Delta_2\psi(y, z) &= 0, & \text{dans } \mathcal{S}, \\ \underline{\nabla}\psi \cdot \underline{n} &= zn_y - yn_z & \text{sur } \partial\mathcal{S}.\end{aligned}\tag{6.19}$$

et où la constante réelle  $J$  est définie à partir de la solution  $\psi$  de ce problème de Neumann, par :

$$J = \int_{\mathcal{S}} y^2 + z^2 + y \frac{\partial\psi}{\partial z} - z \frac{\partial\psi}{\partial y}.\tag{6.20}$$

Le déplacement dans la section  $x = x_0$  est la superposition de la rotation infinitésimale :

$$\frac{C_x}{\mu J} x_0 \underline{e}_x \wedge (y \underline{e}_y + z \underline{e}_z),$$

d'angle  $C_x x_0 / (\mu J)$  (et donc proportionnel à la hauteur de la section en question dans le cylindre) autour de l'axe  $Ox$  du cylindre, et du déplacement axial :

$$\frac{C_x}{\mu J} \psi(y, z) \underline{e}_x.$$

Hormis le cas exceptionnel où la fonction  $\psi$  serait affine, la section ne reste donc pas plane dans la transformation. On dit qu'elle subit un *gauchissement*, et la fonction  $\psi$  est appelée fonction de gauchissement. Ce gauchissement est le même pour toutes les sections. Le problème de Neumann (6.19) admet une solution affine  $\psi(y, z) = ay + bz + c$  si et seulement si :

$$(z - a)n_y - (y + b)n_z \equiv 0, \quad \text{sur } \partial\mathcal{S},$$

c'est-à-dire si et seulement si  $\partial\mathcal{S}$  est constitué d'un ou plusieurs arcs de cercle concentriques, c'est-à-dire si et seulement si on a affaire à un cylindre de révolution. On a ainsi montré que, dans la torsion infinitésimale d'un cylindre, les sections droites restent planes (*i.e.*, le gauchissement est nul) si et seulement si le cylindre est de révolution.

L'angle de rotation de la section d'extrémité  $x = L$  par rapport à l'autre section d'extrémité est donné par :

$$\frac{LC_x}{\mu J}.$$

Pour cette raison, la constante  $J$ , définie par (6.20), qui ne dépend que de la géométrie de la section et qui, en outre a la même dimension que les moments d'inertie principaux  $I_y$  ou  $I_z$  est appelée *moment d'inertie de torsion*. Elle est toujours strictement positive, comme on pouvait s'y attendre. En effet, la définition (6.20) donne :

$$J = \int_{\mathcal{S}} \left( \frac{\partial\psi}{\partial z} + y \right)^2 + \left( \frac{\partial\psi}{\partial y} - z \right)^2 - \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial\psi}{\partial y} \left( \frac{\partial\psi}{\partial y} - z \right) + \frac{\partial\psi}{\partial z} \left( \frac{\partial\psi}{\partial z} + y \right),$$

où la deuxième intégrale est nulle en conséquence de (6.19), car, utilisant la formule de

Stokes, elle se transforme en :

$$\begin{aligned} & \int_S \frac{\partial \psi}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) + \frac{\partial \psi}{\partial z} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) \\ &= \int_S \frac{\partial}{\partial y} \left[ \psi \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \psi \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) \right] - \int_S \psi \Delta_2 \psi, \\ &= \int_{\partial S} \psi \left[ n_y \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) + n_z \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) \right] - \int_S \psi \Delta_2 \psi. \end{aligned}$$

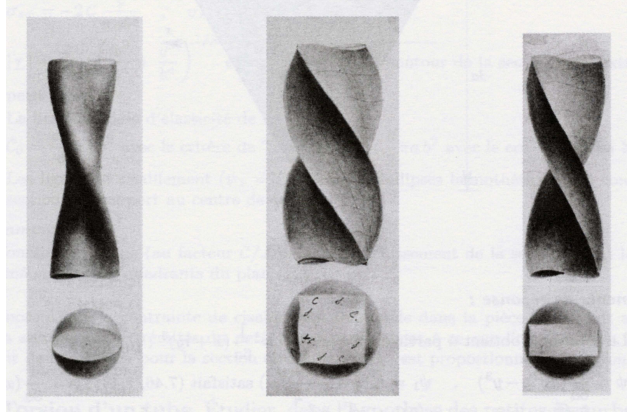


FIG. 6.5 – Torsion de barres à sections elliptique, carrée, rectangulaire : dessin originaux de A. BARRÉ DE SAINT VENANT.

Ainsi :

$$\int_S z \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial z} = \int_S \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 = \int_S |\underline{\nabla} \psi|^2,$$

et l'on dispose donc des deux expressions suivantes de  $J$  :

$$\begin{aligned} J &= I_y + I_z - \int_S |\underline{\nabla} \psi|^2, \\ &= \int_S \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right)^2, \end{aligned}$$

dont on déduit l'encadrement :

$$0 < J \leq I_y + I_z,$$

où l'égalité est réalisée si et seulement si la section est de révolution.

Le champ de contrainte est donné par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{C_x}{J} \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial \psi}{\partial y} - z & \frac{\partial \psi}{\partial z} + y \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} - z & 0 & 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} + y & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

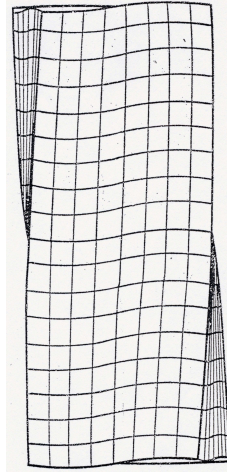


FIG. 6.6 – Mise en évidence du gauchissement lors du calcul par éléments finis de la torsion d'un cylindre à section carrée.

### Couplage entre flexion simple et torsion

Pour des raisons de couplage qui vont apparaître dans la suite, la flexion simple n'est pas étudiée en elle-même, mais conjointement avec la torsion. Plus précisément, on étudie, dans ce paragraphe, la circonstance où le torseur  $\mathbb{T}$  des efforts surfaciques sur  $\mathcal{S}_L$  s'écrit :

$$\mathbb{T} = [F_y \underline{e}_y + F_z \underline{e}_z, C_x \underline{e}_x].$$

En posant :

$$\varphi(y, z) = a_1 \eta_1(y, z) + a_2 \eta_2(y, z) - \nu c \psi(y, z),$$

on sépare les contributions au gauchissement dues à  $a_1$ ,  $a_2$  et  $c$ , et on fait apparaître les trois problèmes de Neumann :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_2 \eta_1(y, z) = -2y, & \text{dans } \mathcal{S}, \\ \underline{\nabla} \eta_1 \cdot \underline{n} = \nu \left\{ \frac{y^2 - z^2}{2} n_y + yz n_z \right\}, & \text{sur } \partial \mathcal{S}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_2 \eta_2(y, z) = -2z, & \text{dans } \mathcal{S}, \\ \underline{\nabla} \eta_2 \cdot \underline{n} = \nu \left\{ yz n_y - \frac{y^2 - z^2}{2} n_z \right\}, & \text{sur } \partial \mathcal{S}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta_2 \psi(y, z) = 0, & \text{dans } \mathcal{S}, \\ \underline{\nabla} \psi \cdot \underline{n} = zn_y - yn_z, & \text{sur } \partial \mathcal{S}, \end{array} \right.$$

où  $\psi$  n'est rien d'autre que la fonction de gauchissement en torsion déjà rencontrée lors de l'étude de la torsion. Les fonctions  $\eta_1$  et  $\eta_2$  correspondent à un gauchissement dû à l'effort tranchant. En désignant par  $J$  le moment d'inertie de torsion donné par la formule (6.20),

l'étude menée dans la section 6.3.2 donne :

$$\begin{aligned} 2(1+\nu)C_x &= -\nu Jc + a_1 \int_S -\nu \frac{y^2 z + z^3}{2} + y \frac{\partial \eta_1}{\partial z} - z \frac{\partial \eta_1}{\partial y}, \\ &+ a_2 \int_S \nu \frac{y^3 + yz^2}{2} + y \frac{\partial \eta_2}{\partial z} - z \frac{\partial \eta_2}{\partial y}. \end{aligned}$$

On note alors  $C$  point du plan contenant  $\mathcal{S}_L$ , de coordonnées :

$$\begin{aligned} y_C &= \frac{1}{2(1+\nu)I_y} \int_S \nu \frac{y^3 + yz^2}{2} + y \frac{\partial \eta_2}{\partial z} - z \frac{\partial \eta_2}{\partial y}, \\ z_C &= \frac{1}{2(1+\nu)I_z} \int_S \nu \frac{y^2 z + z^3}{2} - y \frac{\partial \eta_1}{\partial z} + z \frac{\partial \eta_1}{\partial y}, \end{aligned} \quad (6.21)$$

de sorte que :

$$\frac{\nu}{2(1+\nu)} Jc = y_C F_z - z_C F_y - C_x. \quad (6.22)$$

Cette dernière formule montre que  $c = 0$  si et seulement si le moment en  $C$  des efforts surfaciques sur  $\mathcal{S}_L$  est nul. Comme  $c$  (plus exactement  $-\nu c/E$ ) s'interprète comme une amplitude de torsion cinématique, cela justifie le nom de *centre de cisaillement* donné à  $C$  (qui ne dépend que de la géométrie de la section et du coefficient de Poisson  $\nu$ ). En général,  $C$  n'est pas sur la ligne moyenne (l'axe  $Ox$ ) et la flexion simple ( $C_x = 0$ ), dite aussi *flexion par effort tranchant*, s'accompagne d'une torsion en retour, dite *torsion géométrique*, par opposition à la *torsion statique*, induite par  $C_x \neq 0$ .

Dans le cas où la section admet un axe de symétrie (disons  $Oz$ , puisque tout axe de symétrie est direction principale d'inertie géométrique), la fonction  $\eta_2$  est alors paire par rapport à  $y$  et  $y_C = 0$ , ce qui signifie que  $C$  est sur l'axe de symétrie en question. S'il y a deux axes de symétrie, alors  $C$  est sur la fibre moyenne (l'axe  $Ox$ ).

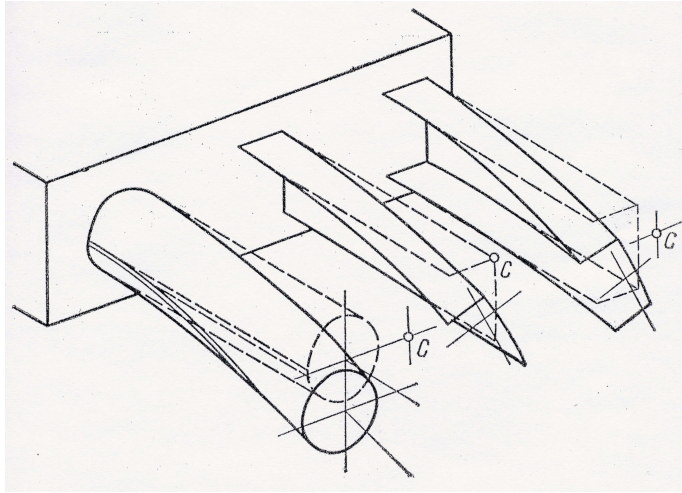


FIG. 6.7 – Torsion en retour lors d'expériences de flexion par effort tranchant (d'après V. FEODOSSIEV, *Résistance des matériaux*, Éditions de Moscou, 1971).

### Cas du cylindre de révolution

On suppose ici que  $\mathcal{S}$  est un disque de rayon  $R$ . On s'intéresse ici au cas de chargement se réduisant seulement à un effort tranchant :

$$\mathbb{T} = [F_y \underline{e}_y, \underline{0}].$$

On a alors facilement :

$$\eta_1(y, z) = \left( \frac{\nu}{2} + \frac{3}{4} \right) R^2 y - \frac{1}{4} (yz^2 + y^3),$$

puis :

$$\underline{\xi} = \frac{F_y}{EI_z} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} xy(x - 2L) - \frac{1}{4} (yz^2 + y^3) + \left( \frac{\nu}{2} + \frac{3}{4} \right) R^2 y \\ -\frac{x^2}{6} (x - 3L) - \frac{\nu}{2} (x - L)(y^2 - z^2) \\ -\nu(x - L)yz \end{pmatrix}$$

à un déplacement rigidifiant infinitésimal près. Le supplément de déplacement axial induit par le gauchissement de la section a un profil indépendant de  $x$ , et est représenté dans le plan médian  $xOy$  sur la figure 6.9.



FIG. 6.8 – Gauchissement des sections lors de la flexion par effort tranchant d'un cylindre de révolution.

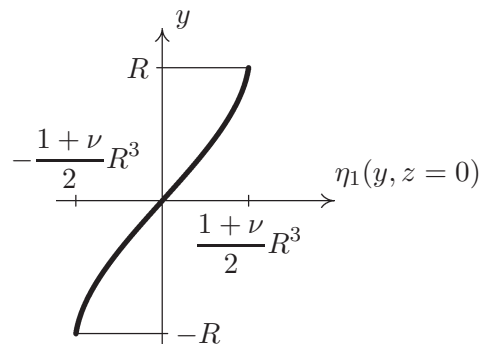


FIG. 6.9 – Profil du supplément de déplacement axial par gauchissement en flexion simple.

Enfin, le champ de contrainte est donné par :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{F_y}{I_z}(x-L)y, \\ \sigma_{xy} &= -\frac{F_y}{8(1+\nu)I_z} \left\{ (1-2\nu)z^2 + (3+2\nu)(y^2 - R^2) \right\}, \\ \sigma_{xz} &= -\frac{(1+2\nu)F_y}{4(1+\nu)I_z}yz, \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{zz} = \sigma_{yz} = 0.\end{aligned}$$

## 6.4 Loi de comportement de poutre élastique homogène isotrope

Considérant l'équilibre, dans le cadre tridimensionnel TIEN, d'un cylindre élastique homogène isotrope soumis exclusivement à des efforts surfaciques sur les sections extrêmes, et dont le torseur sur une de ces sections a pour éléments de réduction :

$$\mathbb{T} = \left[ F_x \underline{e}_x + F_y \underline{e}_y + F_z \underline{e}_z, C_x \underline{e}_x + C_y \underline{e}_y + C_z \underline{e}_z \right],$$

en le centre d'inertie géométrique de la section en question, les déplacements et contraintes d'équilibre ont été calculés explicitement dans la section 6.3.2. Ayant introduit le repérage cartésien orthonormé  $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$  avec  $O$  placé en le centre d'inertie géométrique d'une des sections d'extrémité,  $\underline{e}_x$  suivant l'axe du cylindre et  $\underline{e}_y, \underline{e}_z$  suivant des directions principales d'inertie géométrique des sections, on a montré que le déplacement d'équilibre s'écrit :

$$\begin{aligned}\xi_x(x, y, z) &= \frac{F_x}{E|\mathcal{S}|}x + \frac{F_y}{EI_z} \left[ \frac{xy}{2}(x-2L) + \eta_1(y, z) + \frac{2(1+\nu)zCI_z}{J} \psi(y, z) \right] \\ &\quad + \frac{F_z}{EI_y} \left[ \frac{xz}{2}(x-2L) + \eta_2(y, z) - \frac{2(1+\nu)yCI_y}{J} \psi(y, z) \right] \\ &\quad + \frac{2(1+\nu)C_x}{EJ} \psi(y, z) + \frac{C_y}{EI_y}xz - \frac{C_z}{EI_z}xy, \\ \xi_y(x, y, z) &= -\frac{\nu F_x}{E|\mathcal{S}|}y + \frac{F_z}{EI_y} \left[ \nu(L-x)yz + \frac{2(1+\nu)yCI_y}{J}xz \right] \\ &\quad + \frac{F_y}{EI_z} \left[ \frac{x^2}{6}(3L-x) + \frac{\nu}{2}(L-x)(y^2-z^2) - \frac{2(1+\nu)zCI_z}{J}xz \right] \\ &\quad - \frac{2(1+\nu)C_x}{EJ}xz - \frac{\nu C_y}{EI_y}yz + \frac{C_z}{2EI_z}(x^2 + \nu y^2 - \nu z^2), \\ \xi_z(x, y, z) &= -\frac{\nu F_x}{E|\mathcal{S}|}z + \frac{F_y}{EI_z} \left[ \nu(L-x)yz + \frac{2(1+\nu)zCI_z}{J}xy \right] \\ &\quad + \frac{F_z}{EI_y} \left[ \frac{x^2}{6}(3L-x) - \frac{\nu}{2}(L-x)(y^2-z^2) - \frac{2(1+\nu)yCI_y}{J}xy \right] \\ &\quad + \frac{2(1+\nu)C_x}{EJ}xy - \frac{C_y}{2EI_y}(x^2 - \nu y^2 + \nu z^2) + \frac{\nu C_z}{EI_z}yz,\end{aligned}\tag{6.23}$$

(à un déplacement rigidifiant infinitésimal près), où  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  et  $\psi$  sont trois fonctions de gauchissement caractérisées par les trois problèmes de Neumann :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 \eta_1(y, z) = -2y, \quad \text{dans } \mathcal{S}, \\ \underline{\nabla} \eta_1 \cdot \underline{n} = \nu \left\{ \frac{y^2 - z^2}{2} n_y + yz n_z \right\}, \quad \text{sur } \partial \mathcal{S}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 \eta_2(y, z) = -2z, \quad \text{dans } \mathcal{S}, \\ \underline{\nabla} \eta_2 \cdot \underline{n} = \nu \left\{ yz n_y - \frac{y^2 - z^2}{2} n_z \right\}, \quad \text{sur } \partial \mathcal{S}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 \psi(y, z) = 0, \quad \text{dans } \mathcal{S}, \\ \underline{\nabla} \psi \cdot \underline{n} = zn_y - yn_z, \quad \text{sur } \partial \mathcal{S}, \end{array} \right.$$

qui ne dépend que de la géométrie de la section (et aussi du coefficient de Poisson  $\nu$ ), et  $J$ ,  $y_C$  et  $z_C$ , les trois constantes qui s'expriment à l'aide des solutions de ces trois problèmes de Neumann sous la forme :

$$J = \int_{\mathcal{S}} y^2 + z^2 + y \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$y_C = \frac{1}{2(1+\nu)I_y} \int_{\mathcal{S}} \nu \frac{y^3 + yz^2}{2} + y \frac{\partial \eta_2}{\partial z} - z \frac{\partial \eta_2}{\partial y},$$

$$z_C = \frac{1}{2(1+\nu)I_z} \int_{\mathcal{S}} \nu \frac{y^2 z + z^3}{2} - y \frac{\partial \eta_1}{\partial z} + z \frac{\partial \eta_1}{\partial y}.$$

Le champ de contrainte à l'équilibre est alors donné par :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{F_x}{|\mathcal{S}|} + \frac{F_y}{I_z} (x-L)y + \frac{F_z}{I_y} (x-L)z + \frac{C_y}{I_y} z - \frac{C_z}{I_z} y, \\ \sigma_{xy} &= \frac{F_y}{I_z} \left[ \frac{\nu}{4(1+\nu)} (z^2 - y^2) - \frac{z_C I_z}{J} z + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + \frac{z_C I_z}{J} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] \\ &\quad + \frac{F_z}{I_y} \left[ -\frac{\nu}{2(1+\nu)} yz + \frac{y_C I_y}{J} z + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial \eta_2}{\partial y} - \frac{y_C I_y}{J} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right] \\ &\quad + \frac{C_x}{J} \left[ -z + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right], \tag{6.24} \\ \sigma_{xz} &= \frac{F_y}{I_z} \left[ -\frac{\nu}{2(1+\nu)} yz + \frac{z_C I_z}{J} y + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial \eta_1}{\partial z} + \frac{z_C I_z}{J} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] \\ &\quad + \frac{F_z}{I_y} \left[ \frac{\nu}{4(1+\nu)} (y^2 - z^2) - \frac{y_C I_y}{J} y + \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\partial \eta_2}{\partial z} - \frac{y_C I_y}{J} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] \\ &\quad + \frac{C_x}{J} \left[ y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right], \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{zz} = \sigma_{yz} = 0. \end{aligned}$$

Il s'agit là de la solution exacte associée à une distribution particulière d'effort surfacique, de torseur  $\mathbb{T}$ , sur chacune des sections d'extrémité. Cependant, dans le cas d'un cylindre

*élancé*, le principe de Saint-Venant donne une portée générale à ces expressions, quelles que soient les distributions d'effort surfacique envisagées sur les sections d'extrémité, à condition d'accepter de ne pas appliquer les expressions obtenues pour le déplacement et les contraintes au voisinage des sections d'extrémité.

Nous allons maintenant procéder à une analyse asymptotique du champ de déplacement lorsque l'élanement tend vers l'infini. Pour cela, on note  $D$  le diamètre commun à toutes les sections, et on va faire tendre  $D$  vers 0 en réduisant toutes les sections de façon homothétique, tout en gardant constante la longueur  $L$  du cylindre. L'élanement  $e$  défini par :

$$e = \frac{L}{D},$$

tendra alors vers l'infini. On introduit les variables d'espace adimensionnelles :

$$\tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{D}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{D}.$$

On introduit également les quantités suivantes, qui sont à la fois adimensionnelles et invariants lorsque  $D$  varie :

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathcal{S}}| &= \frac{|\mathcal{S}|}{D^2}, & \tilde{\underline{I}} &= \frac{\underline{I}}{D^4}, & \tilde{J} &= \frac{J}{D^4}, \\ \tilde{\psi}(\tilde{y}, \tilde{z}) &= \frac{\psi(D\tilde{y}, D\tilde{z})}{D^2}, & \tilde{\eta}_i(\tilde{y}, \tilde{z}) &= \frac{\eta_i(D\tilde{y}, D\tilde{z})}{D^3}. \end{aligned}$$

Avec ces nouvelles notations, le champ de déplacement (6.23) associé à la solution de Saint-Venant s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\xi_x}{L} &= e^2 \frac{F_x}{EL^2|\tilde{\mathcal{S}}|} \tilde{x} + \frac{F_y}{EL^2\tilde{I}_z} \left[ e^3 \frac{\tilde{x}\tilde{y}}{2} (\tilde{x} - 2) + e\tilde{\eta}_1 + e \frac{2(1+\nu)\tilde{z}_C\tilde{I}_z}{\tilde{J}} \tilde{\psi} \right] \\ &+ \frac{F_z}{EL^2\tilde{I}_y} \left[ e^3 \frac{\tilde{x}\tilde{z}}{2} (\tilde{x} - 2) + e\tilde{\eta}_2 - e \frac{2(1+\nu)\tilde{y}_C\tilde{I}_y}{\tilde{I}} \tilde{\psi} \right] \\ &+ e^2 \frac{2(1+\nu)C_x}{EL^3\tilde{J}} \tilde{\psi} + e^3 \frac{C_y}{EL^3\tilde{I}_y} \tilde{x}\tilde{z} - e^3 \frac{C_z}{EL^3\tilde{I}_z} \tilde{x}\tilde{y}, \\ \frac{\xi_y}{L} &= -e \frac{\nu F_x}{EL^2|\tilde{\mathcal{S}}|} \tilde{y} + \frac{F_z}{EL^2\tilde{I}_y} \left[ e^2 \nu(1 - \tilde{x})\tilde{y}\tilde{z} + e^2 \frac{2(1+\nu)\tilde{y}_C\tilde{I}_y}{\tilde{J}} \tilde{x}\tilde{z} \right] \\ &+ \frac{F_y}{EL^2\tilde{I}_z} \left[ e^4 \frac{\tilde{x}^2}{6} (3 - \tilde{x}) + e^2 \frac{\nu}{2} (1 - \tilde{x})(\tilde{y}^2 - \tilde{z}^2) - e^2 \frac{2(1+\nu)\tilde{z}_C\tilde{I}_z}{\tilde{J}} \tilde{x}\tilde{z} \right] \\ &- e^3 \frac{2(1+\nu)C_x}{EL^3\tilde{J}} \tilde{x}\tilde{z} - e^2 \frac{\nu C_y}{EL^3\tilde{I}_y} \tilde{y}\tilde{z} + e^2 \frac{C_z}{2EL^3\tilde{I}_z} (e^2\tilde{x}^2 + \nu\tilde{y}^2 - \nu\tilde{z}^2), \\ \frac{\xi_z}{L} &= -e \frac{\nu F_x}{EL^2|\tilde{\mathcal{S}}|} \tilde{z} + \frac{F_y}{EL^2\tilde{I}_z} \left[ e^2 \nu(1 - \tilde{x})\tilde{y}\tilde{z} + e^2 \frac{2(1+\nu)\tilde{z}_C\tilde{I}_z}{\tilde{J}} \tilde{x}\tilde{y} \right] \\ &+ \frac{F_z}{EL^2\tilde{I}_y} \left[ e^4 \frac{\tilde{x}^2}{6} (3 - \tilde{x}) - e^2 \frac{\nu}{2} (1 - \tilde{x})(\tilde{y}^2 - \tilde{z}^2) - e^2 \frac{2(1+\nu)\tilde{y}_C\tilde{I}_y}{\tilde{J}} \tilde{x}\tilde{y} \right] \\ &+ e^3 \frac{2(1+\nu)C_x}{EL^3\tilde{J}} \tilde{x}\tilde{y} - e^2 \frac{C_y}{2EL^3\tilde{I}_y} (e^2\tilde{x}^2 - \nu\tilde{y}^2 + \nu\tilde{z}^2) + e^2 \frac{\nu C_z}{EL^3\tilde{I}_z} \tilde{y}\tilde{z}, \end{aligned} \tag{6.25}$$



où tous les termes sont sans dimensions. On procède alors à un *développement asymptotique* de ce champ de déplacement en négligeant les termes en  $e^2$  et  $e$  par rapport aux ordres dominants  $e^4$  et  $e^3$ . On obtient alors :

$$\begin{aligned}\frac{\xi_x}{L} &= e^3 \frac{F_y}{EL^2 \tilde{I}_z} \frac{\tilde{x}\tilde{y}}{2} (\tilde{x} - 2) + e^3 \frac{F_z}{EL^2 \tilde{I}_y} \frac{\tilde{x}\tilde{z}}{2} (\tilde{x} - 2) \\ &\quad + e^3 \frac{C_y}{EL^3 \tilde{I}_y} \tilde{x}\tilde{z} - e^3 \frac{C_z}{EL^3 \tilde{I}_z} \tilde{x}\tilde{y} + O(e^2), \\ \frac{\xi_y}{L} &= e^4 \frac{F_y}{EL^2 \tilde{I}_z} \frac{\tilde{x}^2}{6} (3 - \tilde{x}) - e^3 \frac{2(1 + \nu)C_x}{EL^3 \tilde{J}} \tilde{x}\tilde{z} + e^4 \frac{C_z}{2EL^3 \tilde{I}_z} \tilde{x}^2 + O(e^2), \\ \frac{\xi_z}{L} &= e^4 \frac{F_z}{EL^2 \tilde{I}_y} \frac{\tilde{x}^2}{6} (3 - \tilde{x}) + e^3 \frac{2(1 + \nu)C_x}{EL^3 \tilde{J}} \tilde{x}\tilde{y} - e^4 \frac{C_y}{2EL^3 \tilde{I}_y} \tilde{x}^2 + O(e^2),\end{aligned}\tag{6.26}$$

qui peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}\underline{\xi}(x, y, z) &= \left\{ \left[ \frac{x^2}{6} (3L - x) \frac{F_y}{EI_z} + \frac{x^2}{2} \frac{C_z}{EI_z} \right] \underline{e}_y + \left[ \frac{x^2}{6} (3L - x) \frac{F_z}{EI_y} - \frac{x^2}{2} \frac{C_y}{EI_y} \right] \underline{e}_z \right\} \\ &\quad + \left\{ \frac{2(1 + \nu)C_x}{EJ} x \underline{e}_x + \left[ \frac{x}{2} (x - 2L) \frac{F_z}{EI_y} + x \frac{C_y}{EI_y} \right] \underline{e}_y + \left[ -\frac{x}{2} (x - 2L) \frac{F_y}{EI_z} + x \frac{C_z}{EI_z} \right] \underline{e}_z \right\} \\ &\quad \wedge \left\{ y \underline{e}_y + z \underline{e}_z \right\} + O(e^2).\end{aligned}$$

Ainsi, le champ de déplacement (6.23) associé à la solution de Saint-Venant *ne respecte pas, en général, la cinématique poutre* définie et étudiée au chapitre 1, en particulier à cause du gauchissement que subissent les sections droites dans la transformation et dont la cinématique poutre du chapitre 1 ne peut pas rendre compte. En revanche, lorsque l'on *ne conserve que les termes dominants à la limite asymptotique des grands élancements*, le champ de déplacement asymptotique obtenu est bien de la forme :

$$\underline{\xi}(x, y, z) = \bar{\underline{\xi}}(x) + \underline{\theta}(x) \wedge (y \underline{e}_y + z \underline{e}_z),$$

c'est-à-dire qu'il est bien un champ de déplacement linéarisé de la cinématique poutre du chapitre 1. Ce résultat est très important sur le plan théorique. Il établit que la *théorie des poutres est une théorie asymptotique de l'élasticité tridimensionnelle à la limite des grands élancements*, et démontre la cohérence entre les deux points de vue.

D'un point de vue pratique, ce résultat permet également d'identifier la loi de comportement d'une poutre élastique issue de la considération d'un cylindre élastique homogène et isotrope. En effet, considérant l'équilibre, dans le cadre de l'élasticité tridimensionnelle linéarisée, d'un cylindre élastique homogène isotrope soumis exclusivement à des efforts surfaciques sur les sections extrêmes, et dont le torseur sur une des sections d'extrémité a pour éléments de réduction :

$$\mathbb{T} = \left[ F_x \underline{e}_x + F_y \underline{e}_y + F_z \underline{e}_z, C_x \underline{e}_x + C_y \underline{e}_y + C_z \underline{e}_z \right],\tag{6.27}$$

en le centre d'inertie géométrique de la section en question, on a montré que le déplacement d'équilibre est asymptotiquement égal, à la limite des grands élancements, au distributeur

de déplacement linéarisé défini par :

$$\begin{aligned}\bar{\underline{\xi}}(x) &= \left[ \frac{x^2}{6}(3L-x)\frac{F_y}{EI_z} + \frac{x^2}{2}\frac{C_z}{EI_z} \right] \underline{e}_y + \left[ \frac{x^2}{6}(3L-x)\frac{F_z}{EI_y} - \frac{x^2}{2}\frac{C_y}{EI_y} \right] \underline{e}_z, \\ \underline{\theta}(x) &= \frac{2(1+\nu)C_x}{EJ} x \underline{e}_x + \left[ \frac{x}{2}(x-2L)\frac{F_z}{EI_y} + x\frac{C_y}{EI_y} \right] \underline{e}_y \\ &\quad + \left[ -\frac{x}{2}(x-2L)\frac{F_y}{EI_z} + x\frac{C_z}{EI_z} \right] \underline{e}_z,\end{aligned}\tag{6.28}$$

(modulo un champ de déplacement rigidifiant infinitésimal arbitraire, c'est-à-dire un distributeur de déplacement linéarisé constant). On constate alors que les expressions linéarisées de la liaison interne d'inextensibilité, d'une part :

$$\frac{d\bar{\underline{\xi}}_x(x)}{dx} = 0,$$

et de la liaison interne de Navier-Bernoulli, d'autre part :

$$\frac{d\bar{\underline{\xi}}_y(x)}{dx} - \theta_z(x) = 0, \quad \frac{d\bar{\underline{\xi}}_z(x)}{dx} + \theta_y(x) = 0,$$

sont acquises. Pour identifier la loi de comportement, on peut alors calculer l'équilibre d'une poutre rectiligne élastique de comportement quelconque  $\underline{\underline{A}}$ , obéissant aux liaisons internes d'inextensibilité et de Navier-Bernoulli, et soumise au torseur d'effort extérieur (6.27), puis identifier les coefficients de  $\underline{\underline{A}}$  à partir des expressions (6.28). On peut également, et cela donne le même résultat, identifier la contrainte généralisée associée à la modélisation poutre, en écrivant directement l'équilibre de la partie aval du cylindre en terme de torseurs :

$$\begin{aligned}\left[ \underline{\underline{R}}(x), \underline{\underline{M}}(x) \right] &= \left[ F_x \underline{e}_x + F_y \underline{e}_y + F_z \underline{e}_z, \right. \\ &\quad \left. C_x \underline{e}_x + \{ C_y + (x-L)F_z \} \underline{e}_y + \{ C_z - (x-L)F_y \} \underline{e}_z \right],\end{aligned}$$

puis identifier l'application linéaire  $\underline{\underline{A}}$  :

$$\frac{d}{dx} \left\{ \bar{\underline{\xi}}(x), \underline{\theta}(x) \right\} \xrightarrow{\underline{\underline{A}}} \left[ \underline{\underline{R}}(x), \underline{\underline{M}}(x) \right].$$

Il vient alors :

$$\begin{aligned}M_x(x) &= \frac{EJ}{2(1+\nu)} \frac{d}{dx} \theta_x(x), \\ M_y(x) &= EI_y \frac{d}{dx} \theta_y(x), \\ M_z(x) &= EI_z \frac{d}{dx} \theta_z(x),\end{aligned}$$

où  $J$  est l'inertie de torsion (ne dépendant que de la géométrie de la section) définie par la formule (6.20). Cette loi de comportement, étant associée aux liaisons internes d'inextensibilité et de Navier-Bernoulli, laisse indéterminées les trois composantes de  $\underline{\underline{R}}$  (multiplicateur de Lagrange associé à la liaison interne), leur détermination nécessitant la prise en compte

de l'équation du mouvement. Le couplage entre torsion et flexion simple exhibé, en général, par la solution de Saint-Venant a disparu à la limite asymptotique des grands élancements.

En résumé, la considération de la solution explicite de Saint-Venant conduit, dans le cas particulier de modèle de poutre bâti à partir de la considération d'un cylindre tridimensionnel *élané*, constitué d'un matériau élastique *homogène isotrope*, de module d'Young  $E$  et de module de cisaillement  $\mu$ , à adopter la loi de comportement :

$$\begin{aligned} M_x &= \mu J \frac{d}{dx} \theta_x, \\ M_y &= EI_y \frac{d}{dx} \theta_y, \\ M_z &= EI_z \frac{d}{dx} \theta_z, \end{aligned}$$

complétée par les liaisons internes d'inextensibilité et de Navier-Bernoulli. C'est la loi de comportement qui a été précédemment baptisée *loi de comportement standard inextensible*.

### Commentaires

- Comme la loi de comportement est locale, la loi de comportement standard inextensible pourra être utilisée dans le cas où le solide n'est pas nécessairement cylindrique et où les constantes  $J$ ,  $I_y$ ,  $I_z$ , et même  $\mu$  et  $E$  sont (lentement<sup>7</sup>) variables en fonction de  $x$ . Dans le cas de poutre dont la ligne moyenne n'est pas rectiligne, cette loi de comportement sera encore pertinente, à condition de l'appliquer aux vecteurs  $\underline{M}(S)$  et  $d\underline{\theta}/dS$ , et à leurs composantes suivant les trois directions orthogonales définies par  $\underline{T}(S)$ , d'une part, et les directions (variables) principales d'inertie géométrique des sections droites, d'autre part. Ajoutons enfin que le tenseur des modules d'élasticité  $\underline{A}$  qui apparaît dans les équations du cadre d'analyse non-linéaire DI-RF (équations obtenues à la fin du chapitre 3) est *le même* que celui qui apparaît dans les équations du cadre d'analyse linéarisé TIEN (équations du chapitre 4). La loi de comportement proposée ici pourra donc être utilisée indifféremment dans les deux cadres d'analyse, pourvu que les hypothèses qui assurent sa pertinence soient acquises.
- En fait, l'analyse asymptotique du déplacement d'équilibre de la solution de Saint-Venant doit être amendée dans la circonstance particulière d'une poutre rectiligne sollicitée uniquement par des forces *axiales* aux extrémités. C'est le cas particulier  $F_y = F_z = C_x = C_y = C_z = 0$ , et le terme dominant dans l'expression (6.25) est alors le terme en  $e^2$ , et la loi de comportement s'écrit alors :

$$R_x = E|S| \frac{d\bar{\xi}_x}{dx}.$$

Cela a conduit certains auteurs à vouloir regrouper tous les cas en définissant la *loi*

---

<sup>7</sup>c'est-à-dire avec une distance caractéristique associée aux variations de ces quantités, grande devant le diamètre  $D$  des sections.

de comportement standard :

$$\begin{aligned} R_x &= E|\mathcal{S}| \frac{d\bar{\xi}_x}{dx}, \\ M_x &= \mu J \frac{d\theta_x}{dx}, \\ M_y &= EI_y \frac{d\theta_y}{dx}, \\ M_z &= EI_z \frac{d\theta_z}{dx}, \end{aligned}$$

complétée par la liaison interne de Navier-Bernoulli. L'analyse asymptotique de l'expression (6.25) montre que les lois de comportement standard et standard inextensible conduisent à des prédictions numériquement quasiment indiscernables, en dehors du cas  $F_y = F_z = C_x = C_y = C_z = 0$ , puisque ne différant qu'à l'ordre  $O(e^2)$  alors que le terme dominant est en  $O(e^4)$ . Cependant, on retiendra qu'en toute rigueur, l'analyse asymptotique montre que, en dehors du cas  $F_y = F_z = C_x = C_y = C_z = 0$ , c'est la loi de comportement standard inextensible qui s'impose. Une manière logiquement cohérente de regrouper tous les cas est de reprendre l'analyse asymptotique en remplaçant  $F_x$  par  $e\bar{F}_x$ . Cela revient à augmenter l'effort axial proportionnellement à l'élanement, de sorte que ses effets continuent à jouer au même ordre que ceux associés à la flexion, lorsque l'élanement devient arbitrairement grand. Remplaçant alors  $F_x$  par  $e\bar{F}_x$  dans l'expression (6.25) du champ de déplacement associé à la solution de Saint-Venant, on est alors amené à conserver une contribution de  $F_x$  dans le développement asymptotique (6.26) et l'on constate alors que ce nouveau développement asymptotique du champ de déplacement de la solution de Saint-Venant est le champ de déplacement qu'aurait fourni l'utilisation de la théorie des poutres de Navier-Bernoulli associée à la loi de comportement standard (et non pas standard inextensible). Ce point de vue, qui consiste donc à augmenter l'effort axial proportionnellement à l'élanement pour conserver, asymptotiquement, une raideur axiale finie sera adopté dans la section 6.5 qui traite des cylindres hétérogènes et/ou anisotropes.

- Le fait d'avoir établi la cohérence entre théorie linéarisée de l'élasticité des cylindres tridimensionnels (homogènes isotropes) et théorie linéarisée des poutres élastiques a une conséquence pratique très importante. En effet, après avoir mené l'analyse d'un problème d'élasto-statique dans le cadre de la théorie des poutres linéarisée (TIEN), on peut utiliser les formules (6.23) et (6.24) pour évaluer les déplacements et contraintes tridimensionnels (hors du voisinage des extrémités) : on parle de *localisation*. Cela permet, en particulier, de s'assurer que la distribution des contraintes est compatible avec un critère d'élasticité donné dans le cas d'un problème de dimensionnement.

## 6.5 Loi de comportement de poutre hétérogène et/ou anisotrope

### 6.5.1 Position du problème

Dans cette section, on considère à nouveau le tronçon de cylindre  $\Omega$ , dont on note encore  $L$  la longueur et  $D$  le diamètre d'une section droite quelconque. On utilisera le même repérage cartésien orthonormé  $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$  avec  $O$  placé dans une des sections d'extrémité,

et  $\underline{e}_x$  suivant l'axe du cylindre. On étudie toujours l'équilibre de ce cylindre, dans le cadre de l'élasticité tridimensionnelle linéarisée sous l'hypothèse de la transformation infinitésimale à partir de l'état naturel TIEN, lorsqu'il est sollicité exclusivement par des distributions d'effort surfacique imposées sur les sections d'extrémité. Le cylindre sera encore supposé suffisamment élancé pour que, compte-tenu du principe de Saint-Venant, on puisse ne supposer connue la distribution des efforts surfaciques qu'à travers la donnée des éléments de réduction :

$$\mathbb{T} = \left[ F_x \underline{e}_x + F_y \underline{e}_y + F_z \underline{e}_z, C_x \underline{e}_x + C_y \underline{e}_y + C_z \underline{e}_z \right], \quad (6.29)$$

de leur torseur sur la section extrême définie par  $x = L$  et exprimés en le point de coordonnées  $(L, 0, 0)$ . La différence avec le problème étudié dans la section précédente vient maintenant du fait que l'on ne suppose plus le matériau élastique homogène et isotrope, mais, cette fois-ci, anisotrope et éventuellement hétérogène dans la section (cas des poutres « sandwich »). La loi de comportement s'écrira donc ici, en toute généralité, sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}(x, y, z) = \underline{\underline{\Lambda}}(y, z) : \underline{\underline{\varepsilon}}(x, y, z),$$

où le tenseur des modules d'élasticité  $\underline{\underline{\Lambda}}$  satisfait, outre les conditions de symétrie habituelles, la propriété de définie positivité (6.4).

Comme précédemment, on souhaite mener une analyse asymptotique du déplacement d'équilibre à la limite des très grands élancements, dans le but d'identifier une loi de comportement de poutre élastique. La différence avec le cas homogène isotrope étudié dans la section précédente est que l'on ne dispose plus explicitement de la solution du problème d'équilibre dans le cadre de l'élasticité tridimensionnelle linéarisée. Utilisant à nouveau les variables d'espace adimensionnelles :

$$\tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{D}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{D},$$

ainsi que l'élancement :

$$e = \frac{L}{D},$$

on va néanmoins chercher à identifier les premiers termes d'un développement asymptotique du déplacement d'équilibre  $\underline{\underline{\xi}}$  sous la forme :

$$\frac{1}{L} \underline{\underline{\xi}}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = e^m \underline{\underline{\xi}}^0(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) + e^{m-1} \underline{\underline{\xi}}^1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) + e^{m-2} \underline{\underline{\xi}}^2(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) + \dots, \quad (6.30)$$

où l'on a décidé, comme dans la section 6.4, de rapporter toutes les longueurs à la référence  $L$  et où  $m$  est un entier dont on peut s'attendre qu'il soit égal à 4 compte-tenu de l'analyse menée dans la section 6.4. Les composantes du tenseur des déformations linéarisées  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  s'expriment en terme des variables d'espace adimensionnelles sous la forme :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{L} \frac{\partial \xi_x}{\partial \tilde{x}}, \\ \varepsilon_{x\alpha} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{L} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{D} \frac{\partial \xi_x}{\partial \tilde{\alpha}} \right), \\ \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{D} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial \tilde{\beta}} + \frac{1}{D} \frac{\partial \xi_\beta}{\partial \tilde{\alpha}} \right), \end{aligned} \quad (6.31)$$

pour  $\alpha, \beta \in \{y, z\}$ . Introduisant alors l'opérateur  $\underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}$  qui, à un champ de déplacement  $\underline{\underline{\xi}}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ , associe le tenseur des déformations linéarisées calculé en figeant formellement la dépendance vis-à-vis des variables  $\tilde{y}$  et  $\tilde{z}$  :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}(\underline{\underline{\xi}}') \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi'_x}{\partial \tilde{x}} & \frac{1}{2} \frac{\partial \xi'_y}{\partial \tilde{x}} & \frac{1}{2} \frac{\partial \xi'_z}{\partial \tilde{x}} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \xi'_y}{\partial \tilde{x}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \xi'_z}{\partial \tilde{x}} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ainsi que l'opérateur  $\underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}$  qui, au champ de déplacement  $\underline{\underline{\xi}}'$ , associe le tenseur des déformations linéarisées calculé en figeant formellement la dépendance vis-à-vis de la variable  $\tilde{x}$  :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\underline{\underline{\xi}}') \stackrel{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial \xi'_x}{\partial \tilde{y}} & \frac{1}{2} \frac{\partial \xi'_x}{\partial \tilde{z}} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \xi'_x}{\partial \tilde{y}} & \frac{\partial \xi'_y}{\partial \tilde{y}} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi'_y}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial \xi'_z}{\partial \tilde{y}} \right) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \xi'_x}{\partial \tilde{z}} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \xi'_y}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial \xi'_z}{\partial \tilde{y}} \right) & \frac{\partial \xi'_z}{\partial \tilde{z}} \end{pmatrix},$$

on a :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\xi}}') = \frac{1}{L} \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}(\underline{\underline{\xi}}') + e \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\underline{\underline{\xi}}') \right],$$

et le développement asymptotique du tenseur des déformations linéarisé  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  s'écrit maintenant :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = e^{m+1} \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\underline{\underline{\xi}}^0) + e^m \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}(\underline{\underline{\xi}}^0) + \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\underline{\underline{\xi}}^1) \right] + e^{m-1} \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}(\underline{\underline{\xi}}^1) + \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\underline{\underline{\xi}}^2) \right] + \dots \quad (6.32)$$

Pour passer au développement asymptotique du tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  (qui a la dimension d'une force divisée par une longueur au carré) en variables d'espace adimensionnelles, on continue de rapporter toutes les longueurs à la référence  $L$  et l'on supposera que l'hétérogénéité de comportement dans la section suit la mise-à-l'échelle de la section. Cela revient à travailler avec un tenseur des modules d'élasticité adimensionnel de la forme :

$$L^2 \underline{\underline{\Lambda}}(\tilde{y}, \tilde{z}),$$

On en déduit le développement asymptotique du tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  en fonction des coefficients  $\underline{\underline{\xi}}^i$  du développement asymptotique du déplacement  $\underline{\underline{\xi}}$  :

$$L^2 \underline{\underline{\sigma}} = L^2 e^{m+1} \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\underline{\underline{\xi}}^0) + L^2 e^m \underline{\underline{\Lambda}} : \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}(\underline{\underline{\xi}}^0) + \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\underline{\underline{\xi}}^1) \right] + L^2 e^{m-1} \underline{\underline{\Lambda}} : \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}(\underline{\underline{\xi}}^1) + \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\underline{\underline{\xi}}^2) \right] + \dots \quad (6.33)$$

Les conditions de chargement sur les sections extrêmes sont supposées être données seulement au sens de Saint-Venant, c'est-à-dire que seul le torseur  $\mathbb{T}$  des efforts surfaciques

sur la section  $\mathcal{S}_L$  est supposé connu. Plutôt que de supposer les six composantes de ses éléments de réduction au point  $(L, 0, 0)$  indépendantes de l'élancement  $e$ , comme on l'avait fait pour le cas homogène et isotrope dans l'analyse de la solution de Saint-Venant à la section 6.4, et comme le suggère la notation (6.29), on décide, dans l'espoir de faire jouer les effets d'extension au même ordre que les effets de flexion, de prendre la composante axiale de la force proportionnelle à l'élancement (et non constante) :

$$\mathbb{T} = \left[ e\bar{F}_x \underline{e}_x + F_y \underline{e}_y + F_z \underline{e}_z, C_x \underline{e}_x + C_y \underline{e}_y + C_z \underline{e}_z \right],$$

conformément à la remarque faite à la fin de la section 6.4. Bien entendu, dans tout contexte où on passera aux variables d'espace adimensionnalisées, les composantes  $C_x$ ,  $C_y$  et  $C_z$  (qui ont la dimension du produit d'une force par une longueur) devront être rapportées à la longueur de référence  $L$ .

L'identification des premiers termes du développement asymptotique (6.30) fera appel à certains résultats concernant les problèmes d'élasticité où seules interviennent deux variables d'espace. Nous décidons donc de reporter à la section 6.5.3 le calcul des premiers termes du développement asymptotique de  $\underline{\xi}$ , pour pouvoir faire l'inventaire des résultats nécessaires sur les problèmes d'élasticité à deux variables d'espace, dans la section suivante.

### 6.5.2 Problèmes d'élasticité à deux variables d'espace

Dans cette section, on souhaite rassembler quelques résultats concernant l'analyse des problèmes d'équilibre en *élasticité tridimensionnelle* linéarisée où les champs inconnus *ne dépendent que de deux variables d'espace*. On cherche ainsi un champ de déplacement  $\underline{\xi}$  à trois composantes ne dépendant que de deux variables d'espace :

$$\underline{\xi}(\tilde{y}, \tilde{z}) = \xi_x(\tilde{y}, \tilde{z}) \underline{e}_x + \xi_y(\tilde{y}, \tilde{z}) \underline{e}_y + \xi_z(\tilde{y}, \tilde{z}) \underline{e}_z,$$

solution du problème d'équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\varepsilon}}(\tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{\nabla}} \underline{\xi}(\tilde{y}, \tilde{z}) + {}^t \underline{\underline{\nabla}} \underline{\xi}(\tilde{y}, \tilde{z}) \right), \\ \underline{\underline{\sigma}}(\tilde{y}, \tilde{z}) = \underline{\underline{\Lambda}}(\tilde{y}, \tilde{z}) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\tilde{y}, \tilde{z}), \\ \underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}}(\tilde{y}, \tilde{z}) + \underline{F}^d(\tilde{y}, \tilde{z}) = \underline{0}, \\ \underline{\underline{\sigma}}(\tilde{y}, \tilde{z}) \cdot \underline{n} = \underline{0}, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{pour } (\tilde{y}, \tilde{z}) \in \tilde{\mathcal{S}}, \\ \\ \\ \text{pour } (\tilde{y}, \tilde{z}) \in \partial \tilde{\mathcal{S}}, \end{array}$$

où  $\underline{F}^d(\tilde{y}, \tilde{z})$  est un champ volumique de force imposé et  $\underline{n}$ , la normale unitaire sortante au cylindre  $\Omega$  qui se confond avec la normale à la section normalisée  $\tilde{\mathcal{S}}$  dans son plan. On suppose que le tenseur des modules d'élasticité  $\underline{\underline{\Lambda}}$  satisfait aux propriétés de symétries habituelles ainsi qu'à la propriété de définie positivité (6.4).

Multipliant, comme à l'accoutumée, l'équation locale par un champ  $\hat{\underline{u}}$  arbitraire, l'utilisation de la formule de Stokes, conjointement à la condition de bord libre, fournit la formulation faible :

$$\forall \hat{\underline{u}} \in H^1(\tilde{\mathcal{S}}; \mathbb{R}^3), \quad \int_{\tilde{\mathcal{S}}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}) : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\hat{\underline{u}}) = \int_{\tilde{\mathcal{S}}} \underline{F}^d \cdot \hat{\underline{u}}.$$

qui est équivalente à la formulation locale.

L'unicité de solution ne peut manifestement être espérée que *modulo* l'addition d'un champ de déplacement rigidifiant infinitésimal qui doit en outre vérifier la condition d'invariance vis-à-vis de la troisième variable. De tels champs s'écrivent :

$$t_x \underline{e}_x + t_y \underline{e}_y + t_z \underline{e}_z + w_x \underline{e}_x \wedge (\tilde{y} \underline{e}_y + \tilde{z} \underline{e}_z), \quad (6.34)$$

et forment donc un espace vectoriel de dimension 4 que l'on notera  $\mathcal{R}'$  dans la suite. L'analyse de l'existence et l'unicité des solutions se fait alors à partir de la formulation faible, en mettant en œuvre la même technique (à des adaptations mineures convenables près) que celle évoquée à la section 6.1 pour le problème général gouvernant l'équilibre en élasticité tridimensionnelle linéarisée. Cela permet de démontrer le résultat suivant.

- Si la condition de compatibilité :

$$\forall \underline{\xi} \in \mathcal{R}', \quad \int_{\tilde{\mathcal{S}}} \underline{F}^d \cdot \underline{\xi} = 0, \quad (6.35)$$

c'est-à-dire si :

$$\int_{\tilde{\mathcal{S}}} F_x^d = \int_{\tilde{\mathcal{S}}} F_y^d = \int_{\tilde{\mathcal{S}}} F_z^d = \int_{\tilde{\mathcal{S}}} \tilde{y} F_z^d - \tilde{z} F_y^d = 0,$$

(nullité de la résultante ainsi que de la composante suivant  $\underline{e}_x$  du moment), *n'est pas satisfaite*, alors il n'existe aucune solution au problème d'équilibre.

- Si la condition de compatibilité (6.35) est satisfaite, alors il existe une solution  $\underline{\xi} \in H^1(\tilde{\mathcal{S}}; \mathbb{R}^3)$ , et cette solution est unique *modulo* l'addition d'un champ de déplacement rigidifiant infinitésimal appartenant à  $\mathcal{R}'$ . En particulier, les champs de déformation linéarisée  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  et de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  sont uniques. Un champ de déplacement arbitraire  $\underline{\xi}' \in H^1(\tilde{\mathcal{S}}; \mathbb{R}^3)$  est alors solution du problème considéré si et seulement s'il réalise le minimum de l'énergie potentielle totale :

$$E_p(\underline{\xi}') = \frac{1}{2} \int_{\tilde{\mathcal{S}}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}') : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}') - \int_{\tilde{\mathcal{S}}} \underline{F}^d \cdot \underline{\xi}'.$$

**Remarque.** Les résultats précédents se généralisent à la circonstance où, au lieu de se limiter aux seules formes linéaires du type :

$$\underline{\xi}' \longrightarrow \int_{\tilde{\mathcal{S}}} \underline{F}^d \cdot \underline{\xi}',$$

on considère n'importe quelle forme linéaire  $\mathcal{L}(\underline{\xi}')$  continue sur  $H^1(\tilde{\mathcal{S}}; \mathbb{R}^3)$ , à condition d'écrire la condition de compatibilité (6.35) sous la forme :

$$\forall \underline{\xi}' \in \mathcal{R}', \quad \mathcal{L}(\underline{\xi}') = 0. \quad (6.36)$$

En particulier, tous les résultats précédents sont vrais lorsque l'on considère la forme linéaire :

$$\mathcal{L}(\underline{\xi}') = \int_{\tilde{\mathcal{S}}} \underline{\underline{\sigma}}^d : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}'),$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}^d$  est un champ tensoriel d'ordre 2 quelconque, de carré intégrable sur  $\tilde{\mathcal{S}}$ . On remarquera qu'une telle forme linéaire respecte automatiquement la condition de compatibilité (6.36).



### 6.5.3 Calcul du développement asymptotique

On va maintenant chercher à identifier les premiers termes du développement asymptotique (6.30), et, en particulier les deux premiers termes  $\underline{\xi}^0$  et  $\underline{\xi}^1$ .

**Étape 1.** On écrit l'équilibre global du cylindre à l'aide de la formulation faible en déplacement (6.9) en utilisant une fonction-test  $\underline{\xi}'$ , identiquement nulle sur les deux sections extrêmes. Introduisant alors les variables d'espace adimensionnelles dans la formulation faible, il vient :

$$\forall \underline{\xi}' \in H^1(]0, 1[ \times \tilde{\mathcal{S}}; \mathbb{R}^3), \quad \text{tel que } \underline{\xi}'(0, \tilde{y}, \tilde{z}) = \underline{\xi}'(1, \tilde{y}, \tilde{z}) = \underline{0},$$

$$\int_{]0, 1[ \times \tilde{\mathcal{S}}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}') : \underline{\underline{\Lambda}} : \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}(\underline{\xi}') + e_{\underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}}(\underline{\xi}') \right] = 0. \quad (6.37)$$

Faisant alors le choix :

$$\underline{\xi}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \theta(\tilde{x}) \hat{\underline{\xi}}(\tilde{y}, \tilde{z}), \quad (6.38)$$

où  $\theta(0) = \theta(1) = 0$ , on obtient alors, à l'ordre principal, compte-tenu de l'expression (6.32) :

$$\forall \hat{\underline{\xi}} \in H^1(\tilde{\mathcal{S}}; \mathbb{R}^3), \quad \int_{\tilde{\mathcal{S}}} \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\hat{\underline{\xi}}) : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\hat{\underline{\xi}}) = 0.$$

On constate ainsi, que pour chaque valeur de  $\tilde{x}$ , le champ  $\underline{\xi}^0(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  est solution d'un problème d'élasticité défini sur la section normalisée  $\tilde{\mathcal{S}}$ , du type de celui étudié dans la section 6.5.2 avec le choix  $\underline{F}^d \equiv 0$ . Les résultats énoncés dans la section 6.5.2 permettent alors d'affirmer :

$$\underline{\xi}^0(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = t_x^0(\tilde{x}) \underline{e}_x + t_y^0(\tilde{x}) \underline{e}_y + t_z^0(\tilde{x}) \underline{e}_z + w^0(\tilde{x}) \underline{e}_x \wedge (\tilde{y} \underline{e}_y + \tilde{z} \underline{e}_z).$$

On montrera par la suite que  $t_x^0$  et  $w^0$  sont constants et, par conséquent, définissent un déplacement rigidifiant infinitésimal d'ensemble, ce qui autorise à ne retenir que :

$$\underline{\xi}^0(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = t_y^0(\tilde{x}) \underline{e}_y + t_z^0(\tilde{x}) \underline{e}_z,$$

où les fonctions  $t_y^0(\tilde{x})$  et  $t_z^0(\tilde{x})$ , qui définissent une flexion, sont pour l'instant inconnues.

**Étape 2.** Au vu de l'étape 1, on a :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\underline{\xi}^0) \equiv \underline{0},$$

et le premier terme de chacun des développements (6.32) et (6.33) est donc nul. Reprenant alors la formulation faible (6.37) en déplacement de l'équilibre global du cylindre avec le même choix (6.38) de fonction-test, on obtient maintenant à l'ordre principal :

$$\forall \hat{\underline{\xi}} \in H^1(\tilde{\mathcal{S}}; \mathbb{R}^3), \quad \int_{\tilde{\mathcal{S}}} \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}(\hat{\underline{\xi}}) + \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\hat{\underline{\xi}}) \right] : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\hat{\underline{\xi}}) = 0,$$

où, compte-tenu des résultats de la section 6.5.2, la solution  $\underline{\xi}^1$  est identifiée « à vue » sous la forme :

$$\underline{\xi}^1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \left[ t_x^1(\tilde{x}) - \tilde{y} \frac{dt_y^0}{d\tilde{x}}(\tilde{x}) - \tilde{z} \frac{dt_z^0}{d\tilde{x}}(\tilde{x}) \right] \underline{e}_x + t_y^1(\tilde{x}) \underline{e}_y + t_z^1(\tilde{x}) \underline{e}_z$$

$$+ w^1(\tilde{x}) \underline{e}_x \wedge (\tilde{y} \underline{e}_y + \tilde{z} \underline{e}_z).$$

On constate alors :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}(\underline{\xi}^0) + \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\underline{\xi}^1) = \underline{\underline{0}}. \quad (6.39)$$

et ce sont maintenant les *deux* premiers termes de chacun des développements asymptotiques (6.32) et (6.33) qui sont donc nuls. En particulier, la contrainte est donc, *au maximum*, d'ordre  $m - 1$  en l'élanement  $e$ .

**Étape 3.** À ce stade, les deux premiers termes du développement asymptotique (6.30) ne font plus intervenir que les six fonctions inconnues  $t_y^0(\tilde{x})$ ,  $t_z^0(\tilde{x})$ ,  $t_x^1(\tilde{x})$ ,  $t_y^1(\tilde{x})$ ,  $t_z^1(\tilde{x})$  et  $w^1(\tilde{x})$ . Pour pouvoir espérer identifier ces inconnues cinématiques en termes des données statiques  $F_x = e\bar{F}_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$ ,  $C_x$ ,  $C_y$  et  $C_z$ , il faut donc poursuivre l'étude du développement asymptotique aux ordres supérieurs pour pouvoir identifier le premier terme non nul du développement (6.33) de la contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$ .

Tenant compte de (6.39) dans la formulation faible (6.37) en déplacement de l'équilibre global du cylindre avec le même choix (6.38) de fonction-test, on obtient maintenant à l'ordre principal :

$$\forall \hat{\underline{\xi}} \in H^1(\tilde{\mathcal{S}}; \mathbb{R}^3), \quad \int_{\tilde{\mathcal{S}}} \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}(\underline{\xi}^1) + \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\underline{\xi}^2) \right] : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\hat{\underline{\xi}}) = 0. \quad (6.40)$$

Dans le problème (6.40) ci-dessus,  $\underline{\xi}^2$  joue le rôle de l'inconnue et  $\underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}(\underline{\xi}^1)$ , dont la matrice est :

$$\begin{pmatrix} t_x^{1'}(\tilde{x}) - \tilde{y} t_y^{0''}(\tilde{x}) - \tilde{z} t_z^{0''}(\tilde{x}) & \frac{1}{2} [t_y^{1'}(\tilde{x}) - \tilde{z} w^{1'}(\tilde{x})] & \frac{1}{2} [t_z^{1'}(\tilde{x}) + \tilde{y} w^{1'}(\tilde{x})] \\ \frac{1}{2} [t_y^{1'}(\tilde{x}) - \tilde{z} w^{1'}(\tilde{x})] & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} [t_z^{1'}(\tilde{x}) + \tilde{y} w^{1'}(\tilde{x})] & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

le rôle des données. On vérifiera à l'étape 4 qu'il suffit qu'une des deux fonctions  $t_y^{0''}(\tilde{x})$  ou  $t_z^{0''}(\tilde{x})$  ne soit pas identiquement nulle pour que le terme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}(\underline{\xi}^1) + \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\underline{\xi}^2),$$

soit non nul et donc que le premier terme non nul du développement (6.33) de la contrainte adimensionnée  $L^2 \underline{\underline{\sigma}}$  soit le terme d'ordre  $e^{m-1}$ . Dans toute la suite, ce terme sera noté  $e^{m-1} \underline{\underline{\sigma}}^1$ , où  $\underline{\underline{\sigma}}^1$  est donc donné par :

$$\underline{\underline{\sigma}}^1 = L^2 \underline{\underline{\Lambda}} : \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}(\underline{\xi}^1) + \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\underline{\xi}^2) \right]. \quad (6.41)$$

De l'équilibre du tronçon de cylindre en aval de  $x$ , on déduit :

$$\begin{aligned} e\bar{F}_x &= \int_{\mathcal{S}} \sigma_{xx}(x, y, z) \, dy \, dz, \\ F_y &= \int_{\mathcal{S}} \sigma_{xy}(x, y, z) \, dy \, dz, \\ F_z &= \int_{\mathcal{S}} \sigma_{xz}(x, y, z) \, dy \, dz, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_x &= \int_S [y \sigma_{xz}(x, y, z) - z \sigma_{xy}(x, y, z)] dy dz, \\
C_y - (L - x)F_z &= \int_S [z \sigma_{xx}(x, y, z) - x \sigma_{xz}(x, y, z)] dy dz, \\
C_z + (L - x)F_y &= \int_S [x \sigma_{xy}(x, y, z) - y \sigma_{xx}(x, y, z)] dy dz.
\end{aligned}$$

Passant aux variables d'espace adimensionnelles, il vient :

$$\begin{aligned}
e \bar{F}_x &= L^2 e^{-2} \int_{\tilde{S}} \sigma_{xx}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) d\tilde{y} d\tilde{z}, \\
F_y &= L^2 e^{-2} \int_{\tilde{S}} \sigma_{xy}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) d\tilde{y} d\tilde{z}, \\
F_z &= L^2 e^{-2} \int_{\tilde{S}} \sigma_{xz}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) d\tilde{y} d\tilde{z}, \\
\frac{C_x}{L} &= L^2 e^{-3} \int_{\tilde{S}} [\tilde{y} \sigma_{xz}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) - \tilde{z} \sigma_{xy}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})] d\tilde{y} d\tilde{z}, \\
\frac{C_y}{L} - (1 - \tilde{x})F_z &= L^2 e^{-3} \int_{\tilde{S}} [\tilde{z} \sigma_{xx}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) - e \tilde{x} \sigma_{xz}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})] d\tilde{y} d\tilde{z}, \\
\frac{C_z}{L} + (1 - \tilde{x})F_y &= L^2 e^{-3} \int_{\tilde{S}} [e \tilde{x} \sigma_{xy}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) - \tilde{y} \sigma_{xx}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})] d\tilde{y} d\tilde{z}.
\end{aligned}$$

En se reportant au développement (6.33) de  $L^2 \underline{\underline{\sigma}}$ , et rappelant que ses deux premiers termes sont nuls alors que le troisième ne l'est pas, en général, il est alors clair que  $m = 4$ , comme attendu, d'une part, et que, nécessairement il faut :

$$\begin{aligned}
\bar{F}_x &= \int_{\tilde{S}} \sigma_{xx}^1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) d\tilde{y} d\tilde{z}, \\
0 &= \int_{\tilde{S}} \sigma_{xy}^1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) d\tilde{y} d\tilde{z}, \\
0 &= \int_{\tilde{S}} \sigma_{xz}^1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) d\tilde{y} d\tilde{z}, \\
\frac{C_x}{L} &= \int_{\tilde{S}} [\tilde{y} \sigma_{xz}^1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) - \tilde{z} \sigma_{xy}^1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})] d\tilde{y} d\tilde{z}, \\
\frac{C_y}{L} - (1 - \tilde{x})F_z &= \int_{\tilde{S}} \tilde{z} \sigma_{xx}^1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) d\tilde{y} d\tilde{z}, \\
\frac{C_z}{L} + (1 - \tilde{x})F_y &= - \int_{\tilde{S}} \tilde{y} \sigma_{xx}^1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) d\tilde{y} d\tilde{z},
\end{aligned} \tag{6.42}$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}^1$  est donnée par la formule (6.41). Pour chaque valeur de  $\tilde{x}$ , on voit ainsi apparaître six paramètres cinématiques :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1(\tilde{x}) &= t_x^1(\tilde{x}), & \mathcal{E}_4(\tilde{x}) &= w^1(\tilde{x}), \\
\mathcal{E}_2(\tilde{x}) &= t_y^1(\tilde{x}), & \mathcal{E}_5(\tilde{x}) &= -t_z^{0''}(\tilde{x}), \\
\mathcal{E}_3(\tilde{x}) &= t_z^1(\tilde{x}), & \mathcal{E}_6(\tilde{x}) &= t_y^{0''}(\tilde{x}),
\end{aligned}$$

et six paramètres statiques :

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1(\tilde{x}) &= \int_{\tilde{S}} \sigma_{xx}^1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \, d\tilde{y} \, d\tilde{z}, \\
\mathcal{T}_2(\tilde{x}) &= \int_{\tilde{S}} \sigma_{xy}^1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \, d\tilde{y} \, d\tilde{z}, \\
\mathcal{T}_3(\tilde{x}) &= \int_{\tilde{S}} \sigma_{xz}^1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \, d\tilde{y} \, d\tilde{z}, \\
\mathcal{T}_4(\tilde{x}) &= \int_{\tilde{S}} [\tilde{y} \sigma_{xz}^1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) - \tilde{z} \sigma_{xy}^1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})] \, d\tilde{y} \, d\tilde{z}, \\
\mathcal{T}_5(\tilde{x}) &= \int_{\tilde{S}} \tilde{z} \sigma_{xx}^1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \, d\tilde{y} \, d\tilde{z}, \\
\mathcal{T}_6(\tilde{x}) &= - \int_{\tilde{S}} \tilde{y} \sigma_{xx}^1(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \, d\tilde{y} \, d\tilde{z}.
\end{aligned}$$

Comme la matrice de  $\underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}(\underline{\underline{\xi}}^1)$  s'exprime en fonction des  $\mathcal{E}_i(\tilde{x})$  sous la forme :

$$\begin{pmatrix}
\mathcal{E}_1(\tilde{x}) - \tilde{y} \mathcal{E}_6(\tilde{x}) + \tilde{z} \mathcal{E}_5(\tilde{x}) & \frac{1}{2} [\mathcal{E}_2(\tilde{x}) - \tilde{z} \mathcal{E}_4(\tilde{x})] & \frac{1}{2} [\mathcal{E}_3(\tilde{x}) + \tilde{y} \mathcal{E}_4(\tilde{x})] \\
\frac{1}{2} [\mathcal{E}_2(\tilde{x}) - \tilde{z} \mathcal{E}_4(\tilde{x})] & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} [\mathcal{E}_3(\tilde{x}) + \tilde{y} \mathcal{E}_4(\tilde{x})] & 0 & 0
\end{pmatrix}, \quad (6.43)$$

la résolution du problème (6.40), suivant l'analyse qui en est faite à la section 6.5.2, fournit donc  $\underline{\underline{\xi}}^2$  en fonction des  $\mathcal{E}_i$  modulo un champ du type (6.34) près. En particulier,  $\underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\underline{\underline{\xi}}^2)$ , et donc  $\underline{\underline{\sigma}}^1$ , est déterminé de façon unique par la connaissance des  $\mathcal{E}_i$ . Comme le problème résolu est linéaire, on en déduit l'existence d'une matrice  $\tilde{A}_{ij}$  d'ordre 6 (évidemment indépendante de  $\tilde{x}$ ) telle que :

$$\mathcal{T}_i(\tilde{x}) = \tilde{A}_{ij} \mathcal{E}_j(\tilde{x}).$$

Comme l'implémentation numérique de la résolution du problème (6.40) ne pose aucune difficulté, il en est de même du calcul numérique d'une valeur approchée des  $\tilde{A}_{ij}$ .

**Étape 4. Étude des propriétés de la matrice des  $\tilde{A}_{ij}$ .** Considérons deux systèmes de données  $\mathcal{E}_i$  (calculé à partir de  $\underline{\underline{\xi}}^1$ ) et  $\bar{\mathcal{E}}_j$  (calculé à partir de  $\bar{\underline{\underline{\xi}}}^1$ ) pour le problème (6.40), et notons  $\underline{\underline{\xi}}^2$  et  $\bar{\underline{\underline{\xi}}}^2$  les solutions correspondantes. Compte-tenu de la définition (6.41), on voit que :

$$L^2 \int_{\tilde{S}} [\underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}(\underline{\underline{\xi}}^1) + \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\underline{\underline{\xi}}^2)] : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}(\bar{\underline{\underline{\xi}}}^1) = \int_{\tilde{S}} \underline{\underline{\sigma}}^1 : \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}(\bar{\underline{\underline{\xi}}}^1) = \mathcal{T}_i \bar{\mathcal{E}}_i,$$

(convention de sommation sur les indices répétés) en vertu de la définition des  $\mathcal{T}_i$  en fonction de  $\underline{\underline{\sigma}}^1$  et des  $\bar{\mathcal{E}}_j$  en fonction de  $\bar{\underline{\underline{\xi}}}^1$ . De plus en choisissant  $\bar{\underline{\underline{\xi}}}^2$  comme fonction-test dans le problème (6.40), il vient :

$$L^2 \int_{\tilde{S}} [\underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}(\underline{\underline{\xi}}^1) + \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\underline{\underline{\xi}}^2)] : \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\bar{\underline{\underline{\xi}}}^2) = 0.$$

En sommant les deux identités obtenues, on a montré :

$$\mathcal{E}_i \tilde{A}_{ij} \bar{\mathcal{E}}_j = L^2 \int_{\tilde{\mathcal{S}}} \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}(\underline{\xi}^1) + \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\underline{\xi}^2) \right] : \underline{\underline{\Lambda}} : \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}(\underline{\xi}^1) + \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\underline{\xi}^2) \right] = \bar{\mathcal{E}}_i \tilde{A}_{ij} \mathcal{E}_j, \quad (6.44)$$

c'est-à-dire que la matrice des  $\tilde{A}_{ij}$  est *symétrique* et *positive*.

Considérons maintenant le cas où tous les  $\mathcal{E}_i$  sont nuls sauf  $\mathcal{E}_2$  et  $\mathcal{E}_3$ . Il est alors immédiat de vérifier que la solution  $\underline{\xi}^2$  du problème (6.40) correspondant est donnée par :

$$\underline{\xi}^2 = -(\mathcal{E}_2 \tilde{y} + \mathcal{E}_3 \tilde{z}) \underline{e}_x,$$

*modulo* un champ du type (6.34) près. En particulier :

$$\underline{\underline{\sigma}}^1 = L^2 \underline{\underline{\Lambda}} : \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}(\underline{\xi}^1) + \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\underline{\xi}^2) \right] = \underline{\underline{0}},$$

et tous les  $\mathcal{T}_i$  sont donc nuls. On a donc montré :

$$\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad \tilde{A}_{i2} = \tilde{A}_{i3} = 0 = \tilde{A}_{2i} = \tilde{A}_{3i}, \quad (6.45)$$

et, en particulier, la matrice des  $\tilde{A}_{ij}$  n'est pas définie.

Nous allons cependant montrer que la matrice réduite :

$$\tilde{A}_{IJ}, \quad I, J \in \{1, 4, 5, 6\}, \quad (6.46)$$

(nous convenons dès maintenant que les indices majuscules prendront leurs valeurs seulement dans  $\{1, 4, 5, 6\}$ ), est *définie*. Pour cela, il suffit de montrer qu'un quadruplet de  $\mathcal{E}_I$  satisfaisant :

$$\mathcal{E}_I \tilde{A}_{IJ} \mathcal{E}_J = 0, \quad (6.47)$$

est nécessairement identiquement nul. Supposons donc (6.47) réalisée. Prenant alors  $\mathcal{E}_2$  et  $\mathcal{E}_3$  quelconques, on déduit alors de l'hypothèse et de l'identité (6.44) que :

$$\int_{\tilde{\mathcal{S}}} \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}(\underline{\xi}^1) + \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\underline{\xi}^2) \right] : \underline{\underline{\Lambda}} : \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}(\underline{\xi}^1) + \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\underline{\xi}^2) \right] = 0,$$

puis, compte-tenu de l'hypothèse (6.4) de définie positivité du tenseur  $\underline{\underline{\Lambda}}$  des modules d'élasticité :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}(\underline{\xi}^1) + \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\underline{\xi}^2) = \underline{\underline{0}}.$$

La composante suivant  $\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$  de ce tenseur se réduit à celle de  $\underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}(\underline{\xi}^1)$  qui est donc identiquement nulle :

$$\mathcal{E}_1 - \tilde{y} \mathcal{E}_6 + \tilde{z} \mathcal{E}_5 \equiv 0.$$

On en déduit :

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_5 = \mathcal{E}_6 = 0. \quad (6.48)$$

La nullité des composantes suivant  $\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y$  et  $\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z$  s'écrit alors :

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{E}_2 - \tilde{z} \mathcal{E}_4 + \frac{\partial \mathcal{E}_x^2}{\partial \tilde{y}}, \\ 0 &= \mathcal{E}_3 + \tilde{y} \mathcal{E}_4 + \frac{\partial \mathcal{E}_x^2}{\partial \tilde{z}}. \end{aligned}$$

Dérivant la deuxième de ces identités par rapport à  $\tilde{y}$  et lui retranchant la première dérivée par rapport à  $\tilde{z}$ , il vient :

$$\mathcal{E}_4 = 0,$$

qui, avec les identités (6.48), achève de fournir le résultat cherché.

**Étape 5. Calcul des quatre fonctions  $t_y^{0''}(\tilde{x})$ ,  $t_z^{0''}(\tilde{x})$ ,  $t_x^{1'}(\tilde{x})$  et  $w^{1'}(\tilde{x})$ .** On revient sur l'expression (6.42) des conditions de chargement au sens de Saint-Venant, qui stipule donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1(\tilde{x}) &= \bar{F}_x, & \mathcal{T}_4(\tilde{x}) &= \frac{C_x}{L}, \\ \mathcal{T}_2(\tilde{x}) &= 0, & \mathcal{T}_5(\tilde{x}) &= \frac{C_y}{L} - (1 - \tilde{x})F_z, \\ \mathcal{T}_3(\tilde{x}) &= 0, & \mathcal{T}_6(\tilde{x}) &= \frac{C_z}{L} + (1 - \tilde{x})F_y, \end{aligned} \quad (6.49)$$

Rappelant que  $\mathcal{T}_i = \tilde{A}_{ij}\mathcal{E}_j$ , on voit que les conditions portant sur  $\mathcal{T}_2$  et  $\mathcal{T}_3$  sont compatibles avec les propriétés (6.45) démontrées pour la matrice des  $\tilde{A}_{ij}$ . D'autre part, la matrice réduite (6.46), étant symétrique définie positive, est inversible et l'on voit que ces conditions déterminent de façon unique les quatre fonctions  $t_y^{0''}(\tilde{x})$ ,  $t_z^{0''}(\tilde{x})$ ,  $t_x^{1'}(\tilde{x})$  et  $w^{1'}(\tilde{x})$  en fonction des six composantes des éléments de réduction de  $\mathbb{T}$ . À ce stade, les deux fonctions  $t_y^{1'}(\tilde{x})$  et  $t_z^{1'}(\tilde{x})$  restent cependant indéterminées. Pour les calculer, il faudrait poursuivre l'analyse du développement asymptotique à l'ordre supérieur.

**Étape 6. Démonstration de  $t_x^{0'}(\tilde{x}) = w^{0'}(\tilde{x}) = 0$ .** Si tel n'était pas le cas, on voit, en reproduisant l'analyse menée dans l'étape 3, que, dès lors, le terme :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}(\underline{\xi}^0) + \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\underline{\xi}^1),$$

n'est plus nul et qu'il s'ensuit alors  $m = 3$ . Ainsi, les contributions de  $t_x^{0'}(\tilde{x})$  et  $w^{0'}(\tilde{x})$  au développement asymptotique apparaissent comme des contributions d'ordre supérieur, ce qui est contradictoire avec le fait que  $e^m \underline{\xi}^0$  soit le premier terme non nul du développement de  $\underline{\xi}/L$ . Il en résulte qu'il faut nécessairement  $t_x^{0'}(\tilde{x}) = w^{0'}(\tilde{x}) = 0$ .

**Étape 7. Conclusion.** L'analyse menée jusqu'ici a permis d'établir que les deux premiers termes du développement (6.30) s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \underline{\xi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) &= e^4 [t_y^0(\tilde{x}) \underline{e}_y + t_z^0(\tilde{x}) \underline{e}_z] + e^3 [t_x^1(\tilde{x}) \underline{e}_x + t_y^1(\tilde{x}) \underline{e}_y + t_z^1(\tilde{x}) \underline{e}_z] \\ &+ e^3 [w_x^1(\tilde{x}) \underline{e}_x - t_z^{0'}(\tilde{x}) \underline{e}_y + t_y^{0'}(\tilde{x}) \underline{e}_z] \wedge [\tilde{y} \underline{e}_y + \tilde{z} \underline{e}_z] + O(e^2), \end{aligned} \quad (6.50)$$

à un déplacement rigidifiant infinitésimal près. La première conclusion qui s'impose est que les deux premiers termes du développement asymptotique en l'élanement  $e$  du champ de déplacement tridimensionnel obéissent à la cinématique poutre linéarisée, décrite et étudiée dans le chapitre 1, et ce quelle que soit l'anisotropie et l'hétérogénéité du comportement élastique tridimensionnel dans la section. Le champ de distributeur de déplacement linéarisé

correspondant s'écrit :

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{\xi}_x(\tilde{x})}{L} &= e^3 t_x^1(\tilde{x}) + O(e^2), \\
\frac{\bar{\xi}_y(\tilde{x})}{L} &= e^4 t_y^0(\tilde{x}) + e^3 t_y^1(\tilde{x}) + O(e^2), \\
\frac{\bar{\xi}_z(\tilde{x})}{L} &= e^4 t_z^0(\tilde{x}) + e^3 t_z^1(\tilde{x}) + O(e^2), \\
\theta_x(\tilde{x}) &= e^4 w_x^1(\tilde{x}) + O(e^3), \\
\theta_y(\tilde{x}) &= -e^4 t_z^{0'}(\tilde{x}) + O(e^3), \\
\theta_z(\tilde{x}) &= e^4 t_y^{0'}(\tilde{x}) + O(e^3).
\end{aligned} \tag{6.51}$$

Dans les expressions (6.51), pour calculer les quatre fonctions :

$$\begin{aligned}
t_x^{1'}(\tilde{x}) &= \mathcal{E}_1(\tilde{x}) = \frac{1}{e^3} \frac{d\bar{\xi}_x}{dx}, \\
w_x^1(\tilde{x}) &= \mathcal{E}_4(\tilde{x}) = \frac{L}{e^4} \frac{d\theta_x}{dx}, \\
-t_z^{0''}(\tilde{x}) &= \mathcal{E}_5(\tilde{x}) = \frac{L}{e^4} \frac{d\theta_y}{dx}, \\
t_y^{0''}(\tilde{x}) &= \mathcal{E}_6(\tilde{x}) = \frac{L}{e^4} \frac{d\theta_z}{dx},
\end{aligned}$$

on est amené à résoudre le problème (6.40), où les coefficients de la matrice (6.43) de  $\underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}(\underline{\xi}^1)$  jouent le rôle de données et  $\underline{\xi}^2$  le rôle d'inconnue. La solution ne dépendant pas de la valeur des paramètres  $\mathcal{E}_2$  et  $\mathcal{E}_3$ , ceux-ci pourront être impunément fixés à 0. La résolution de ce problème dont l'analyse théorique peut être trouvée à la section 6.5.2 pourra être approchée concrètement à l'aide d'une discrétisation de la section normalisée  $\mathcal{S}$  en éléments finis. L'évaluation de la quantité :

$$L^2 \int_{\mathcal{S}} \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}(\underline{\xi}^1) + \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\underline{\xi}^2) \right] : \underline{\underline{\Lambda}} : \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{x})}(\underline{\xi}^1) + \underline{\underline{\varepsilon}}_{(\tilde{y}, \tilde{z})}(\underline{\xi}^2) \right] = \mathcal{E}_I \tilde{A}_{IJ} \mathcal{E}_J,$$

permettra alors l'identification de la matrice symétrique définie positive des  $\tilde{A}_{IJ}$  dont l'inversion permettra d'achever l'identification des  $\mathcal{E}_I$  en fonction des  $\mathcal{T}_J$  qui s'expriment en fonction des données statiques à l'aide des formules (6.49).

À l'ordre auquel on a arrêté l'analyse du développement asymptotique, les fonctions  $t_y^1(\tilde{x})$  et  $t_z^1(\tilde{x})$  sont restées indéterminées. On constate cependant sur les expressions (6.51), qu'à l'approximation consentie, on a bien :

$$\frac{d\bar{\xi}_y}{dx} = \theta_z, \quad \frac{d\bar{\xi}_z}{dx} = -\theta_y,$$

quelles que soient les fonctions  $t_y^1(\tilde{x})$  et  $t_z^1(\tilde{x})$ . Ainsi, le champ de distributeur de déplacement linéarisé de la cinématique poutre obtenu asymptotiquement, respecte la liaison interne de Navier-Bernoulli à l'approximation consentie.

Un instant de réflexion permet alors de constater que les deux premiers termes (6.50) du développement asymptotique du déplacement tridimensionnel s'identifient au champ de

distributeur de déplacement linéarisé auquel aurait conduit l'application de la théorie des poutres TIEN (linéarisée autour de l'état naturel) pourvu que l'on suppose la poutre obéir à la liaison interne de Navier-Bernoulli et que la matrice réduite (c'est-à-dire la matrice d'ordre 4 des coefficients jouant un rôle compte-tenu de la liaison interne de Navier-Bernoulli)  $(A_{IJ})$  du tenseur des modules d'élasticité  $\underline{\underline{A}}$  soit choisie telle que :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{\tilde{A}_{11}}{e^2}, \\ A_{1I} &= \frac{L \tilde{A}_{1I}}{e^3} = A_{I1}, \quad I \in \{4, 5, 6\}, \\ A_{IJ} &= \frac{L^2 \tilde{A}_{IJ}}{e^4}, \quad I, J \in \{4, 5, 6\}. \end{aligned}$$

Au final, on a obtenu une méthode systématique de calcul de la loi de comportement de poutre élastique à partir de la connaissance de la loi de comportement élastique tridimensionnelle possiblement anisotrope et hétérogène dans la section. En général, la matrice  $\underline{\underline{A}}$  n'est pas diagonale, ni même creuse, et *anisotropie ou/et hétérogénéité se traduisent par des couplages entre flexion, torsion et traction dans la loi de comportement de poutre linéarisée.*

## 6.6 Développements asymptotiques et hiérarchisation des descriptions cinématiques de poutre

Le présent chapitre constitue une validation *a posteriori* des hypothèses cinématiques simplificatrices décrites au chapitre 1. Il ouvre la voie à la dérivation de théories de poutres de plus grande finesse. Un exemple de dérivation de telle théorie peut être trouvé dans le traité [8]. Ce traité concerne les « pièces longues en voiles minces » qui est le vocable par lequel l'auteur désigne les cylindres élancés dont la section droite est elle-même élancée. Il s'agit donc d'objets ayant trois longueurs caractéristiques d'ordres de grandeur différents. De tels solides sont très fréquents dans la pratique des constructions mécaniques, allant du génie civil à l'aéronautique. Les déformations de ce type d'objet présentent fréquemment un gauchissement très important, en particulier lorsque le profil de la section droite est ouvert. L'application brutale de la théorie des poutres élastiques telle qu'elle est décrite dans ce cours peut alors conduire à des prédictions erronées et donc à un dimensionnement incorrect. Pour pallier ces limitations de la théorie des poutres, Vlassov [8] a été amené à construire des théories de poutres plus fines incorporant en particulier la possibilité de gauchissement des sections droites dans les transformations envisagées. Ce gauchissement fait apparaître, par dualité, une composante d'effort intérieur supplémentaire, baptisée par l'auteur « bimoment ».

On voit alors que les possibilités d'enrichissement de la cinématique sont infinies et que l'on peut alors bâtir une très grande variété de théories. Par exemple, on pourrait envisager d'enrichir la cinématique poutre en y incorporant la possibilité pour les sections droites de se dilater ou contracter de manière homogène de sorte à pouvoir commencer à décrire l'effet Poisson. Mais il se pose alors la question de devoir classer les enrichissements possibles de la cinématique par ordre de pertinence. Par exemple, si l'on devait se limiter à un seul enrichissement de la cinématique, est-il plus pertinent d'ajouter le gauchissement des sections droites ou l'effet Poisson ? La théorie des développements asymptotiques permet de



classer la pertinence des divers enrichissements possibles en se référant systématiquement à l'élasticité tridimensionnelle et en examinant à quel ordre du développement asymptotique en l'élanement, les divers enrichissements considérés peuvent se manifester. Ainsi, pour les cylindres élastiques homogènes et isotropes, on constate directement sur les formules (6.25) que le gauchissement intervient à l'ordre  $e^2$  alors que l'effet Poisson apparaît seulement à l'ordre  $e$ . Il en résulte qu'on commencera d'abord par enrichir la cinématique avec du gauchissement avant de vouloir incorporer l'effet Poisson. Une discussion assez complète de cette problématique peut être trouvée dans la référence [7]. On y trouvera également une analyse de la convergence des développements asymptotiques dont l'étude est restée *formelle* dans ce cours.

## 6.7 Récapitulatif des formules essentielles

- Principe de Saint-Venant : considérant l'équilibre linéarisé (TIEN) d'un cylindre élastique élancé ( $L/D \gg 1$ ) sollicité exclusivement par des distributions imposées de force surfacique sur les deux sections extrêmes, alors, à des effets de bords près, localisés au voisinage des deux sections extrêmes, la solution du problème d'équilibre ne dépend que du torseur  $\mathbb{T} = [\underline{F}_L, \underline{C}_L]$  des efforts surfaciques sur une des deux sections d'extrémité.
- Solution de Saint-Venant (équilibre TIEN d'un cylindre élastique homogène isotrope) : cas de la traction-compression simple  $\mathbb{T} = [F_x \underline{e}_x, \underline{0}]$ ,

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{F_x}{|\mathcal{S}|} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x.$$

- Solution de Saint-Venant : cas de la flexion pure  $\mathbb{T} = [\underline{0}, C_y \underline{e}_y + C_z \underline{e}_z]$ ,

$$\underline{\underline{\sigma}} = \left\{ -\frac{C_z}{I_z} y + \frac{C_y}{I_y} z \right\} \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x.$$

- Solution de Saint-Venant : cas de la torsion  $\mathbb{T} = [\underline{0}, C_x \underline{e}_x]$ ,

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{C_x}{J} \left\{ \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - z \right) (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} + y \right) (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x) \right\},$$

où  $\psi$  est la *fonction de gauchissement* caractérisée à une constante additive près par le problème de Neumann sur la section droite  $\mathcal{S}$  :

$$\begin{aligned} \Delta_2 \psi(y, z) &= 0, & \text{dans } \mathcal{S}, \\ \underline{\nabla} \psi \cdot \underline{n} &= zn_y - yn_z & \text{sur } \partial \mathcal{S}, \end{aligned}$$

et  $J$  l'*inertie de torsion*, définie à partir de la solution de ce problème de Neumann (qui ne dépend que de la géométrie de la section droite) par :

$$J = \int_{\mathcal{S}} y^2 + z^2 + y \frac{\partial \psi}{\partial z} - z \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

- Solution de Saint-Venant : cas de la flexion simple (par effort tranchant)  $\mathbb{T} = [F_y \underline{e}_y, \underline{0}]$  d'un cylindre de révolution de rayon  $R$ ,

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{F_y}{8(1+\nu)I_z} \left\{ 8(1+\nu)(x-L)y \underline{e}_x \otimes \underline{e}_x - \left( (1-2\nu)z^2 + (3+2\nu)(y^2 - R^2) \right) (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_y \otimes \underline{e}_x) - 2(1+2\nu)yz (\underline{e}_x \otimes \underline{e}_z + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_x) \right\}.$$

- Lois de comportement standard et standard inextensible (cas du matériau constitutif homogène isotrope du point de vue du comportement tridimensionnel) : voir le récapitulatif de la page 32 à la fin du chapitre 3.
- Loi de comportement générale d'une poutre élastique (cas du matériau constitutif hétérogène anisotrope du point de vue du comportement tridimensionnel) : liaison interne de Navier-Bernoulli complétée de la relation de comportement,

$$\begin{pmatrix} \mathcal{R}_T \\ \underline{\mathcal{M}} \end{pmatrix} = \underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} E_T \\ \underline{W} \end{pmatrix},$$

où  $\underline{\underline{A}}$  est la matrice symétrique définie positive caractérisée de la façon suivante. On note :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^d(E_T, \underline{W}) = E_T \underline{T} \otimes \underline{T} + \frac{1}{2} \left[ (\underline{W} \wedge \underline{x}_\perp) \otimes \underline{T} + \underline{T} \otimes (\underline{W} \wedge \underline{x}_\perp) \right],$$

le champ tensoriel d'ordre 2 symétrique défini sur la section droite  $\mathcal{S}$  et dépendant linéairement de  $(E_T, \underline{W})$ , ainsi que  $\underline{\underline{\xi}} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , l'unique solution (modulo l'addition d'un champ rigidifiant infinitésimal arbitraire) du problème d'élasticité linéarisé bidimensionnel :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{div}} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{0}, \\ \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\Lambda}} : \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\xi}}) + \underline{\underline{\varepsilon}}^d(E_T, \underline{W}) \right], \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{0}, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{dans } \mathcal{S}, \\ \\ \text{sur } \partial\mathcal{S}, \end{array}$$

et dont la formulation faible (en déplacement) est :

$$\forall \underline{\underline{\hat{\xi}}} \in H^1(\mathcal{S}; \mathbb{R}^3), \quad \int_{\mathcal{S}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\hat{\xi}}}) : \underline{\underline{\Lambda}} : \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\xi}}) + \underline{\underline{\varepsilon}}^d(E_T, \underline{W}) \right] = 0.$$

La quantité :

$$\int_{\mathcal{S}} \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\xi}}) + \underline{\underline{\varepsilon}}^d(E_T, \underline{W}) \right] : \underline{\underline{\Lambda}} : \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{\xi}}) + \underline{\underline{\varepsilon}}^d(E_T, \underline{W}) \right] = \begin{pmatrix} E_T \\ \underline{W} \end{pmatrix} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} E_T \\ \underline{W} \end{pmatrix},$$

définit alors une forme quadratique en  $(E_T, \underline{W})$  fournissant la caractérisation annoncée du tenseur  $\underline{\underline{A}}$  associé à la loi de comportement linéarisée de poutre.

## 6.8 Exercices

**Exercice 1. Calcul de la raideur d'un ressort à partir de la connaissance de sa géométrie et du matériau constitutif.** On considère une spire circulaire d'un ressort modélisée comme une poutre de section circulaire, la fibre moyenne étant évidemment prise en le centre des sections. On notera  $r$  le rayon de la spire et  $a$  le rayon de la section. Comme le matériau constitutif est élastique homogène et isotrope (module d'Young  $E$ , coefficient de Poisson  $\nu$ ), la poutre sera supposée obéir à la loi de comportement standard inextensible. On fera usage des coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , l'origine des  $\theta$  étant choisie en l'extrémité de la spire. Cette spire est soumise au torseur  $[Q\mathbf{e}_z, \mathbf{0}]$  (respectivement  $[-Q\mathbf{e}_z, \mathbf{0}]$ ) en l'extrémité  $\theta = 2\pi$  (respectivement en  $\theta = 0$ ), où  $\mathbf{e}_z$  désigne un vecteur unitaire orthogonal au plan contenant la configuration de référence de la ligne moyenne de la spire. *Déterminer la distribution d'effort intérieur à l'équilibre, et en déduire la raideur de la spire, dans le cadre d'analyse linéarisé TIEN.*

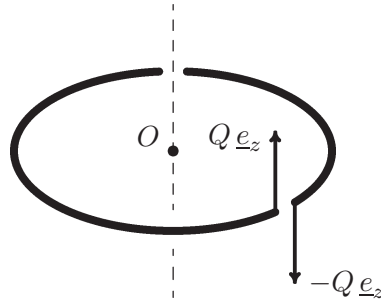


FIG. 6.10 – Équilibre d'une spire circulaire.

**Éléments de réponse.** Les équations d'équilibre dans le cadre linéarisé TIEN s'écrivent ici :

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\underline{R} &= 0, \\ \frac{d}{ds}\underline{M} + \underline{e}_\theta \wedge \underline{R} &= 0.\end{aligned}$$

La première équation, associée à la condition à la limite statique imposée en l'extrémité aval, donne :

$$\underline{R}(\theta) = Q \mathbf{e}_z,$$

et la deuxième se réécrit :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{d\theta} \underline{M}(\theta) + Q \mathbf{e}_r(\theta) = 0.$$

Au final, on obtient :

$$\underline{R}(\theta) = Q \mathbf{e}_z, \quad \underline{M}(\theta) = Qr \left( \mathbf{e}_\theta(\theta) - \mathbf{e}_\theta(0) \right).$$

Les équations de la statique déterminent la distribution d'effort intérieur indépendamment du comportement : le problème est isostatique.

On note maintenant  $q = \bar{\xi}_z(\theta = 2\pi)$  la composante suivant  $\mathbf{e}_z$  du déplacement de l'extrémité aval  $\theta = 2\pi$  de la spire par rapport à l'extrémité amont  $\theta = 0$ . Le théorème de Castigliano-Menabrea permet d'écrire :

$$q = \frac{d}{dQ} W^*(Q).$$

Dans la situation en jeu, on a :

$$|\mathcal{S}| = \pi a^2, \quad I = \frac{\pi}{4} a^4, \quad J = 2I, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Comme la poutre obéit aux liaisons internes de Navier-Bernoulli et d'inextensibilité, on obtient :

$$\begin{aligned} W^*(Q) &= \frac{r}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{M_\theta^2(\theta)}{\mu J} + \frac{M_r^2(\theta)}{EI} \right] d\theta, \\ &= \frac{2Q^2 r^3}{\pi E a^4} \int_0^{2\pi} [(1+\nu)(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta] d\theta, \\ &= \frac{2Q^2 r^3}{E a^4} (4+3\nu), \end{aligned}$$

qui donne pour valeur de la raideur de la spire :

$$k = \frac{Q}{q} = \frac{a^4}{r^3} \frac{E}{4(4+3\nu)}.$$

**Exercice 2. Estimation par excès du tenseur des modules d'élasticité d'une poutre hétérogène anisotrope.** On considère une poutre issue de la considération d'un cylindre élastique hétérogène anisotrope comme dans la section 6.5 dont on conserve les notations.

1) Démontrer l'estimation par excès suivante du tenseur  $\underline{\underline{A}}$  des modules d'élasticité d'une poutre hétérogène anisotrope :

$$\forall (E_T, \underline{W}) \in \mathbb{R}^4, \quad \begin{pmatrix} E_T \\ \underline{W} \end{pmatrix} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} E_T \\ \underline{W} \end{pmatrix} \leq \int_{\mathcal{S}} \underline{\underline{\varepsilon}}^d(E_T, \underline{W}) : \underline{\underline{\Lambda}}(y, z) : \underline{\underline{\varepsilon}}^d(E_T, \underline{W}),$$

où :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^d(E_T, \underline{W}) = E_T \underline{T} \otimes \underline{T} + \frac{1}{2} [(\underline{W} \wedge \underline{x}_\perp) \otimes \underline{T} + \underline{T} \otimes (\underline{W} \wedge \underline{x}_\perp)].$$

2) Constaté que ce majorant correspond à l'injection brutale de la cinématique linéarisée de poutre de Navier-Bernoulli dans la loi de comportement élastique linéarisée tridimensionnelle.

3) Particulariser l'estimation par excès du tenseur des modules d'élasticité d'une poutre hétérogène, ainsi obtenue, au cas du cylindre hétérogène isotrope avec module d'Young variable dans la section et coefficient de Poisson constant.

### Éléments de réponse.

1) On sait, d'après l'analyse menée à l'étape 4 de la section 6.5.3 :

$$\begin{pmatrix} E_T \\ \underline{W} \end{pmatrix} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} E_T \\ \underline{W} \end{pmatrix} = \int_{\mathcal{S}} [\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}) + \underline{\underline{\varepsilon}}^d(E_T, \underline{W})] : \underline{\underline{\Lambda}} : [\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}) + \underline{\underline{\varepsilon}}^d(E_T, \underline{W})],$$

où  $\underline{\xi}$  est la solution (modulo un déplacement rigidifiant de  $\mathcal{R}'$ ) du problème d'équilibre élastique à deux variables d'espace dont la formulation faible en déplacement est :

$$\forall \hat{\underline{\xi}} \in H^1(\mathcal{S}; \mathbb{R}^3), \quad \int_{\mathcal{S}} \underline{\underline{\varepsilon}}(\hat{\underline{\xi}}) : \underline{\underline{\Lambda}} : [\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\xi}) + \underline{\underline{\varepsilon}}^d(E_T, \underline{W})] = 0.$$

On déduit alors de la formulation variationnelle en déplacement (cf section 6.5.2) de ce même problème d'équilibre que, pour tout  $\underline{\hat{\xi}} \in H^1(\mathcal{S}; \mathbb{R}^3)$  :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_T \\ \underline{W} \end{pmatrix} \cdot \underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} E_T \\ \underline{W} \end{pmatrix} &= \int_{\mathcal{S}} \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\hat{\xi}}) + \underline{\underline{\varepsilon}}^d(E_T, \underline{W}) \right] : \underline{\underline{\Lambda}} : \left[ \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\hat{\xi}}) + \underline{\underline{\varepsilon}}^d(E_T, \underline{W}) \right], \\ &= 2E_p(\underline{\hat{\xi}}) + \int_{\mathcal{S}} \underline{\underline{\varepsilon}}^d(E_T, \underline{W}) : \underline{\underline{\Lambda}}(y, z) : \underline{\underline{\varepsilon}}^d(E_T, \underline{W}), \\ &\leq 2E_p(\underline{\hat{\xi}}) + \int_{\mathcal{S}} \underline{\underline{\varepsilon}}^d(E_T, \underline{W}) : \underline{\underline{\Lambda}}(y, z) : \underline{\underline{\varepsilon}}^d(E_T, \underline{W}). \end{aligned}$$

Il ne reste alors plus qu'à faire le choix  $\underline{\hat{\xi}} \equiv \underline{0}$  pour obtenir le résultat demandé.

2) Construisant un champ de déplacement tridimensionnel à partir de la donnée d'un champ arbitraire de distributeur de déplacement linéarisé de poutre de Navier-Bernoulli, on en déduit un champ de déformation linéarisée tridimensionnelle. L'injection de ce champ dans la loi de comportement tridimensionnelle fournit alors un champ de contrainte dont on peut déduire un champ de contrainte généralisée de la théorie des poutres. Cette procédure peut être schématisée de la manière suivante :

$$\left( \bar{\xi}(x), \theta_x(x) \right) \rightarrow \underline{\xi}(x, y, z) \rightarrow \underline{\underline{\varepsilon}}(x, y, z) \rightarrow \underline{\underline{\sigma}}(x, y, z) \rightarrow (R_x(x), \underline{M}(x)),$$

où la première correspondance s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{\xi}(x, y, z) &= \bar{\xi}_x(x) \underline{e}_x + \bar{\xi}_y(x) \underline{e}_y + \bar{\xi}_z(x) \underline{e}_z \\ &\quad + \left( \theta_x(x) \underline{e}_x - \frac{d\bar{\xi}_z}{dx}(x) \underline{e}_y + \frac{d\bar{\xi}_y}{dx}(x) \underline{e}_z \right) \wedge (y \underline{e}_y + z \underline{e}_z) \end{aligned}$$

(compte-tenu de la liaison interne de Navier-Bernoulli) et la deuxième donne :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_x'(x) - y \bar{\xi}_y''(x) - z \bar{\xi}_z''(x) & -z \theta_x'(x) & y \theta_x'(x) \\ -z \theta_x'(x) & 0 & 0 \\ y \theta_x'(x) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On calcule alors un tenseur de contrainte par la loi de comportement élastique :

$$\underline{\underline{\sigma}}(x, y, z) = \underline{\underline{\Lambda}}(y, z) : \underline{\underline{\varepsilon}}(x, y, z),$$

qui donne accès à la répartition de contrainte généralisée par :

$$\begin{aligned} R_x(x) &= \int_{\mathcal{S}} \underline{e}_x \cdot \underline{\underline{\sigma}}(x, y, z) \cdot \underline{e}_x, \\ \underline{M}(x) &= \int_{\mathcal{S}} (y \underline{e}_y + z \underline{e}_z) \wedge (\underline{\underline{\sigma}}(x, y, z) \cdot \underline{e}_x). \end{aligned}$$

La correspondance ainsi explicitée est linéaire et définit donc la matrice  $\underline{\underline{B}}$  d'ordre 4 :

$$\left( \bar{\xi}_x'(x), \theta_x'(x), -\bar{\xi}_z''(x), \bar{\xi}_y''(x) \right) \xrightarrow{\underline{\underline{B}}} (R_x(x), M_x(x), M_y(x), M_z(x)).$$

Compte-tenu maintenant que  $\underline{T} = \underline{e}_x$ , et :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^d(E_T, \underline{W}) = \begin{pmatrix} E_x - y W_z + z W_y & -z W_x & y W_x \\ -z W_x & 0 & 0 \\ y W_x & 0 & 0 \end{pmatrix},$$







# Annexe A

## Mouvement du solide rigide

L'objectif de cette annexe est de récapituler les principales propriétés des distributeurs et torseurs. Leur omniprésence en mécanique des milieux continus indéformables aussi bien que déformables, tire fondamentalement son origine de la forme générale des transformations rigidifiantes du milieu continu tridimensionnel classique.

Dans toute cette annexe, on notera  $\mathcal{E}$  l'espace affine tridimensionnel euclidien orienté, et  $E$  son espace vectoriel associé.

### A.1 Cinématique des mouvements rigides du milieu continu tridimensionnel classique

#### A.1.1 Mouvement rigidifiant en description lagrangienne

On considère un milieu continu occupant, dans sa configuration initiale prise comme référence un ouvert  $\Omega_0$  de  $\mathcal{E}$ . La description lagrangienne du mouvement de ce milieu continu consiste en la donnée d'un ouvert  $\Omega_t$  de  $\mathcal{E}$  et d'une bijection  $\phi(\cdot, t) : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ , supposée de classe  $C^1$  ainsi que sa réciproque, tous deux étant continûment paramétrés par le temps  $t$ . Cette application, appelée *transformation*, fournit la position  $m = \phi(M, t)$  d'un point à l'instant  $t$  à partir de sa position  $M \in \Omega_0$  dans la configuration initiale. Fonction continue et jamais nulle du temps, le Jacobien  $\det \underline{\nabla} \phi$  de la transformation est partout et constamment strictement positif. Pour alléger les notations, la dépendance par rapport au temps  $t$  sera omise dans la suite.

Une transformation  $\phi$  sera dite *rigidifiante* si c'est une isométrie, c'est-à-dire si elle conserve la distance entre deux points quelconques :

$$\forall M, M' \in \Omega_0, \quad |\underline{\phi(M)} \underline{\phi(M')}| = |\underline{MM'}|. \quad (\text{A.1})$$

Introduisant un troisième point arbitraire de la configuration de référence et développant le carré de la norme en terme de produit scalaire, on en déduit immédiatement qu'une transformation rigidifiante conserve non seulement la norme mais le produit scalaire :

$$\forall M, M', M'' \in \Omega_0, \quad \underline{\phi(M)} \underline{\phi(M')} \cdot \underline{\phi(M)} \underline{\phi(M'')} = \underline{MM'} \cdot \underline{MM''}. \quad (\text{A.2})$$

Introduisons maintenant une origine  $O \in \Omega_0$  arbitraire. On définit l'application  $\underline{\varphi}$  d'un voisinage de  $\underline{O} \in E$  dans  $E$  par :

$$\underline{\varphi}(\underline{OM}) = \underline{\phi(O)} \underline{\phi(M)}.$$

La conservation (A.2) du produit scalaire par une transformation rigidifiante se réécrit alors en terme de l'application  $\underline{\varphi}$  sous la forme :

$$\underline{\varphi}(\underline{V}_1) \cdot \underline{\varphi}(\underline{V}_2) = \underline{V}_1 \cdot \underline{V}_2, \quad (\text{A.3})$$

pour tout couple de vecteur  $(\underline{V}_1, \underline{V}_2)$  dont la norme est assez petite. On va maintenant montrer que cette propriété de conservation du produit scalaire implique la *linéarité* de  $\underline{\varphi}$ . Soit  $\underline{w} \in E$  un vecteur arbitraire de norme assez petite. La bijectivité de  $\phi$  donne l'existence d'un point  $M \in \Omega_0$ , et donc du vecteur  $\underline{W} = \underline{OM}$  tel que :

$$\underline{w} = \underline{\phi(O)} \underline{\phi(M)} = \underline{\varphi(W)}.$$

Utilisant la propriété (A.3), il vient :

$$\begin{aligned} & \{ \underline{\varphi}(\lambda \underline{U} + \mu \underline{V}) - \lambda \underline{\varphi}(\underline{U}) - \mu \underline{\varphi}(\underline{V}) \} \cdot \underline{w} \\ &= \{ \underline{\varphi}(\lambda \underline{U} + \mu \underline{V}) - \lambda \underline{\varphi}(\underline{U}) - \mu \underline{\varphi}(\underline{V}) \} \cdot \underline{\varphi(W)}, \\ &= \underline{\varphi}(\lambda \underline{U} + \mu \underline{V}) \cdot \underline{\varphi(W)} - \lambda \underline{\varphi}(\underline{U}) \cdot \underline{\varphi(W)} - \mu \underline{\varphi}(\underline{V}) \cdot \underline{\varphi(W)}, \\ &= (\lambda \underline{U} + \mu \underline{V}) \cdot \underline{W} - \lambda \underline{U} \cdot \underline{W} - \mu \underline{V} \cdot \underline{W}, \\ &= 0, \end{aligned}$$

pour tout triplet  $(\underline{U}, \underline{V}, \underline{w})$  de vecteurs dont la norme est assez petite ainsi que tout couple  $(\lambda, \mu)$  de réels assez petits. On en déduit que l'application  $\underline{\varphi}$  admet un prolongement *linéaire* unique à tout l'espace  $E$ . Revenant à (A.3), il est maintenant clair que  $\underline{\varphi}$  est un endomorphisme orthogonal de  $E$ . Posant alors :

$$\underline{\varphi}(\underline{OM}) = \underline{R} \cdot \underline{OM}, \quad \underline{T} = \underline{O} \underline{\phi(O)},$$

et revenant à l'écriture explicite de la dépendance en temps, on a montré :

$$\phi(M, t) = O + \underline{T}(t) + \underline{R}(t) \cdot \underline{OM}, \quad (\text{A.4})$$

où  $\underline{R}(t)$  est, à chaque instant, une rotation, puisque l'on a vu que le Jacobien  $\det \underline{\nabla} \phi = \det \underline{R}$  est constamment positif. Réciproquement, il est clair que toute transformation de la forme (A.4) conserve la distance entre deux points quelconques de la configuration de référence.

Au final, on a bien montré que les transformations rigidifiantes (*i.e.* conservant la distance entre deux points arbitraires) sont exactement les composées de translation et de rotation d'ensemble (*i.e.* les transformations de la forme (A.4)).

### A.1.2 Mouvement rigidifiant en description eulerienne

La description eulerienne du mouvement du milieu continu tridimensionnel classique consiste en la donnée, à chaque instant  $t$ , du champ de vitesse  $\underline{U}(m, t)$  sur la configuration actuelle  $\Omega_t \subset \mathcal{E}$ . Par définition, un mouvement en description eulerienne est dit rigidifiant si le taux d'extension de la distance entre deux points quelconques est constamment nul :

$$\forall m, m' \in \Omega_t, \quad \{ \underline{U}(m', t) - \underline{U}(m, t) \} \cdot \underline{mm}' = 0. \quad (\text{A.5})$$

Ici encore, on omettra la dépendance explicite en temps dans la suite pour alléger les notations. Choissant une origine  $O \in \Omega$  arbitraire, on définit une application  $\underline{u}$  d'un voisinage de  $\underline{0} \in E$  dans  $E$  par :

$$\underline{u}(Om) = \underline{U}(m) - \underline{U}(O).$$

Le caractère rigidifiant (A.5) du champ des vitesses  $\underline{U}$  s'exprime, en terme de l'application  $\underline{u}$  sous la forme :

$$\underline{u}(\underline{v}_1) \cdot \underline{v}_2 = -\underline{v}_1 \cdot \underline{u}(\underline{v}_2), \quad (\text{A.6})$$

pour tout couple de vecteur  $(\underline{v}_1, \underline{v}_2)$  dont la norme est assez petite. On va maintenant montrer que cette propriété implique la *linéarité* de  $\underline{u}$ . Soit  $\underline{w} \in E$  un vecteur arbitraire de norme assez petite. Utilisant la propriété (A.6), il vient :

$$\begin{aligned} & \{ \underline{u}(\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2) - \lambda_1 \underline{u}(\underline{v}_1) - \lambda_2 \underline{u}(\underline{v}_2) \} \cdot \underline{w} \\ &= \underline{u}(\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2) \cdot \underline{w} - \lambda_1 \underline{u}(\underline{v}_1) \cdot \underline{w} - \lambda_2 \underline{u}(\underline{v}_2) \cdot \underline{w}, \\ &= -(\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2) \cdot \underline{u}(\underline{w}) + \lambda_1 \underline{v}_1 \cdot \underline{u}(\underline{w}) + \lambda_2 \underline{v}_2 \cdot \underline{u}(\underline{w}), \\ &= 0, \end{aligned}$$

pour tout triplet  $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{w})$  de vecteurs dont la norme est assez petite ainsi que tout couple  $(\lambda_1, \lambda_2)$  de réels assez petits. On en déduit que l'application  $\underline{u}$  admet un prolongement *linéaire* unique à tout l'espace  $E$ . Revenant à (A.6), il est maintenant clair que  $\underline{u}$  est un endomorphisme antisymétrique de  $E$ . Posant alors :

$$\underline{u}(Om) = \underline{\underline{\Omega}} \cdot Om, \quad \underline{V} = \underline{U}(O),$$

introduisant le pseudo-vecteur<sup>1</sup>  $\underline{\underline{\Omega}}$  canoniquement associé à l'endomorphisme antisymétrique  $\underline{\underline{\Omega}}$  par la relation :

$$\forall \underline{v}, \quad \underline{\underline{\Omega}} \wedge \underline{v} = \underline{\underline{\Omega}} \cdot \underline{v},$$

et revenant à l'écriture explicite de la dépendance en temps, on a montré :

$$\underline{U}(m, t) = \underline{V}(t) + \underline{\underline{\Omega}}(t) \wedge Om. \quad (\text{A.7})$$

Réciproquement, il est clair que tout champ de vitesse de la forme (A.7) est rigidifiant au sens de la définition (A.5). Dans la suite, on appellera *distributeur* toute application de  $\mathcal{E}$  dans  $E$  qui est de la forme (A.7).

Au final, on a bien montré que les champs de vitesse rigidifiants (*i.e.* tels que le taux d'extension de la distance entre deux points arbitraires est nul) sont exactement les distributeurs (*i.e.* les champs de la forme (A.7)).

### A.1.3 Cohérence des points-de-vue lagrangien et eulerien

Deux définitions distinctes, une dans le cadre de la description lagrangienne du mouvement et une autre dans celui de la description eulerienne, ont été données pour le mouvement rigidifiant du milieu continu tridimensionnel classique. Il nous reste maintenant à vérifier la cohérence de ces deux définitions. Cette vérification nous permettra, en outre, d'explicitier le passage d'une description à l'autre.

<sup>1</sup>un pseudo-vecteur se distingue d'un vecteur en ce sens qu'il dépend de l'orientation choisie pour l'espace vectoriel : il doit être transformé en son opposé lorsque l'on change l'orientation de l'espace.

### De la description lagrangienne vers la description eulerienne

Considérons un mouvement rigidifiant en description lagrangienne, au sens de la définition (A.1), du milieu continu tridimensionnel classique. Compte-tenu du travail effectué dans la section A.1.1, on sait que la transformation associée est nécessairement de la forme :

$$m = \phi(M, t) = O + \underline{T}(t) + \underline{R}(t) \cdot \underline{OM}, \quad (\text{A.8})$$

où  $\underline{R}(t)$  est, à chaque instant, une rotation :

$${}^t\underline{R}(t) \cdot \underline{R}(t) = \underline{R}(t) \cdot {}^t\underline{R}(t) = \underline{\mathbb{1}}, \quad \det \underline{R}(t) = 1.$$

Une simple dérivation par rapport au temps donne alors la vitesse d'un point matériel quelconque repéré par sa position  $M$  dans la configuration initiale :

$$\underline{U}(M, t) = \dot{\underline{T}}(t) + \dot{\underline{R}}(t) \cdot \underline{OM}.$$

L'inversion de la transformation (A.8) qui permet d'expliciter la position initiale  $M$  en fonction de la position actuelle  $m$  :

$$\underline{OM} = -{}^t\underline{R}(t) \cdot \underline{T}(t) + {}^t\underline{R}(t) \cdot \underline{Om},$$

fournit alors le champ des vitesses sur la configuration actuelle :

$$\underline{U}(m, t) = \dot{\underline{T}}(t) - \dot{\underline{R}}(t) \cdot {}^t\underline{R}(t) \cdot \underline{T}(t) + \dot{\underline{R}}(t) \cdot {}^t\underline{R}(t) \cdot \underline{Om}.$$

Une simple dérivation par rapport au temps de l'identité  $\underline{R} \cdot {}^t\underline{R} = \underline{\mathbb{1}}$  montre que le tenseur  $\dot{\underline{R}} \cdot {}^t\underline{R}$  est antisymétrique, et l'on constate alors que le champ des vitesses est bien un distributeur de la forme (A.7) avec :

$$\underline{V}(t) = \dot{\underline{T}}(t) - \dot{\underline{R}}(t) \cdot {}^t\underline{R}(t) \cdot \underline{T}(t), \quad (\text{A.9})$$

$$\underline{\Omega}(t) = \dot{\underline{R}}(t) \cdot {}^t\underline{R}(t). \quad (\text{A.10})$$

### De la description eulerienne vers la description lagrangienne

Considérons un mouvement rigidifiant en description eulerienne, au sens de la définition (A.5), du milieu continu tridimensionnel classique. Compte-tenu du travail effectué dans la section A.1.2, on sait que le champ des vitesses associé est nécessairement de la forme :

$$\underline{U}(m, t) = \underline{V}(t) + \underline{\Omega}(t) \cdot \underline{Om}, \quad (\text{A.11})$$

où  $\underline{\Omega}(t)$  est, à chaque instant, un tenseur antisymétrique. Revenir à la description lagrangienne du mouvement, c'est trouver la fonction  $m(t)$  satisfaisant :

$$\frac{dm(t)}{dt} = \underline{U}(m, t) = \underline{V}(t) + \underline{\Omega}(t) \cdot \underline{Om}(t),$$

ainsi que la condition initiale :

$$m(0) = M.$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire non-homogène, dont on sait, par les théorèmes généraux sur les équations différentielles, que la solution dépend de manière affine de la donnée initiale :

$$m(t) = O + \underline{T}(t) + \underline{R}(t) \cdot \underline{OM},$$

où  $\underline{T}(t)$  est un vecteur et  $\underline{R}(t)$  un endomorphisme inversible satisfaisant :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{T}}(t) - \underline{\Omega}(t) \cdot \underline{T}(t) &= \underline{V}(t), & \dot{\underline{R}}(t) \cdot \underline{R}^{-1}(t) &= \underline{\Omega}(t) \\ \underline{T}(0) &= \underline{0}, & \underline{R}(0) &= \underline{1}. \end{aligned}$$

De :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\underline{R} \cdot \underline{R}) &= \underline{\dot{R}} \cdot \underline{R} + \underline{R} \cdot \underline{\dot{R}}, \\ &= \underline{\dot{R}} \cdot \underline{R} + \underline{R} \cdot \underline{\Omega} \cdot \underline{R} + \underline{R} \cdot \underline{\Omega} \cdot \underline{R}, \\ &= 0, \end{aligned}$$

puisque  $\underline{\Omega}$  est antisymétrique, on déduit que  $\underline{R}(t)$  est un tenseur orthogonal. La condition initiale montre que son déterminant est égal à 1 : c'est une rotation. La transformation est donc bien, à chaque instant, la composée d'une translation et d'une rotation d'ensemble. Ceci achève la démonstration de la cohérence entre les deux définitions, lagrangienne et eulérienne, du mouvement rigidifiant du milieu continu tridimensionnel classique.

La détermination explicite de  $\underline{T}(t)$  et  $\underline{R}(t)$  en fonction de  $\underline{V}(t)$  et  $\underline{\Omega}(t)$  n'est pas toujours possible. On peut néanmoins citer des cas où ça l'est.

**Cas 1. Rotation uniforme ( $\underline{\Omega}(t)$  constant).** Dans ce cas, l'équation différentielle est linéaire à coefficients constants et admet donc une solution explicite en terme d'exponentielle de matrice, obtenue à l'aide de la méthode de variation de constante :

$$m(t) = O + e^{t\underline{\Omega}} \cdot \underline{OM} + \int_0^t e^{(t-s)\underline{\Omega}} \cdot \underline{V}(s) ds,$$

qui donne :

$$\begin{aligned} \underline{T}(t) &= \int_0^t e^{(t-s)\underline{\Omega}} \cdot \underline{V}(s) ds, \\ \underline{R}(t) &= e^{t\underline{\Omega}}. \end{aligned}$$

On vérifie directement que  $\underline{R}(t)$  est une rotation par :

$$\begin{aligned} \underline{R}^{-1}(t) &= e^{-t\underline{\Omega}} = e^{t\underline{\Omega}} = \underline{R}(t), \\ \det \underline{R}(t) &= \det e^{t\underline{\Omega}} = e^{t \operatorname{tr} \underline{\Omega}} = 1. \end{aligned}$$

**Cas 2. Rotation plane.** On veut dire par là que le vecteur vitesse de rotation  $\underline{\Omega}$  conserve une direction fixe, c'est-à-dire que la matrice de  $\underline{\Omega}(t)$  dans une base orthonormée  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$  s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega(t) & 0 \\ \omega(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce cas contient évidemment le cas précédent. La solution de l'équation différentielle est encore explicite et s'écrit :

$$m(t) = O + e^{\int_0^t \underline{\underline{\Omega}}(s) ds} \cdot \underline{OM} + \int_0^t e^{\int_s^t \underline{\underline{\Omega}}(s') ds'} \cdot \underline{V}(s) ds.$$

Cela provient fondamentalement du fait que  $\int_0^t \underline{\underline{\Omega}}(s) ds$  et  $\underline{\underline{\Omega}}(t)$  commutent. Par identification, on obtient :

$$\begin{aligned} \underline{T}(t) &= \int_0^t e^{\int_s^t \underline{\underline{\Omega}}(s') ds'} \cdot \underline{V}(s) ds, \\ \underline{\underline{R}}(t) &= e^{\int_0^t \underline{\underline{\Omega}}(s) ds}. \end{aligned}$$

On peut même préciser la rotation  $\underline{\underline{R}}(t)$  en donnant sa matrice dans la base  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$  :

$$\begin{pmatrix} \cos \int_0^t \omega(s) ds & -\sin \int_0^t \omega(s) ds & 0 \\ \sin \int_0^t \omega(s) ds & \cos \int_0^t \omega(s) ds & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

#### A.1.4 Distributeurs et torseurs : définition et propriétés

##### Étude des distributeurs

La forme générale des champs de vitesse rigidifiants obtenue à la section A.1.2 conduit à formuler la définition suivante. On appelle *distributeur* toute application  $\underline{U} : \mathcal{E} \rightarrow E$  de la forme :

$$\underline{U}(m) = \underline{V} + \underline{\Omega} \wedge \underline{Om},$$

où  $O$  désigne une origine choisie arbitrairement. Un distributeur est ainsi totalement caractérisé par la donnée des deux vecteurs  $\underline{V} = \underline{U}(O)$  et  $\underline{\Omega}$ . Les deux vecteurs  $\underline{U}(O)$  et  $\underline{\Omega}$  sont appelés les *éléments de réduction* du distributeur au point  $O$  et on notera le distributeur sous la forme :

$$\left\{ \underline{U}(O), \underline{\Omega} \right\}_O.$$

L'obtention des éléments de réduction en un point  $O'$  quelconque est immédiat et conduit à l'identité :

$$\left\{ \underline{U}(O), \underline{\Omega} \right\}_O = \left\{ \underline{U}(O') = \underline{U}(O) + \underline{\Omega} \wedge \underline{OO'}, \underline{\Omega} \right\}_{O'}.$$

On voit ainsi que le pseudo-vecteur  $\underline{\Omega}$  est commun à tous les éléments de réduction du distributeur, quel que soit le point en lequel ils sont exprimés. On l'appelle *pseudo-vecteur vitesse de rotation instantanée*.

À tout distributeur non constant ( $\underline{\Omega} \neq \underline{0}$ ), on peut alors associer le sous-ensemble  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{E}$  des points dont la vitesse est colinéaire à la vitesse de rotation :

$$\mathcal{D} = \left\{ m \in \mathcal{E} \mid \exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \underline{U}(m) = \lambda \underline{\Omega} \right\}.$$

Remarquons d'abord que  $\mathcal{D}$  est non vide. En effet, on constate aisément<sup>2</sup> que :

$$O + \frac{\underline{\Omega} \wedge \underline{U}(O)}{|\underline{\Omega}|^2} \in \mathcal{D}.$$

D'autre part, si  $m$  et  $m'$  désignent deux points arbitraire de  $\mathcal{D}$ , on a :

$$\begin{aligned} \underline{U}(m') - \underline{U}(m) \parallel \underline{\Omega} &\implies \underline{0} = \underline{\Omega} \wedge (\underline{U}(m') - \underline{U}(m)) = \underline{\Omega} \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{mm}'), \\ &\implies |\underline{\Omega}|^2 \underline{mm}' = (\underline{\Omega} \cdot \underline{mm}') \underline{\Omega}, \\ &\implies \underline{mm}' \parallel \underline{\Omega}. \end{aligned}$$

Enfin :

$$m \in \mathcal{D} \implies \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad m + \lambda \underline{\Omega} \in \mathcal{D}.$$

Au final, on a montré que  $\mathcal{D}$  est une droite affine dirigée selon  $\underline{\Omega}$ . On l'appelle *axe instantané de rotation* du distributeur.

### Étude des torseurs

La somme de deux distributeurs est définie par la somme des éléments de réduction exprimés au même point. L'ensemble des distributeurs forme ainsi un espace vectoriel de dimension 6. On appelle *torseur* toute forme linéaire sur l'espace des distributeurs. L'ensemble des torseurs forme donc un espace vectoriel de dimension 6, dual de l'espace des distributeurs. Puisqu'un distributeur est caractérisé par ses éléments de réduction  $\underline{U}(O)$  et  $\underline{\Omega}$  en un point  $O$  arbitrairement choisi, le choix de cette origine permet de caractériser le torseur par deux vecteurs  $\underline{R}(O)$  et  $\underline{M}(O)$  en convenant d'exprimer le produit de dualité sous la forme :

$$\left[ \underline{R}(O), \underline{M}(O) \right]_O \cdot \left\{ \underline{U}(O), \underline{\Omega} \right\}_O = \underline{R}(O) \cdot \underline{U}(O) + \underline{M}(O) \cdot \underline{\Omega}.$$

Bien entendu le choix d'un autre point  $O'$  pour exprimer les éléments de réduction du distributeur ne doit pas changer le résultat de l'évaluation du produit de dualité. Cela s'écrit :

$$\underline{R}(O') \cdot (\underline{U}(O) + \underline{\Omega} \wedge \underline{OO}') + \underline{M}(O') \cdot \underline{\Omega} = \underline{R}(O) \cdot \underline{U}(O) + \underline{M}(O) \cdot \underline{\Omega},$$

pour tout  $\underline{U}(O), \underline{\Omega} \in E$ . Il en résulte immédiatement :

$$\begin{aligned} \underline{R}(O') &= \underline{R}(O), \\ \underline{M}(O') &= \underline{M}(O) + \underline{O'Q} \wedge \underline{R}(O). \end{aligned}$$

Les deux vecteurs  $\underline{R}$  et  $\underline{M}(O)$ , qui caractérisent donc le torseur, sont appelés ses *éléments de réduction* au point  $O$  et on écrira donc :

$$\left[ \underline{R}, \underline{M}(O) \right]_O = \left[ \underline{R}, \underline{M}(O') = \underline{M}(O) + \underline{O'Q} \wedge \underline{R} \right]_{O'}.$$

Le vecteur  $\underline{R}$  est appelé *résultante* du torseur et  $\underline{M}(O)$  son *moment* au point  $O$ . Un torseur définit donc une application de  $\mathcal{E}$  dans  $E$  de la forme :

$$\underline{M}(m) = \underline{M}(O) + \underline{mQ} \wedge \underline{R},$$

<sup>2</sup>on rappelle l'identité :  $\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c}) = (\underline{a} \cdot \underline{c}) \underline{b} - (\underline{a} \cdot \underline{b}) \underline{c}$ .

qui montre que distributeurs et torseurs présentent de grandes similitudes. Conventionnellement, l'ordre dans lequel les éléments de réduction sont écrits présente cependant une différence : pour les distributeurs, c'est l'élément de réduction dépendant du point considéré qui figure en premier alors que pour les torseurs, c'est celui qui ne dépend pas du point considéré. Outre cette différence de convention, il y a également une légère différence de nature : pour les distributeurs, c'est l'élément de réduction indépendant du point considéré qui est un pseudo-vecteur, et pour les torseurs, c'est celui qui dépend du point considéré.

Terminons cette partie par quelques commentaires sur la terminologie. Si la résultante est nulle, le moment ne dépend pas du point considéré et on dit que le torseur est un *couple*. Pour tout torseur de résultante non nulle, l'ensemble des points de  $\mathcal{E}$  pour lesquels le moment est colinéaire à la résultante est une droite affine appelée *axe central* du torseur. S'il existe un point de  $\mathcal{E}$  en lequel le moment est nul, on dit alors que le torseur est un *glisseur*. Pour tout torseur de résultante non nulle qui est un glisseur, le moment s'annule sur tout l'axe central et seulement sur lui.

## A.2 Modélisation des efforts et équation du mouvement

L'étude de la cinématique du solide rigide dans la section précédente montre que le choix d'un espace vectoriel de vitesse virtuelle cohérent avec la cinématique ne peut être que l'espace vectoriel des distributeurs. Aussi bien la puissance virtuelle des efforts extérieurs  $\mathcal{P}_e$  que la puissance virtuelle des quantités d'accélération  $\mathcal{A}$  seront alors nécessairement des formes linéaires définies sur l'espace vectoriel des distributeurs, et définiront donc des torseurs (par définition même du torseur). Ainsi, pour le solide rigide, le principe des puissances virtuelles :

$$\forall \{\hat{\underline{U}}(O), \hat{\underline{\Omega}}\}_O, \quad \mathcal{P}_e\left(\{\hat{\underline{U}}(O), \hat{\underline{\Omega}}\}_O\right) = \mathcal{A}\left(\{\hat{\underline{U}}(O), \hat{\underline{\Omega}}\}_O\right), \quad (\text{A.12})$$

s'exprime en disant, qu'à chaque instant, le torseur des efforts extérieurs est égal au torseur des quantités d'accélération. Pour l'explicitier, il reste à préciser les formes linéaires  $\mathcal{P}_e$  et  $\mathcal{A}$ , la forme linéaire  $\mathcal{P}_e$  constituant la modélisation des efforts extérieurs.

### A.2.1 Puissance virtuelle des efforts extérieurs

On note  $\Omega \subset \mathcal{E}$  le domaine occupé par le solide rigide dans sa configuration *actuelle*. Dans la modélisation que l'on construit, on souhaite prendre en compte des efforts extérieurs sous forme d'une densité volumique  $\underline{F}$  de force dans  $\Omega$ , ainsi qu'une densité surfacique  $\underline{T}$  sur le bord  $\partial\Omega$ . La puissance virtuelle de ces efforts dans un champ de vitesse rigidifiant (distributeur) quelconque s'écrit alors naturellement :

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}_e\left(\{\hat{\underline{U}}(O), \hat{\underline{\Omega}}\}_O\right) \\ &= \int_{\Omega} \underline{F} \cdot (\hat{\underline{U}}(O) + \hat{\underline{\Omega}} \wedge \underline{Om}) + \int_{\partial\Omega} \underline{T} \cdot (\hat{\underline{U}}(O) + \hat{\underline{\Omega}} \wedge \underline{Om}), \\ &= \left( \int_{\Omega} \underline{F} + \int_{\partial\Omega} \underline{T} \right) \cdot \hat{\underline{U}}(O) + \left( \int_{\Omega} \underline{Om} \wedge \underline{F} + \int_{\partial\Omega} \underline{Om} \wedge \underline{T} \right) \cdot \hat{\underline{\Omega}}, \end{aligned}$$

et les éléments de réduction en  $O$  du torseur des efforts extérieurs s'écrivent alors clairement :

$$\left[ \int_{\Omega} \underline{F} + \int_{\partial\Omega} \underline{T}, \int_{\Omega} \underline{Om} \wedge \underline{F} + \int_{\partial\Omega} \underline{Om} \wedge \underline{T} \right]_O.$$



### A.2.2 Puissance virtuelle des quantités d'accélération

L'expression de la puissance virtuelle des quantités d'accélération est dictée par la cinématique. L'accélération du point matériel occupant la position  $m$  de la configuration actuelle est :

$$\frac{d}{dt}(\underline{U}(O) + \underline{\Omega} \wedge \underline{Om}) = \underline{\dot{U}}(O) + \underline{\dot{\Omega}} \wedge \underline{Om} + \underline{\Omega} \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{Om})$$

où  $\underline{\dot{U}}(O)$  est l'accélération du point matériel occupant la position  $O$  de la configuration actuelle. Notant  $\rho$  la masse volumique du solide rigide, il vient alors :

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(\{\underline{\hat{U}}(O), \underline{\hat{\Omega}}\}_O) \\ &= \int_{\Omega} \rho \left\{ \underline{\dot{U}}(O) + \underline{\dot{\Omega}} \wedge \underline{Om} + \underline{\Omega} \wedge (\underline{\Omega} \wedge \underline{Om}) \right\} \cdot \left\{ \underline{\hat{U}}(O) + \underline{\hat{\Omega}} \wedge \underline{Om} \right\}, \\ &= \underline{\hat{U}}(O) \cdot \left\{ (\int_{\Omega} \rho) \underline{\dot{U}}(O) + \underline{\dot{\Omega}} \wedge (\int_{\Omega} \rho \underline{Om}) \right. \\ & \quad \left. + \left[ (\int_{\Omega} \rho \underline{Om}) \cdot \underline{\Omega} \right] \underline{\Omega} - |\underline{\Omega}|^2 (\int_{\Omega} \rho \underline{Om}) \right\} \\ & \quad + \underline{\hat{\Omega}} \cdot \left\{ (\int_{\Omega} \rho \underline{Om}) \wedge \underline{\dot{U}}(O) + \left[ \int_{\Omega} \rho (|\underline{Om}| \underline{\underline{1}} - \underline{Om} \otimes \underline{Om}) \right] \cdot \underline{\dot{\Omega}} \right. \\ & \quad \left. + \underline{\Omega} \wedge \left[ \int_{\Omega} \rho (|\underline{Om}| \underline{\underline{1}} - \underline{Om} \otimes \underline{Om}) \right] \cdot \underline{\Omega} \right\} \end{aligned}$$

Introduisant alors la masse totale  $\mathcal{M}$ , la position actuelle  $g$  du centre d'inertie et le tenseur d'inertie  $\underline{\underline{i}}^{\rho}(O)$  par rapport à  $O$ , respectivement définis par :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \int_{\Omega} \rho, \\ \underline{Og} &= \frac{1}{\mathcal{M}} \int_{\Omega} \rho \underline{Om}, \\ \underline{\underline{i}}^{\rho}(O) &= \int_{\Omega} \rho \left( |\underline{Om}|^2 \underline{\underline{1}} - \underline{Om} \otimes \underline{Om} \right), \end{aligned}$$

la puissance virtuelle des quantités d'accélération se réécrit :

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(\{\underline{\hat{U}}(O), \underline{\hat{\Omega}}\}_O) \\ &= \underline{\hat{U}}(O) \cdot \left\{ \mathcal{M} \underline{\dot{U}}(O) - \mathcal{M} \underline{Og} \wedge \underline{\dot{\Omega}} + \mathcal{M} (\underline{Og} \cdot \underline{\Omega}) \underline{\Omega} - \mathcal{M} |\underline{\Omega}|^2 \underline{Og} \right\} \\ & \quad + \underline{\hat{\Omega}} \cdot \left\{ \mathcal{M} \underline{Og} \wedge \underline{\dot{U}}(O) + \underline{\underline{i}}^{\rho}(O) \cdot \underline{\dot{\Omega}} + \underline{\Omega} \wedge \underline{\underline{i}}^{\rho}(O) \cdot \underline{\Omega} \right\}. \end{aligned}$$

### A.2.3 Équations du mouvement

L'équation du mouvement du solide rigide est donnée par le principe des puissances virtuelles (A.12), qui n'exprime rien d'autre que l'égalité des éléments de réduction au

point  $O$  du torseur des quantités d'accélération avec ceux du torseur des efforts extérieurs :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \underline{\dot{U}}(O) - \mathcal{M} \underline{Og} \wedge \underline{\dot{\Omega}} + \mathcal{M} (\underline{Og} \cdot \underline{\Omega}) \underline{\Omega} - \mathcal{M} |\underline{\Omega}|^2 \underline{Og} &= \int_{\Omega} \underline{F} + \int_{\partial\Omega} \underline{T}, \\ \mathcal{M} \underline{Og} \wedge \underline{\dot{U}}(O) + \underline{\underline{i}}^{\rho}(O) \cdot \underline{\dot{\Omega}} + \underline{\Omega} \wedge \underline{\underline{i}}^{\rho}(O) \cdot \underline{\Omega} &= \int_{\Omega} \underline{Om} \wedge \underline{F} + \int_{\partial\Omega} \underline{Om} \wedge \underline{T}. \end{aligned}$$

Ces équations se simplifient beaucoup si le point  $O$  choisi pour exprimer ces éléments de réduction se confond avec la position actuelle  $g$  du centre d'inertie du solide rigide. Dans ce cas, le tenseur d'inertie  $\underline{\underline{i}}^{\rho}(g)$  par rapport au centre d'inertie  $g$  est simplement appelé tenseur d'inertie et noté  $\underline{\underline{i}}^{\rho}$ , et les équations du mouvement prennent la forme simple :

$$\mathcal{M} \underline{\dot{U}}(g) = \int_{\Omega} \underline{F} + \int_{\partial\Omega} \underline{T}, \quad (\text{A.13})$$

$$\underline{\underline{i}}^{\rho} \cdot \underline{\dot{\Omega}} + \underline{\Omega} \wedge \underline{\underline{i}}^{\rho} \cdot \underline{\Omega} = \int_{\Omega} \underline{gm} \wedge \underline{F} + \int_{\partial\Omega} \underline{gm} \wedge \underline{T}. \quad (\text{A.14})$$

La première de ces équations (A.13) montre que le mouvement du centre d'inertie est le même que celui qu'aurait une particule ponctuelle de masse  $\mathcal{M}$  sur laquelle s'exercerait une force instantanée identique à la résultante du torseur des forces extérieures.

#### A.2.4 Étude du tenseur d'inertie d'un solide rigide

L'obtention de l'équation du mouvement du solide rigide a fait apparaître le tenseur d'ordre 2 symétrique :

$$\underline{\underline{i}}^{\rho} = \int_{\Omega} \rho \left( |\underline{gm}|^2 \underline{\underline{1}} - \underline{gm} \otimes \underline{gm} \right),$$

appelé tenseur d'inertie (par rapport au centre d'inertie) du solide rigide. On notera l'identité souvent utile :

$$\forall \underline{u}, \underline{v}, \quad \underline{u} \cdot \underline{\underline{i}}^{\rho} \cdot \underline{v} = \int_{\Omega} \rho \left( \underline{gm} \wedge \underline{u} \right) \cdot \left( \underline{gm} \wedge \underline{v} \right). \quad (\text{A.15})$$

Le tenseur d'inertie  $\underline{\underline{i}}^{\rho}(O)$  par rapport à un point  $O$  quelconque s'exprime simplement en fonction de  $\underline{\underline{i}}^{\rho}$  :

$$\underline{\underline{i}}^{\rho}(O) = \int_{\Omega} \rho \left( |\underline{Om}|^2 \underline{\underline{1}} - \underline{Om} \otimes \underline{Om} \right) = \underline{\underline{i}}^{\rho} + \mathcal{M} |\underline{Og}|^2 \underline{\underline{1}} - \mathcal{M} \underline{Og} \otimes \underline{Og}.$$

La matrice du tenseur d'inertie  $\underline{\underline{i}}^{\rho}$  dans une base orthormée  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$ , quelconque de  $E$ , est :

$$\begin{pmatrix} \int_{\Omega} \rho (y^2 + z^2) & - \int_{\Omega} \rho xy & - \int_{\Omega} \rho xz \\ - \int_{\Omega} \rho xy & \int_{\Omega} \rho (x^2 + z^2) & - \int_{\Omega} \rho yz \\ - \int_{\Omega} \rho xz & - \int_{\Omega} \rho yz & \int_{\Omega} \rho (x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

Symétrique, le tenseur d'inertie  $\underline{i}^\rho$  est diagonalisable dans une base orthonormée. Notons, au passage, que cela établit l'existence, pour tout domaine  $\Omega$  mesurable borné, d'un repérage cartésien orthonormé  $(g, \underline{e}_x, \underline{e}_y, \underline{e}_z)$  tel que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} x &= \int_{\Omega} y = \int_{\Omega} z = 0, \\ \int_{\Omega} xy &= \int_{\Omega} yz = \int_{\Omega} xz = 0. \end{aligned}$$

Les directions propres de  $\underline{i}^\rho$  sont appelées *axes principaux d'inertie* du solide rigide. Ses valeurs propres, qui s'écrivent :

$$I_x = \int_{\Omega} \rho (y^2 + z^2), \quad I_y = \int_{\Omega} \rho (x^2 + z^2), \quad I_z = \int_{\Omega} \rho (x^2 + y^2),$$

dans le repérage cartésien orthonormé associé aux axes principaux d'inertie, sont appelés *moments principaux d'inertie*. Leur expression montre que le tenseur d'inertie est non seulement symétrique, mais aussi *positif* (et même défini positif dès que  $\Omega$  n'est pas sous-ensemble d'une droite). Enfin, il résulte de l'expression générale de sa matrice que, si un solide rigide homogène admet un plan de symétrie, alors la normale à ce plan définit un axe principal d'inertie.

La deuxième (A.14) des équations du mouvement du solide rigide montre qu'un mouvement de rotation uniforme ( $\underline{\Omega}$  constant) en l'absence d'efforts extérieurs est caractérisé par :

$$\underline{\Omega} \wedge \underline{i}^\rho \cdot \underline{\Omega} = \underline{0},$$

c'est-à-dire par le fait que  $\underline{\Omega}$  soit un vecteur propre de  $\underline{i}^\rho$ . En d'autre terme, un mouvement de rotation uniforme du solide rigide ne peut se faire, en l'absence d'efforts extérieurs, qu'autour d'un axe principal d'inertie. Ainsi, l'opération d'équilibrage dynamique d'une roue consiste à faire coïncider exactement l'axe de rotation avec un axe principal d'inertie par ajout de masselotes judicieusement placées.



## Annexe B

# Calcul numérique de solutions approchées

### B.1 Introduction

La théorie des poutres élastiques construite et étudiée dans ce cours a fourni des ensembles d'équation susceptibles de décrire une situation concrète dans divers contextes : statique ou dynamique des assemblages de poutres dans le cadre d'analyse linéarisé (TIEN), mais aussi les équations non-linéaires nécessaires à l'analyse des bifurcations.

Les propriétés mathématiques du point de vue de l'existence, la régularité et l'unicité des solutions ont été évoquées et un certain nombre d'exemples simples, permettant d'exhiber des solutions exactes sous forme explicite ont été présentés.

La circonstance où l'on a accès à des solutions explicites est néanmoins exceptionnelle et, en pratique, on ne peut très souvent n'avoir accès qu'à des solutions approchées des équations fournies par la modélisation et de la théorie qui s'appuie dessus.

Le développement récent des ordinateurs, et de la puissance de calcul qu'ils offrent désormais, a conduit au développement de méthodes de recherche systématique de solutions approchées, au premier rang desquelles on doit citer la *méthode des éléments finis*. Développée par les ingénieurs dans les années 50, elle a été très vite reconnue comme une méthode systématique d'obtention de solutions approchées des systèmes d'équations aux dérivées partielles.

On se propose donc maintenant de décrire comment la méthode des éléments finis permet d'achever de manière systématique l'analyse d'une structure constituée de poutres élastiques par l'obtention systématique de solutions numériques approchées. Les méthodes seront décrites dans les contextes successifs de l'élasto-statique linéarisée dans le cadre TIEN, de l'élasto-dynamique linéarisée dans le cadre TIEN et du flambage eulerien.

Profitons de cette introduction, pour souligner encore une fois que l'obtention de prédictions réalistes de la part de l'ingénieur en calcul des structures passe par une connaissance approfondie de la théorie de mécanique des milieux continus qu'il applique à la situation concrète qui le préoccupe, aussi bien que des méthodes numériques qu'il met en œuvre pour obtenir des solutions numériques approchées, et que le fait que les méthodes présentées soient implémentées dans divers codes de calcul mis à la disposition de l'ingénieur ne dispense en aucun cas d'une étude approfondie de ces méthodes.

Ajoutons enfin que les méthodes de résolution approchée présentées ici ne sont par-

ticularisées à la théorie des poutres élastiques qu'à titre d'illustration et se transposent immédiatement aux équations fournies par toute autre théorie de milieu continu.

## B.2 Solutions approchées en statique linéarisée

Dans cette section, nous revenons sur l'étude de la statique des systèmes constitués d'un nombre fini de poutres, telle qu'elle a été développée au chapitre 4 dans les sections 4.2 et 4.3. Nous faisons ici le choix de présenter le principe du calcul de solutions approchées par la méthode des éléments finis en s'appuyant sur l'exemple de l'équilibre d'une poutre rectiligne avec conditions aux limites de type cinématique aux deux extrémités : c'est l'exemple qui nous a déjà servi dans la section 4.2 pour illustrer les diverses formulations équivalentes de l'équilibre dans le cadre d'analyse TIEN. Cependant, le lecteur doit garder à l'esprit que l'ensemble des méthodes présentées dans cette section s'étend de manière immédiate au calcul de solutions approchées pour les problèmes d'équilibre linéarisés de systèmes constitués d'un nombre fini de poutres avec les diverses conditions d'assemblage évoquées dans la section 4.3. De manière plus générale encore, ces méthodes s'adaptent très facilement à la recherche approchée systématique de solution pour tous les problèmes d'équilibre élastique linéarisés issus de n'importe quelle théorie de mécanique des milieux continus.

### B.2.1 Approximation : la méthode de Rayleigh-Ritz

Dans la section 4.2, on a obtenu cinq formulations équivalentes de l'équilibre d'une poutre dans le cadre d'analyse linéarisé TIEN, à savoir :

- les équations locales complétées par les conditions aux limites,
- la formulation faible en déplacement,
- la formulation variationnelle en déplacement,
- la formulation faible en contrainte,
- la formulation variationnelle en contrainte.

On a également exhibé les conditions qui permettent de garantir l'existence et l'unicité de la solution d'équilibre.

La méthode de recherche de solution approchée de Rayleigh-Ritz s'appuie sur la formulation variationnelle en déplacement. Nous allons la rappeler dans le cas particulier, déjà étudié à la section 4.2, du problème de l'équilibre d'une poutre rectiligne avec conditions aux limites de type cinématique aux deux extrémités.

On considère donc une poutre occupant dans sa configuration initiale, prise comme référence et supposée dénuée de contrainte, un segment paramétré par son abscisse curviligne  $x \in ]0, l[$ . Le distributeur de déplacement linéarisé est astreint à prendre les valeurs imposées  $\{\bar{\underline{\xi}}_0, \underline{\theta}_0\}$  et  $\{\bar{\underline{\xi}}_l, \underline{\theta}_l\}$  aux deux extrémités. Cette poutre étant supposée élastique sans liaison interne (poutre naturelle) de tenseur de modules d'élasticité  $\underline{\underline{A}}$ , on étudie son équilibre, dans le cadre d'analyse linéarisé TIEN, sous l'effet d'une distribution linéique de torseur réparti  $[\underline{\underline{F}}_0, \underline{\underline{C}}_0]$ . Introduisant l'espace affine  $CA$  des champs de distributeur de déplacement linéarisé cinématiquement admissibles avec les données du problème d'équilibre :

$$CA = \left\{ \left\{ \hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}} \right\} \in H^1(]0, l[; \mathbb{R}^6) \mid \left\{ \hat{\underline{\xi}}(0), \hat{\underline{\theta}}(0) \right\} = \left\{ \bar{\underline{\xi}}_0, \underline{\theta}_0 \right\}, \text{ et } \left\{ \hat{\underline{\xi}}(l), \hat{\underline{\theta}}(l) \right\} = \left\{ \bar{\underline{\xi}}_l, \underline{\theta}_l \right\} \right\},$$

ainsi que la fonctionnelle strictement convexe :  $CA \rightarrow \mathbb{R}$ , dite « énergie potentielle totale » :

$$E_p(\{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\}) = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{d}{dx} \{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\} \cdot \underline{A} \cdot \frac{d}{dx} \{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\} - \int_0^l [\underline{F}_0, \underline{C}_0] \cdot \{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\},$$

on sait alors que l'unique solution du problème d'équilibre considéré est caractérisée par la réalisation du minimum de l'énergie potentielle totale sur l'espace affine  $CA$  :

$$\forall \{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\} \in CA, \quad E_p(\{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\}) \leq E_p(\{\bar{\underline{\xi}}, \bar{\underline{\theta}}\}).$$

### Principe de l'approximation

Le principe de l'approximation de Rayleigh-Ritz repose sur l'introduction d'un sous-espace affine  $\widetilde{CA}$  de  $CA$ , choisi généralement de dimension finie :

$$\widetilde{CA} = \left\{ \{\bar{\underline{\xi}}_0, \underline{\theta}_0\} + \sum_{i=1}^n q_i \{\bar{\underline{\xi}}_i, \underline{\theta}_i\} \mid \underline{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n \right\},$$

où  $\{\bar{\underline{\xi}}_0, \underline{\theta}_0\}$  désigne un champ cinématiquement admissible (satisfaisant les conditions aux limites en déplacement) donné et les  $\{\bar{\underline{\xi}}_i, \underline{\theta}_i\}$  sont des champs cinématiquement admissibles à zéro (satisfaisant des conditions aux limites en déplacement homogènes) arbitraires, appelés fonctions de base de l'approximation. La restriction de l'énergie potentielle totale  $E_p$  à  $\widetilde{CA}$  est alors toujours différentiable, strictement convexe et tend vers l'infini à l'infini. Elle atteint donc son minimum en  $\{\bar{\underline{\xi}}, \bar{\underline{\theta}}\} \in \widetilde{CA}$  qui apparait alors comme un bon candidat pour définir une solution approchée au problème d'équilibre considéré.

Nous allons maintenant préciser ce point. Munissons l'espace vectoriel  $CA_0$  associé à l'espace affine  $CA$  du produit scalaire en « énergie de déformation élastique » :

$$\left( \{\bar{\underline{\xi}}_1, \underline{\theta}_1\}, \{\bar{\underline{\xi}}_2, \underline{\theta}_2\} \right)_{\text{élast}} = \int_0^l \frac{d}{dx} \{\bar{\underline{\xi}}_1, \underline{\theta}_1\} \cdot \underline{A} \cdot \frac{d}{dx} \{\bar{\underline{\xi}}_2, \underline{\theta}_2\},$$

qui fournit une norme équivalente à la norme  $H^1$ . Évaluons maintenant la distance (au sens de la norme induite par ce produit scalaire) d'un élément  $\{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\}$  quelconque de  $\widetilde{CA}$  à la solution exacte  $\{\bar{\underline{\xi}}, \bar{\underline{\theta}}\}$  du problème d'équilibre considéré. Réutilisant la notation  $E_p = W - \Phi$  introduite à la section 4.2, il vient :

$$\begin{aligned} & \left( \{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\} - \{\bar{\underline{\xi}}, \bar{\underline{\theta}}\}, \{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\} - \{\bar{\underline{\xi}}, \bar{\underline{\theta}}\} \right)_{\text{élast}} \\ &= 2W(\{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\}) - 2W(\{\bar{\underline{\xi}}, \bar{\underline{\theta}}\}) - 2 \int_0^l \frac{d}{dx} \{\bar{\underline{\xi}}, \bar{\underline{\theta}}\} \cdot \underline{A} \cdot \frac{d}{dx} (\{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\} - \{\bar{\underline{\xi}}, \bar{\underline{\theta}}\}), \\ &= 2W(\{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\}) - 2W(\{\bar{\underline{\xi}}, \bar{\underline{\theta}}\}) - 2 \left[ \Phi(\{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\}) - \Phi(\{\bar{\underline{\xi}}, \bar{\underline{\theta}}\}) \right], \\ &= 2 \left[ E_p(\{\hat{\underline{\xi}}, \hat{\underline{\theta}}\}) - E_p(\{\bar{\underline{\xi}}, \bar{\underline{\theta}}\}) \right], \end{aligned} \tag{B.1}$$

où on a effectué une intégration par parties et exploité le fait que  $\{\bar{\underline{\xi}}, \bar{\underline{\theta}}\}$  soit la solution exacte du problème d'équilibre. Il en résulte alors la conclusion suivante, schématisée sur la figure B.1, qui précise en quel sens l'élément  $\{\bar{\underline{\xi}}, \bar{\underline{\theta}}\}$ , qui minimise la restriction de l'énergie potentielle totale au sous-espace  $\widetilde{CA}$ , définit la meilleure approximation de la solution exacte  $\{\bar{\underline{\xi}}, \bar{\underline{\theta}}\}$  dans le sous-espace  $\widetilde{CA}$ .

L'élément  $\{\tilde{\xi}, \tilde{\theta}\}$  qui minimise la restriction de l'énergie potentielle totale au sous-espace  $\widetilde{CA}$  est l'élément de  $\widetilde{CA}$  qui minimise la distance (induite par l'énergie élastique de déformation) à la solution exacte  $\{\bar{\xi}, \theta\}$ ; en d'autre terme  $\{\tilde{\xi}, \tilde{\theta}\}$  est la projection orthogonale (au sens du produit scalaire induit par l'énergie élastique de déformation) de la solution exacte  $\{\bar{\xi}, \theta\}$  sur le sous-espace  $\widetilde{CA}$ .

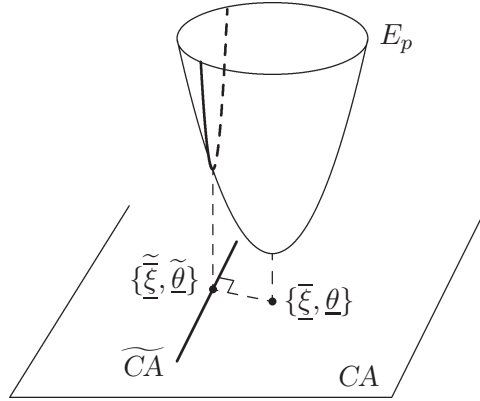


FIG. B.1 – Principe de l'approximation de Rayleigh-Ritz.

Bien entendu, la méthode proposée n'a d'intérêt que si le calcul de la solution approchée est plus facile à mener que celui de la solution exacte. En l'occurrence, c'est acquis par le fait que le sous-espace d'approximation  $\widetilde{CA}$  a été choisi de dimension finie, alors que l'espace entier  $CA$  des champs cinématiquement admissibles est toujours de dimension infinie. En effet, l'énergie potentielle totale d'un champ  $\{\hat{\xi}, \hat{\theta}\}$  arbitraire dans  $\widetilde{CA}$  :

$$\{\hat{\xi}, \hat{\theta}\} = \{\bar{\xi}_0, \theta_0\} + \sum_{i=1}^n q_i \{\bar{\xi}_i, \theta_i\},$$

s'écrit :

$$E_p(\{\hat{\xi}, \hat{\theta}\}) = \frac{1}{2} \underline{q} \cdot \underline{K} \cdot \underline{q} - \underline{F} \cdot \underline{q} + E_p(\{\bar{\xi}_0, \theta_0\}),$$

où  $\underline{K}$  est la matrice symétrique définie positive dont les coefficients sont :

$$K_{ij} = \int_0^l \frac{d}{dx} \{\bar{\xi}_i, \theta_i\} \cdot \underline{A} \cdot \frac{d}{dx} \{\bar{\xi}_j, \theta_j\},$$

et  $\underline{F}$  est le vecteur de composantes :

$$F_i = \int_0^l [\underline{F}_0, \underline{C}_0] \cdot \{\bar{\xi}_i, \theta_i\} - \int_0^l \frac{d}{dx} \{\bar{\xi}_0, \theta_0\} \cdot \underline{A} \cdot \frac{d}{dx} \{\bar{\xi}_i, \theta_i\}.$$

Ainsi, le vecteur  $\tilde{q}$  de  $\mathbb{R}^n$  défini par les composantes de  $\{\tilde{\xi}, \tilde{\theta}\}$  relatives à la base considérée :

$$\{\tilde{\xi}, \tilde{\theta}\} = \{\bar{\xi}_0, \theta_0\} + \sum_{i=1}^n \tilde{q}_i \{\bar{\xi}_i, \theta_i\},$$



est donné par :

$$\tilde{\underline{q}} = \underline{\underline{K}}^{-1} \cdot \underline{\underline{F}}.$$

Ainsi le calcul de la solution approchée est-il ramené à l'inversion d'une matrice symétrique définie positive (appelée matrice de rigidité de l'approximation).

### Commentaires.

- La méthode d'approximation de Rayleigh-Ritz fournit, par son principe même, une approximation du champ de déplacement à l'équilibre. Bien entendu, rien n'interdit ensuite d'évaluer les contraintes généralisées associées à cette solution approchée en déplacement en utilisant la loi de comportement :

$$[\tilde{\underline{R}}, \tilde{\underline{M}}] = \underline{\underline{A}} \cdot \frac{d}{dx} \left\{ \tilde{\underline{\xi}}, \tilde{\underline{\theta}} \right\}.$$

Mais on ne doit pas perdre de vue que les contraintes ainsi calculées ne seront jamais statiquement admissibles. Plus précisément, elles ne le seront que si et seulement si la solution approchée coïncide avec la solution exacte, c'est-à-dire uniquement dans la circonstance où le sous-espace d'approximation  $\widetilde{CA}$  contient la solution exacte.

- On comprend alors mieux pourquoi on a préféré la formulation variationnelle en déplacement plutôt que celle en contrainte pour bâtir la méthode d'approximation. Si cette dernière avait été choisie, on aurait obtenu une approximation de la contrainte généralisée toujours statiquement admissible, mais le champ de déplacement approché alors évalué par la loi de comportement élastique n'aurait pas été cinématiquement admissible (sauf, là encore, dans le cas particulier où la solution approchée coïncide avec la solution exacte). Dans le cas des assemblages de poutres, cela se traduit par le fait que les conditions de continuité du déplacement aux nœuds de l'assemblage ne sont alors pas satisfaites par la solution approchée avec les conséquences désagréables que l'on imagine lors de la visualisation de la déformée de l'assemblage sous l'effet du chargement imposé.
- Ajoutons pour conclure que la méthode de Rayleigh-Ritz s'étend de manière immédiate au cas où des liaisons internes (comme celle de Navier-Bernoulli) sont présentes. Celles-ci sont incorporées dans la définition de l'espace des champs de déplacement cinématiquement admissibles, comme cela a été vu dans la section 4.2, et le reste se déroule à l'identique.

### Estimation de l'erreur

Toute approximation appelle une évaluation de l'erreur commise. Un premier pas dans ce sens a été effectué dans la section précédente où la formule (B.1) permet d'évaluer l'écart en énergie de déformation élastique entre solution approchée  $\{\tilde{\underline{\xi}}, \tilde{\underline{\theta}}\}$  et solution exacte  $\{\bar{\underline{\xi}}, \underline{\theta}\}$  :

$$\left( \{\tilde{\underline{\xi}}, \tilde{\underline{\theta}}\} - \{\bar{\underline{\xi}}, \underline{\theta}\}, \{\tilde{\underline{\xi}}, \tilde{\underline{\theta}}\} - \{\bar{\underline{\xi}}, \underline{\theta}\} \right)_{\text{élast}} = 2 \left[ E_p \left( \{\tilde{\underline{\xi}}, \tilde{\underline{\theta}}\} \right) - E_p \left( \{\bar{\underline{\xi}}, \underline{\theta}\} \right) \right]. \quad (\text{B.2})$$

Cette formule fournit le moyen de comparer les mérites de deux solutions approchées provenant de deux choix différents de sous-espace d'approximation : la meilleure est celle de plus petite énergie potentielle totale.

Par contre, la formule (B.2) ne permet pas directement l'évaluation de l'erreur commise en retenant une solution approchée. En effet, si l'énergie potentielle totale de la solution

approchée est facilement calculable, par contre l'énergie potentielle totale de la solution exacte reste, en général, inconnue. On doit alors combiner la formule (B.2) avec le théorème de minimum pour l'énergie complémentaire qui permet d'écrire (cf section 4.2) :

$$\forall [\underline{R}^*, \underline{M}^*] \in SA, \quad -E_p(\{\underline{\xi}, \underline{\varrho}\}) = E_c([\underline{R}, \underline{M}]) \leq E_c([\underline{R}^*, \underline{M}^*]).$$

Il suffit alors d'exhiber n'importe quel champ de contrainte généralisée statiquement admissible pour obtenir une majoration de l'erreur commise dans l'approximation de Rayleigh-Ritz. Naturellement, l'estimation d'erreur sera d'autant plus fine que le champ de contrainte choisi sera proche (au sens de la norme induite par l'énergie élastique de contrainte) du champ de contrainte exact à l'équilibre. Soulignons que l'on *ne peut pas* faire le choix du champ de contrainte associé à la solution approchée en déplacement par la loi de comportement élastique :

$$[\underline{\tilde{R}}, \underline{\tilde{M}}] = \underline{A} \cdot \frac{d}{dx} \{\underline{\tilde{\xi}}, \underline{\tilde{\varrho}}\}.$$

puisque l'on a vu que celui-ci n'est pas statiquement admissible, en général. Néanmoins, en théorie des poutres, il est en général assez facile d'exhiber un champ de contrainte statiquement admissible puisqu'un tel champ n'est astreint à satisfaire que des équations différentielles ordinaires complétées éventuellement par des conditions aux limites ainsi que des conditions d'équilibre aux nœuds de l'assemblage. C'est beaucoup plus difficile dans les autres théories de milieux continus où les champs de contrainte statiquement admissibles sont astreints à satisfaire des systèmes d'équations aux dérivées partielles.

### B.2.2 Systématisation : la méthode des éléments finis

Dans cette section, on se propose d'aborder la question du choix du sous-espace d'approximation  $\overline{CA}$  dans la méthode de Rayleigh-Ritz. La méthode des éléments finis a pour objectif de systématiser le choix des fonctions de base et donc du sous-espace d'approximation.

#### La discrétisation en éléments finis

Conservons, à titre d'illustration, l'exemple de la poutre naturelle rectiligne de longueur  $l$  avec conditions cinématiques aux deux extrémités. L'espace affine  $CA$  s'identifie alors aux fonctions de  $H^1(]0, l[; \mathbb{R}^6)$  dont les valeurs en  $x = 0$  et  $x = l$  sont prescrites.

On appelle discrétisation en éléments finis (ou maillage) de la poutre, la donnée d'un nombre fini  $n$  d'intervalles  $[x_i, x_{i+1}]$  recouvrant l'intervalle  $[0, l]$  :

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = l.$$

Les  $x_i$  sont appelés les *nœuds* de la discrétisation en éléments finis. On va maintenant s'appuyer sur cette discrétisation spatiale de la poutre pour construire de manière systématique les fonctions de base d'un sous-espace d'approximation.

**Éléments finis de degré 1** Les éléments finis de degré 1 sont construits sur le choix de fonctions de base continues et dont la restriction à chaque élément fini est un *polynôme de degré 1*. Cela implique que tous les champs de distributeur de déplacement linéarisé du

sous-espace d'approximation  $\widetilde{CA}$  seront affines par morceaux. En considérant, par exemple, la première des six composantes du distributeur, à savoir  $\bar{\xi}_x$ , cela correspond à des fonctions de base dont le graphe est représenté sur la figure B.2. La première composante (la fonction

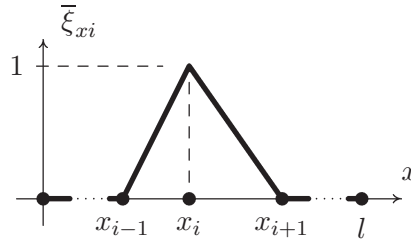


FIG. B.2 – Fonctions de bases d'une discrétisation en éléments finis de degré 1.

$\hat{\xi}_x(x)$  d'un élément quelconque  $\{\hat{\xi}, \hat{\theta}\}$  s'écrit alors :

$$\hat{\xi}_x(x) = \bar{\xi}_{x0}(x) + \sum_{i=1}^{n-1} q_i \bar{\xi}_{xi}(x),$$

où la fonction  $\bar{\xi}_{x0}$  est (par exemple) la fonction continue, affine sur chaque élément fini  $]x_i, x_{i+1}[$ , identiquement nulle sur  $[x_1, x_{n-1}]$  et prenant les valeurs prescrites  $\bar{\xi}_{0x}, \bar{\xi}_{lx}$  en  $x = 0, l$ . On constate alors que les  $q_i$  ne sont autres que les valeurs aux nœuds de la fonction affine par morceaux  $\hat{\xi}_x(x) \in \widetilde{CA}$ .

La dimension du sous-espace d'approximation est alors clairement  $6(n - 1)$ . On dit que la discrétisation en  $n$  éléments finis de degré 1 d'une poutre naturelle avec conditions cinématiques prescrites aux deux extrémités possède  $6(n - 1)$  degrés de liberté.

La densité de l'espace vectoriel des fonctions en escalier dans  $L^2$  entraîne immédiatement la densité des fonctions continues et affines par morceaux dans  $H^1$ . Cela signifie que toute fonction de  $H^1$  peut être approchée d'aussi près que l'on veut (en norme  $H^1$  ou en norme de l'énergie élastique de déformation qui lui est équivalente sur  $CA_0$ ) par une fonction continue affine par morceaux. Il résulte alors du fait (obtenu à la section B.2.1) que la solution approchée est la projection orthogonale (pour le produit scalaire en énergie élastique de déformation) de la solution exacte sur le sous-espace d'approximation, que la suite des solutions approchées obtenue en considérant des maillages éléments finis de plus en plus fins converge (pour la norme associée à l'énergie élastique de déformation) vers la solution exacte lorsque le pas du maillage :

$$\max_i |x_{i+1} - x_i|,$$

tend vers 0. Ce résultat donne un sens précis à la convergence théorique de la méthode d'approximation lorsque l'on raffine le maillage de la structure en éléments finis.

**Éléments finis de degré 2** Pour une même discrétisation spatiale de la structure en éléments finis, on peut bien entendu faire des choix de fonctions de base plus raffinés. Par exemple, on peut considérer le sous-espace d'approximation constitué des fonctions continues dont la restriction à chaque élément est, non plus un polynôme de degré 1, mais

un polynôme de degré 2. Cela conduit, pour chacune des six composantes du champ de distributeur de déplacement linéarisé, à, non plus une, mais trois fonctions de base par nœuds. Il en résulte que la discrétisation en  $n$  éléments finis de degré 2 d'une poutre naturelle avec conditions cinématiques prescrites aux deux extrémités possède  $6(2n - 1)$  degrés de liberté.

**Éléments finis de poutre de Navier-Bernoulli** Considérons une poutre rectiligne paramétrée par  $x \in ]0, l[$ , obéissant à la liaison interne de Navier-Bernoulli. On suppose que les mouvements ont lieu dans le plan  $(Oxy)$  et que le champ de distributeur de déplacement linéarisé a ses valeurs prescrites aux deux extrémités. L'espace des champs de déplacement cinématiquement admissibles s'écrit alors :

$$CA = \left\{ \left( \hat{\xi}_x, \hat{\xi}_y, \hat{\theta}_z \right) \in H^1(]0, l[; \mathbb{R}^3) \mid \left( \hat{\xi}_x(0), \hat{\xi}_y(0), \hat{\theta}_z(0) \right) = \left( \bar{\xi}_{0x}, \bar{\xi}_{0y}, \theta_{0z} \right), \right. \\ \left. \left( \hat{\xi}_x(l), \hat{\xi}_y(l), \hat{\theta}_z(l) \right) = \left( \bar{\xi}_{lx}, \bar{\xi}_{ly}, \theta_{lz} \right), \frac{d}{dx} \hat{\xi}_y \equiv \hat{\theta}_z \right\},$$

qui s'identifie à :

$$CA = \left\{ \left( \hat{\xi}_x, \hat{\xi}_y \right) \in H^1(]0, l[; \mathbb{R}) \times H^2(]0, l[; \mathbb{R}) \mid \right. \\ \left. \left( \hat{\xi}_x(0), \hat{\xi}_y(0), \frac{d}{dx} \hat{\xi}_y(0) \right) = \left( \bar{\xi}_{0x}, \bar{\xi}_{0y}, \theta_{0z} \right), \right. \\ \left. \left( \hat{\xi}_x(l), \hat{\xi}_y(l), \frac{d}{dx} \hat{\xi}_y(l) \right) = \left( \bar{\xi}_{lx}, \bar{\xi}_{ly}, \theta_{lz} \right) \right\}.$$

Si les fonctions de bases continues et affines par morceaux représentées sur la figure B.2 sont toujours adaptées à l'approximation de  $\hat{\xi}_x$ , il n'en est plus de même pour  $\hat{\xi}_y$ , ces fonctions n'étant pas dans  $C^1 \supset H^2$ . On est ainsi amené à devoir considérer des fonctions de base  $C^1$  dont la restriction à chaque élément fini est un polynôme de degré 3. Cela conduit, pour

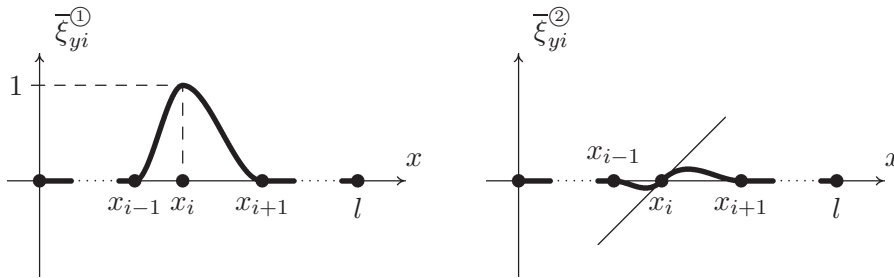


FIG. B.3 – Fonctions de bases d'une discrétisation en éléments finis d'une poutre de Navier-Bernoulli.

la fonction  $\hat{\xi}_y$ , à, non plus une, mais deux fonctions de base par nœuds. Ces fonctions de

base sont représentées sur la figure B.3. La composante  $\hat{\xi}_y(x)$  d'un champ de distributeur linéarisé quelconque du sous-espace d'approximation  $\widetilde{CA}$  s'écrit alors :

$$\hat{\xi}_y(x) = \bar{\xi}_{y0}(x) + \sum_{i=1}^{n-1} q_i^{(1)} \bar{\xi}_{yi}^{(1)}(x) + q_i^{(2)} \bar{\xi}_{yi}^{(2)}(x),$$

où la fonction  $\bar{\xi}_{y0}$  est (par exemple) la fonction  $C^1$ , identiquement nulle sur  $[x_1, x_{n-1}]$  et dont les restrictions à  $[0, x_1]$  et  $[x_{n-1}, l]$  sont des polynômes de degré 3 satisfaisant les conditions aux limites cinématiques prescrites en  $x = 0, l$  (qui portent sur les valeurs prises par le déplacement transverse ainsi que sur celles prises par sa dérivée première). Les  $q_i^{(1)}$  s'interprètent alors comme les valeurs du déplacement transverse aux nœuds de la discrétisation et les  $q_i^{(2)}$  comme les valeurs de l'angle de rotation de la section en chacun de ces nœuds.

Le nombre de degré de liberté de cette discrétisation en  $n$  éléments finis d'une poutre de Navier-Bernoulli en mouvements plans avec distributeur de déplacement linéarisé prescrit à chaque extrémité est alors clairement  $3(n - 1)$ .

### L'assemblage de la matrice de rigidité

Une fois réalisée la discrétisation en éléments finis de la structure, il faut calculer la matrice de rigidité associée à la discrétisation. En pratique, on commence par calculer des matrices de rigidité, dites « élémentaires », associées à chaque élément fini. Le calcul se fait alors dans un repère local, lié à l'élément sans tenir compte de l'orientation de celui-ci dans la structure globale. On procède ensuite à l'assemblage des matrices de rigidité élémentaires pour calculer la matrice de rigidité globale de la structure discrétisée en éléments finis.

**Calcul de la matrice de rigidité élémentaire d'un élément fini.** Illustrons le principe du calcul sur un élément fini de poutre de Navier-Bernoulli en mouvement plan, du type de celui présenté dans la section précédente. La composante tangentielle  $\hat{\xi}_x(x)$  du déplacement de la fibre moyenne est interpolée par un polynôme de degré 1 dont les coefficients seront explicités à partir des valeurs  $q_1, q_4$  prises par cette composante aux deux extrémités :

$$\hat{\xi}_x(x) = q_1 + \frac{q_1 - q_4}{l}x.$$

De même, la composante tangentielle  $\hat{\xi}_y(x)$  du déplacement de la fibre moyenne est interpolée par un polynôme de degré 3 dont les coefficients seront explicités à partir des valeurs  $q_2, q_5$  prises par cette composante aux deux extrémités, et des valeurs  $q_3, q_6$  prises par sa dérivée première aux deux extrémités :

$$\hat{\xi}_y(x) = q_2 + q_3x - \left( \frac{2q_3 + q_6}{l} + \frac{3(q_2 - q_5)}{l^2} \right)x^2 + \left( \frac{q_3 + q_6}{l^2} + \frac{2(q_2 - q_5)}{l^3} \right)x^3.$$

Pour calculer la matrice de rigidité élémentaire de cet élément fini, il suffit alors de calculer l'énergie élastique de déformation associée à une valeur quelconque de  $\underline{q} \in \mathbb{R}^6$ . On supposera la modélisation poutre issue de la considération d'un cylindre tridimensionnel élastique de module d'Young  $E$ , la ligne moyenne ayant été choisie suivant le lieu des centres d'inertie des sections. La section droite courante, d'aire notée  $|\mathcal{S}|$ , sera supposée présenter deux axes

de symétrie distincts. On supposera enfin que la direction orthogonale au plan ( $Oxy$ ) est direction principale d'inertie géométrique pour chacune des sections droites, et on notera  $I$  le moment (principal) d'inertie géométrique commun à toutes les sections, dans cette direction. L'énergie élastique de l'élément fini s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \underline{q} \cdot \underline{K} \cdot \underline{q} &= \frac{1}{2} \int_0^l E|\mathcal{S}| \left( \frac{d\hat{\xi}_x}{dx} \right)^2 + EI \left( \frac{d^2\hat{\xi}_y}{dx^2} \right)^2, \\ &= \frac{E|\mathcal{S}|}{2l} (q_1 - q_4)^2 + \frac{EI}{2} \left\{ 4l \left( \frac{2q_3 + q_6}{l} + \frac{3(q_2 - q_5)}{l^2} \right)^2 \right. \\ &\quad - 12l^2 \left( \frac{2q_3 + q_6}{l} + \frac{3(q_2 - q_5)}{l^2} \right) \left( \frac{q_3 + q_6}{l^2} + \frac{2(q_2 - q_5)}{l^3} \right) \\ &\quad \left. + 12l^3 \left( \frac{q_3 + q_6}{l^2} + \frac{2(q_2 - q_5)}{l^3} \right)^2 \right\}, \end{aligned}$$

ce qui permet d'identifier la matrice (symétrique) de rigidité sous la forme :

$$\underline{K} = \begin{pmatrix} \frac{E|\mathcal{S}|}{l} & 0 & 0 & -\frac{E|\mathcal{S}|}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{E|\mathcal{S}|}{l} & 0 & 0 & \frac{E|\mathcal{S}|}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

La matrice de rigidité élémentaire est symétrique positive, mais elle n'est pas définie. Elle est de rang 3 puisque trois degrés de liberté (deux de translation et un de rotation), correspondant à des mouvements rigidifiants infinitésimaux de l'élément, ne contribuent pas à l'énergie élastique de déformation.

La matrice de rigidité élémentaire a été, ici, calculée exactement. Néanmoins, dans les logiciels de calcul par éléments finis qui doivent s'appuyer sur une systématisation algorithmique du calcul, les intégrales exprimant l'énergie élastique de déformation sont, le plus souvent, calculées numériquement de façon *approchée* (dans l'exemple qui nous concerne, on pourrait utiliser une évaluation des intégrales basée sur la méthode des trapèzes).

**Assemblage des matrices de rigidité élémentaires.** Une fois la matrice de rigidité élémentaire associée à chaque élément fini calculée dans un repère local lié à l'élément, il reste à assembler toutes ces matrices de rigidité élémentaires pour former la matrice de rigidité de la structure. Le principe en est très simple. On passe en revue tous les éléments. On applique à chaque matrice de rigidité élémentaire la rotation correspondant à son orientation dans la structure et on place ses coefficients à l'emplacement adéquat dans la matrice de rigidité globale.

L'assimilation du principe de cet assemblage va s'opérer par l'étude d'un exemple simple. Considérons un mât constitué d'une poutre de Navier-Bernoulli, paramétrée par  $x \in ]0, l[$ ,

obéissant à la loi de comportement :

$$R_x = E|\mathcal{S}_m| \frac{d\bar{\xi}_x}{dx}, \quad M_z = EI \frac{d^2\bar{\xi}_y}{dx^2},$$

et encastrée à sa base. Ce mât est haubanné par deux barres (poutres rectilignes ne pouvant se déformer qu'axialement) identiques, paramétrées par  $x \in ]0, l\sqrt{2}[$ , obéissant à la loi de comportement :

$$R_x = E|\mathcal{S}_h| \frac{d\bar{\xi}_x}{dx},$$

inclinaison d'un angle  $\pi/4$  et articulées à leurs extrémités (voir figure B.4). On souhaite étudier

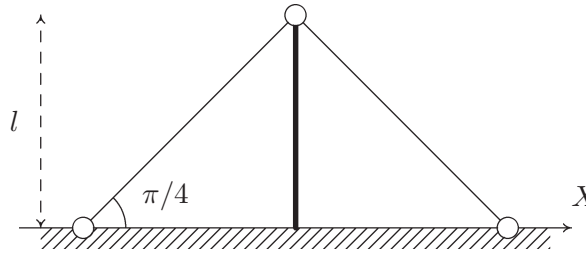


FIG. B.4 – Modèle de mât haubanné.

les déformations de cette structure dans son plan dans le cadre d'analyse statique TIEN. On décide de la discrétiser en trois éléments finis : un élément poutre de Navier-Bernoulli pour le mât et deux éléments barres pour les haubans. Les matrices de rigidité élémentaires s'obtiennent aisément à partir de la matrice (B.3) en supprimant les lignes et les colonnes correspondant aux degrés de liberté figés. La matrice de rigidité élémentaire du mât s'écrit alors :

$$\underline{\underline{K}}_m^{\text{él}} = \begin{pmatrix} \frac{E|\mathcal{S}_m|}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix},$$

et celle d'un hauban vaut :

$$\underline{\underline{K}}_h^{\text{él}} = \begin{pmatrix} \frac{E|\mathcal{S}_h|\sqrt{2}}{2l} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

La rotation d'angle  $\alpha$  de la matrice de rigidité élémentaire de l'élément poutre de Navier-Bernoulli s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{\underline{K}}_m^{\text{él}} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \frac{E|\mathcal{S}_m| \cos^2 \alpha}{l} + \frac{12EI \sin^2 \alpha}{l^3} & \frac{E|\mathcal{S}_m| \sin 2\alpha}{2l} - \frac{12EI \sin 2\alpha}{2l^3} & \frac{6EI \sin \alpha}{l^2} \\ \frac{E|\mathcal{S}_m| \sin 2\alpha}{2l} - \frac{12EI \sin 2\alpha}{2l^3} & \frac{E|\mathcal{S}_m| \sin^2 \alpha}{l} + \frac{12EI \cos^2 \alpha}{l^3} & -\frac{6EI \cos \alpha}{l^2} \\ \frac{6EI \sin \alpha}{l^2} & -\frac{6EI \cos \alpha}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix},$$

et la rotation d'angle  $\alpha$  de la matrice de rigidité élémentaire de l'élément barre est :

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \underline{\underline{K}}_h^{\text{él}} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E|\mathcal{S}_h|\sqrt{2} \cos^2 \alpha}{2l} & \frac{E|\mathcal{S}_h|\sqrt{2} \sin 2\alpha}{4l} \\ \frac{E|\mathcal{S}_h|\sqrt{2} \sin 2\alpha}{4l} & \frac{E|\mathcal{S}_h|\sqrt{2} \sin^2 \alpha}{2l} \end{pmatrix}.$$

Appliquant ces résultats à  $\alpha = \pi/2$  pour l'élément poutre de Navier-Bernoulli, et respectivement à  $\alpha = \pi/4$  et  $\alpha = 3\pi/4$  pour chacun des deux éléments barres, puis, rassemblant, la matrice de rigidité globale de la structure est :

$$\underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} \frac{E|\mathcal{S}_h|\sqrt{2}}{2l} + \frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{E|\mathcal{S}_h|\sqrt{2}}{2l} + \frac{E|\mathcal{S}_m|}{l} & 0 \\ \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix}$$

La connaissance de la matrice de rigidité de la structure discrétisée en éléments finis permet alors d'étudier ses déformations sous l'effet de chargement divers. Prenons l'exemple de l'effet d'un vent sur ce mât haubanné. L'effet de ce vent est modélisé par une force linéique homogène  $p \underline{E}_X$  qui s'applique uniquement sur le mât. On doit alors former le vecteur  $\underline{F}$  des forces nodales qui est défini par :

$$\underline{F} \cdot \underline{q} = - \int_0^l p \hat{\xi}_y = \frac{pl}{2} q_1 + \frac{pl^2}{12} q_3.$$

La résolution du système :

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{q} = \underline{F},$$

donne alors les valeurs des composantes de  $\underline{q}$  qui sont aussi les composantes du champ de déplacement approché à l'équilibre relativement à la base du sous-espace d'approximation associée à la décomposition de la structure en éléments finis. Ces composantes s'interprètent immédiatement en terme de composantes du déplacement et de la rotation du nœud commun aux trois éléments. On obtient :

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{pl^4}{8EI} \cdot \frac{1}{1 + \frac{|\mathcal{S}_h|l^2\sqrt{2}}{6I}} & (= \xi_X), \\ q_2 &= 0 & (= \xi_Y), \\ q_3 &= -\frac{pl^3}{6EI} \cdot \frac{1 - \frac{|\mathcal{S}_h|l^2\sqrt{2}}{48I}}{1 + \frac{|\mathcal{S}_h|l^2\sqrt{2}}{6I}} & (= \theta_Z). \end{aligned}$$

On constate que le signe de l'angle de rotation de l'extrémité « supérieure » du mât est négatif tant que la rigidité des haubans n'est pas trop importante par rapport à la rigidité flexionnelle du mât, c'est-à-dire, plus précisément, pourvu que :

$$|\mathcal{S}_h| \leq \frac{24I\sqrt{2}}{l^2},$$

et positif dans le cas contraire (voir figure B.5).

Le lecteur se convaincra aisément (par exemple, en vérifiant que les contraintes généralisées associées à cette déformation de la structure sont statiquement admissibles) que,



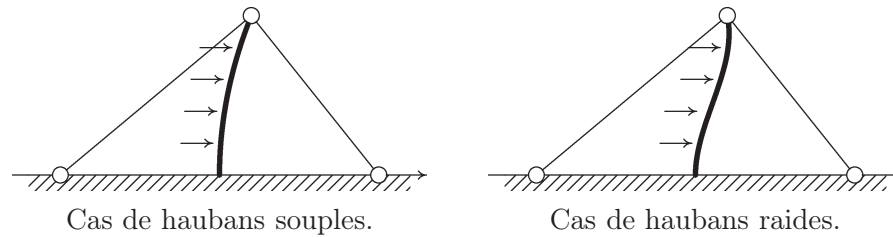


FIG. B.5 – Allure de la déformée du mât pour deux types de haubannage.

dans la circonstance étudiée, le calcul approché qui a été mené conduit, en fait, à la solution exacte.

Ajoutons pour conclure que cette procédure systématique d'assemblage des matrices de rigidité élémentaires pour obtenir la matrice de rigidité globale de la structure montre que tout coefficient  $K_{ij}$  de cette dernière est nul dès que les degrés de liberté  $q_i$  et  $q_j$  ne sont pas « partagés » par un même élément. La conséquence en est que les matrices de rigidité associées à la discrétisation en éléments finis de structures complexes sont *creuses*, en général, c'est-à-dire, qu'elles présentent une proportion importante de coefficients nuls. Pour éviter d'occuper inutilement de la place mémoire avec tous ces zéros, on recherche (et des algorithmes ont été développés pour cela) une numérotation optimale des éléments finis de la structure discrétisée et donc des degrés de liberté associés de manière à concentrer tous les coefficients non nuls de la matrice de rigidité au plus près de la diagonale. On dit que la numérotation est effectuée de manière à ce que la matrice de rigidité de la structure discrétisée ait une structure de « bande ». Connaissant alors le maximum de la distance à la diagonale des coefficients non nuls, on peut se dispenser de stocker en mémoire les coefficients de la matrice de rigidité dont la distance à la diagonale est supérieure à ce maximum (voir figure B.6).

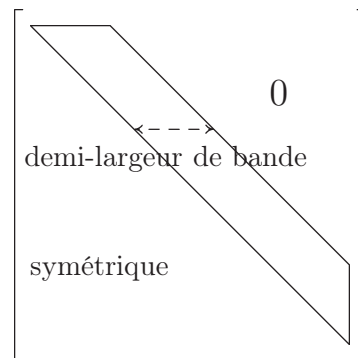


FIG. B.6 – Matrice symétrique à structure de « bande ».

### L'inversion : algorithme de Cholesky

La matrice de rigidité globale de la structure discrétisée en éléments finis est donc une matrice symétrique positive qui, de plus, est creuse. Elle est définie, et donc inversible, si

et seulement si les conditions aux limites cinématiques fixent tout déplacement rigidifiant éventuel de l'ensemble de la structure. En pratique, quitte à modifier légèrement l'écriture du problème aux limites étudié, la recherche de solution approchée par la méthode des éléments finis cherchera toujours à se placer dans cette circonstance favorable.

L'ordre de la matrice de rigidité globale atteint aujourd'hui couramment des valeurs de l'ordre de  $n = 100\,000$ . La résolution du système :

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{q} = \underline{F} \quad (\text{B.4})$$

n'étant déjà plus praticable par les formules de Cramer dès que  $n = 10$ , le nombre d'opérations en jeu augmentant exponentiellement avec l'ordre du système, on a recours à des méthodes plus adaptées. Les méthodes directes de résolution numérique d'un système linéaire sont basées sur l'observation que la résolution est immédiate lorsque la matrice est triangulaire supérieure (méthode dite de « remontée »). La méthode de Gauss systématise cette observation en proposant un algorithme qui permet de factoriser n'importe quelle matrice  $\underline{\underline{A}}$  sous la forme :

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{U}},$$

où  $\underline{\underline{L}}$  est une matrice carrée triangulaire inférieure et  $\underline{\underline{U}}$  une matrice carrée triangulaire supérieure. Cette factorisation rend alors immédiate la résolution du système linéaire. Dans le cas particulier favorable où la matrice est symétrique définie positive, qui est la circonstance en jeu, on peut toujours obtenir cette factorisation sous la forme :

$$\underline{\underline{K}} = {}^t\underline{\underline{U}} \cdot \underline{\underline{U}}.$$

De plus, cette factorisation est unique si l'on requiert, en outre, que les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire supérieure  $\underline{\underline{U}}$  soient tous strictement positifs. L'algorithme de Cholesky fournit alors l'expression exacte des coefficients de la matrice  $\underline{\underline{U}}$ . En faisant varier  $i$  de 1 à  $n$ , on calcule successivement :

$$U_{ii} = \sqrt{K_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} U_{ki}^2},$$

$$U_{ij} = \frac{K_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} U_{ki} U_{kj}}{U_{ii}}, \quad j = i + 1, i + 2, \dots, n.$$

La méthode de Cholesky conduit à une résolution théoriquement exacte du système linéaire (B.4). Pour l'étude de l'effet des erreurs d'arrondi en fonction du paramètre de conditionnement de la matrice de rigidité, on renvoie le lecteur à un traité d'analyse numérique matricielle.

### Une limitation : le verrouillage

L'objectif de cette partie est d'avertir le lecteur sur le danger que présente l'utilisation « en aveugle » de la méthode des éléments finis pour rechercher des solutions approchées.

Considérons l'exemple d'une poutre rectiligne paramétrée par  $x \in ]0, l[$ , supposée comme d'habitude issue de la considération d'un cylindre tridimensionnel élastique homogène isotrope (module d'Young  $E$ , module de cisaillement  $\mu$ , aire des sections droites  $|\mathcal{S}|$ ). Les efforts linéiques sont supposés identiquement nuls, l'extrémité  $x = 0$  est encastree et l'on

exerce sur l'extrémité  $x = l$  un torseur qui se réduit à un couple, colinéaire à la direction  $Oz$ , supposée direction principale d'inertie géométrique des sections (moment d'inertie associé  $I$ ). Le cadre d'analyse est celui des transformations infinitésimales à partir de l'état précontraint. Il est clair que ce problème d'équilibre est plan.



FIG. B.7 – Poutre rectiligne sollicitée en flexion pure.

Dans un premier temps, on suppose que la poutre obéit à la loi de comportement standard et respecte donc, en particulier, la liaison interne de Navier-Bernoulli. Il est clair que le problème d'équilibre considéré est plan. La poutre est alors discrétisée en un seul élément fini de poutre de Navier-Bernoulli du type de celui décrit dans la section B.2.2. Le lecteur vérifiera alors aisément que la solution approchée du problème d'équilibre fournie par la méthode des éléments finis est, en fait, la solution exacte. En particulier, il suffit d'une discrétisation en un seul élément fini de poutre de Navier-Bernoulli pour accéder à la valeur exacte de la raideur globale en flexion de la poutre.

Considérons maintenant un modèle de poutre naturelle, obéissant à la loi de comportement :

$$\begin{aligned} R_x &= E|\mathcal{S}| \frac{d}{dx} \bar{\xi}_x, \\ R_y &= \mu|\mathcal{S}| \left( \frac{d}{dx} \bar{\xi}_y - \theta_z \right), \\ M_z &= EI \frac{d}{dx} \theta_z. \end{aligned}$$

La solution exacte du problème d'équilibre correspondant fournit la valeur de la raideur en flexion de la poutre :

$$C_z = \frac{EI}{l} \theta_z(l).$$

La poutre est alors discrétisée en un seul élément fini de degré 1. La matrice de rigidité associée vaut alors :

$$\underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} \frac{E|\mathcal{S}|}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu|\mathcal{S}|}{l} & -\frac{\mu|\mathcal{S}|}{2} \\ 0 & -\frac{\mu|\mathcal{S}|}{2} & \frac{EI}{l} + \frac{\mu|\mathcal{S}|l}{3} \end{pmatrix},$$

où les trois degrés de liberté associés  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  s'interprètent comme les valeurs en  $x = l$ , respectivement de  $\bar{\xi}_x$ ,  $\bar{\xi}_y$  et  $\theta_z$ . La résolution du système :

$$\underline{\underline{K}} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ C_z \end{pmatrix},$$

permet alors d'accéder à la valeur de la raideur en flexion issue de ce calcul par élément fini :

$$C_z = \left( \frac{EI}{l} + \frac{\mu|\mathcal{S}|l}{12} \right) \theta_z(l).$$

Dans le cas d'une poutre très élancée :

$$I \ll |\mathcal{S}|l^2,$$

on constate que le calcul par élément fini conduit à une surestimation très importante de la rigidité en flexion puisque :

$$\frac{EI}{l} \ll \frac{\mu|\mathcal{S}|l}{12}.$$

Ce phénomène, appelé « verrouillage », impose de choisir un pas de discrétisation en élément fini petit devant le diamètre de la poutre, ce qui est évidemment extrêmement contraignant pour les poutres élancées. Cette observation conduit, dans cette circonstance, à utiliser une autre méthode d'approximation, fondée, non plus sur la formulation variationnelle en déplacement, mais sur une formulation variationnelle portant à la fois sur les déplacements et les contraintes. On parle alors d'éléments finis « mixtes ».

### B.3 Solutions approchées en dynamique linéarisée

Nous discutons ici de la recherche de solutions approchées pour la dynamique des assemblages de poutres élastiques dans le cadre d'analyse TIEN. Ici encore, nous illustrerons les différentes méthodes proposées sur l'exemple des vibrations axiales d'une poutre rectiligne dont les deux extrémités sont encastées. Cet exemple est choisi pour fixer les idées mais les méthodes proposées ont une portée tout-à-fait générale qui dépasse même le cadre de la théorie des poutres.

#### B.3.1 Semi-discrétisation : superposition modale

On considère les vibrations axiales libres, à partir d'une condition initiale, d'une poutre rectiligne (paramétrée par  $x \in ]0, l[$ ) encastée aux deux extrémités. Le problème d'évolution correspondant s'écrit (cf section 4.4) :

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\xi}_x(t, x) - E|\mathcal{S}| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{\xi}_x(t, x) &= 0, \\ \bar{\xi}_x(t, 0) = \bar{\xi}_x(t, l) &= 0, \\ \bar{\xi}_x(0, x) = \bar{\xi}_{x0}(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{\xi}_x(0, x) &= \dot{\bar{\xi}}_{x0}(x), \end{aligned}$$

où  $E$  désigne le module d'Young du matériau constitutif,  $|\mathcal{S}|$  l'aire courante de la section et  $\bar{\rho}_0$  la masse linéique de la poutre, toutes ces quantités étant supposées homogènes. Pour alléger les notations, dans toute la suite, nous omettrons l'indice  $x$  et désignerons par  $\bar{\xi}(t, x)$  le champ scalaire du déplacement axial de la fibre moyenne de la barre. L'espace affine des champs de déplacement cinématiquement admissibles se confondant ici avec l'espace

$H_0^1(]0, l[; \mathbb{R})$ , on dispose de la formulation faible équivalente :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (\bar{\xi}(t), \hat{\xi})_{\text{cin}} + (\bar{\xi}(t), \hat{\xi})_{\text{élas}} &= 0, \quad \forall \hat{\xi} \in CA = H_0^1(]0, l[; \mathbb{R}), \\ \bar{\xi}(0, x) &= \bar{\xi}_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{\xi}(0, x) = \dot{\bar{\xi}}_0(x), \end{aligned}$$

où l'on a fait apparaître les produits scalaires « en énergie cinétique » et « énergie élastique de déformation », définis, ici, par :

$$\begin{aligned} (\bar{\xi}, \hat{\xi})_{\text{cin}} &= \bar{\rho}_0 \int_0^l \bar{\xi}(x) \hat{\xi}(x) dx, \\ (\bar{\xi}, \hat{\xi})_{\text{élas}} &= E|\mathcal{S}| \int_0^l \frac{d}{dx} \bar{\xi}(x) \frac{d}{dx} \hat{\xi}(x) dx. \end{aligned}$$

On sait alors (cf section 4.4.2) que, sous réserve que la condition initiale ait la régularité  $(\bar{\xi}_0, \dot{\bar{\xi}}_0) \in H_0^1 \times L^2$ , cette formulation faible du problème d'évolution dynamique admet une unique solution  $\bar{\xi} \in C^0([0, T]; H_0^1) \cap C^1([0, T]; L^2)$ .

#### Approximation : les éléments finis

On considère alors un sous-espace d'approximation  $\widetilde{CA}$  de dimension finie, par exemple issu d'une discrétisation en éléments finis de la poutre (cf section B.2.2) :

$$\widetilde{CA} = \left\{ \sum_{i=1}^n q_i \bar{\xi}^i(x) \mid \underline{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n \right\},$$

où les  $\bar{\xi}^i$  désignent les fonctions de base de la discrétisation en éléments finis. Le problème approché à résoudre consiste alors naturellement à rechercher une fonction  $\widetilde{\xi} : [0, T] \rightarrow \widetilde{CA}$  satisfaisant :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} (\widetilde{\xi}(t), \hat{\xi})_{\text{cin}} + (\widetilde{\xi}(t), \hat{\xi})_{\text{élas}} &= 0, \quad \forall \hat{\xi} \in \widetilde{CA}, \\ \widetilde{\xi}(0, x) &= \widetilde{\xi}_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} \widetilde{\xi}(0, x) = \dot{\widetilde{\xi}}_0(x), \end{aligned}$$

où  $(\widetilde{\xi}_0, \dot{\widetilde{\xi}}_0)$  désigne une approximation de la condition initiale  $(\bar{\xi}_0, \dot{\bar{\xi}}_0)$  dans  $\widetilde{CA}$ , qui sera définie dans la suite. Notant  $\widetilde{q}_0$  et  $\dot{\widetilde{q}}_0$ , les composantes de ces approximations dans la base de  $\widetilde{CA}$  :

$$\begin{aligned} \widetilde{\xi}_0 &= \sum_{i=1}^n \widetilde{q}_{0i} \bar{\xi}^i, \\ \dot{\widetilde{\xi}}_0 &= \sum_{i=1}^n \dot{\widetilde{q}}_{0i} \bar{\xi}^i, \end{aligned}$$

et introduisant la matrice de rigidité  $\underline{K}$  de la discrétisation élément fini :

$$K_{ij} = (\bar{\xi}^i, \bar{\xi}^j)_{\text{élas}},$$

ainsi que la matrice de masse  $\underline{\underline{M}}$  :

$$M_{ij} = \left( \bar{\xi}^i, \bar{\xi}^j \right)_{\text{cin}},$$

dont le calcul s'opère exactement de la même manière que celui de la matrice de rigidité en remplaçant l'énergie élastique de déformation par l'énergie cinétique, le problème approché est alors ramené à la recherche d'une fonction  $\underline{q} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  satisfaisant :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}} \cdot \ddot{\underline{q}}(t) + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{q}(t) &= \underline{0}, \quad \forall t \in [0, T], \\ \underline{q}(0) &= \underline{\tilde{q}}_0, \quad \frac{d}{dt} \underline{q}(0) = \underline{\dot{\tilde{q}}}_0. \end{aligned} \tag{B.5}$$

Ce problème de Cauchy admet une unique solution qui fournit l'approximation recherchée du problème d'évolution associé à l'équation des ondes. Les deux matrices  $\underline{\underline{M}}$  et  $\underline{\underline{K}}$  étant symétriques définies positives, le théorème de réduction simultané de deux formes bilinéaires symétriques, l'une étant définie :

$${}^t \underline{P} \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{P} = \underline{\underline{1}}, \quad {}^t \underline{P} \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{P} = \text{diag}(\tilde{\omega}_1^2, \tilde{\omega}_2^2, \dots, \tilde{\omega}_n^2),$$

montre que la matrice  $\underline{\underline{M}}^{-1} \cdot \underline{\underline{K}}$  est diagonalisable. Ses valeurs propres, toutes strictement positives et supposées rangées en ordre croissant, seront notées  $\tilde{\omega}_i^2$  et les vecteurs propres associés seront notés  $\underline{\tilde{q}}^i$ . Les  $\tilde{\omega}_i$  sont les pulsations propres de la structure discrétisée en éléments finis et les  $\underline{\tilde{q}}^i$  sont caractérisés par :

$$\tilde{\omega}_i^2 \underline{\underline{M}} \cdot \underline{\tilde{q}}^i - \underline{\underline{K}} \cdot \underline{\tilde{q}}^i = \underline{0}.$$

Les  $n$  fonctions :

$$\hat{\xi}^i = \sum_{j=1}^n \tilde{q}_j^i \bar{\xi}^j,$$

sont les modes propres de vibration de la structure discrétisée. Elles forment une base de  $\widetilde{CA}$ , orthogonale aussi bien pour le produit scalaire en énergie cinétique que pour le produit scalaire en énergie de déformation. Dans la suite, on la supposera normée pour le produit scalaire en énergie cinétique. Par ailleurs, on constate :

$$\tilde{\omega}_1^2 = \min_{\underline{q} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\underline{q} \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{q}}{\underline{q} \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{q}} = \min_{\hat{\xi} \in \widetilde{CA} \setminus \{0\}} \frac{\left( \hat{\xi}, \hat{\xi} \right)_{\text{élas}}}{\left( \hat{\xi}, \hat{\xi} \right)_{\text{cin}}} \geq \min_{\hat{\xi} \in CA \setminus \{0\}} \frac{\left( \hat{\xi}, \hat{\xi} \right)_{\text{élas}}}{\left( \hat{\xi}, \hat{\xi} \right)_{\text{cin}}} = \omega_1^2,$$

c'est-à-dire que la fréquence propre de vibration fondamentale de la structure discrétisée est toujours supérieure ou égale à la fréquence propre de vibration fondamentale de la structure non discrétisée. Les quotients figurant dans la formule ci-dessus sont appelés *quotients de Rayleigh*. On pourrait aussi montrer que ce résultat s'étend aux  $i$ ème fréquences propres de vibration :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad \tilde{\omega}_i \geq \omega_i,$$

où les fréquences propres sont supposées avoir été rangées en ordre croissant.

La base orthogonale de  $\widetilde{CA}$  fournie par les modes propres de vibration  $\widetilde{\xi}^i$  fournit un moyen commode pour définir et calculer les approximations  $\widetilde{\xi}_0$  et  $\dot{\widetilde{\xi}}_0$  des conditions initiales dans  $\widetilde{CA}$  par projection orthogonale :

$$\begin{aligned}\widetilde{\xi}_0 &= \sum_{i=1}^n (\widetilde{\xi}_0, \widetilde{\xi}^i)_{\text{cin}} \widetilde{\xi}^i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\widetilde{\omega}_i^2} (\widetilde{\xi}_0, \widetilde{\xi}^i)_{\text{élas}} \widetilde{\xi}^i, \\ \dot{\widetilde{\xi}}_0 &= \sum_{i=1}^n (\dot{\widetilde{\xi}}_0, \widetilde{\xi}^i)_{\text{cin}} \widetilde{\xi}^i.\end{aligned}$$

Il en résulte l'expression suivante des vecteurs  $\widetilde{\underline{q}}_0, \dot{\widetilde{\underline{q}}}_0 \in \mathbb{R}^n$  :

$$\begin{aligned}\widetilde{\underline{q}}_0 &= \sum_{i=1}^n (\widetilde{\xi}_0, \widetilde{\xi}^i)_{\text{cin}} \widetilde{\underline{q}}^i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\widetilde{\omega}_i^2} (\widetilde{\xi}_0, \widetilde{\xi}^i)_{\text{élas}} \widetilde{\underline{q}}^i, \\ \dot{\widetilde{\underline{q}}}_0 &= \sum_{i=1}^n (\dot{\widetilde{\xi}}_0, \widetilde{\xi}^i)_{\text{cin}} \widetilde{\underline{q}}^i,\end{aligned}$$

et la solution *exacte* du problème approché (B.5) est alors donnée par :

$$\underline{q}(t) = \sum_{i=1}^n \left\{ (\widetilde{\xi}_0, \widetilde{\xi}^i)_{\text{cin}} \cos(\widetilde{\omega}_i t) + (\dot{\widetilde{\xi}}_0, \widetilde{\xi}^i)_{\text{cin}} \frac{\sin(\widetilde{\omega}_i t)}{\widetilde{\omega}_i} \right\} \widetilde{\underline{q}}^i. \quad (\text{B.6})$$

Si maintenant on considère une suite de maillage élément finis de la barre dont le pas tend vers 0, alors on démontre, et nous l'admettons, que la suite des solutions (fournie par la formule (B.6)) converge, dans  $C^0([0, T]; H_1^0)$  et aussi dans  $C^1([0, T]; L^2)$ , vers l'unique solution du problème de départ. Ce résultat de convergence est la justification théorique de cette méthode de recherche de solution approchée.

En pratique, on se limite aux 10 ou 15 premiers termes de la somme (B.6) qui, en général, suffiront pour construire une approximation pertinente de la solution cherchée. On a ainsi ramené par la discrétisation en éléments finis de la structure, le problème de la recherche des vibrations libres à partir d'une condition initiale donnée, à la recherche des 10 ou 15 plus petites valeurs propres, et des vecteurs propres associés, de la matrice diagonalisable  $\underline{\underline{M}}^{-1} \cdot \underline{\underline{K}}$ . Le calcul pratique de ces quantités s'opère à l'aide de la méthode des puissances inverses qui est détaillée dans la section suivante.

### Résolution : la méthode des puissances inverses

Il s'agit ici de proposer une méthode pratique et systématique de calculer les plus petites valeurs propres (en nombre donné) et les vecteurs propres associés de la matrice  $\underline{\underline{M}}^{-1} \cdot \underline{\underline{K}}$  que l'on sait par ailleurs diagonalisable à valeurs propres toutes strictement positives. On sait également que les vecteurs propres sont deux-à-deux orthogonaux vis-à-vis du produit scalaire défini par  $\underline{\underline{M}}$  aussi bien que vis-à-vis du produit scalaire défini par  $\underline{\underline{K}}$ .

Constatons d'abord qu'il suffit de proposer une méthode de calcul de la plus petite valeur propre et d'un vecteur propre associé. En effet, si l'on a calculé ces deux quantités, on peut alors former la restriction de la matrice  $\underline{\underline{M}}^{-1} \cdot \underline{\underline{K}}$  au  $\underline{\underline{M}}$ -orthogonal de ce vecteur propre (qui est stable par  $\underline{\underline{M}}^{-1} \cdot \underline{\underline{K}}$ ), et appliquer de nouveau la même méthode à cette

restriction. Recommencant autant de fois que nécessaire, on pourra alors calculer les  $m$  plus petites valeurs propres de  $\underline{\underline{M}}^{-1} \cdot \underline{\underline{K}}$  ainsi que  $m$  vecteurs propres associés.

Nous allons donc maintenant décrire une méthode itérative pour calculer  $\tilde{\omega}_1$  et  $\tilde{\underline{q}}^1 \neq \underline{0}$  tels que :

$$\tilde{\omega}_1^2 \underline{\underline{M}} \cdot \tilde{\underline{q}}^1 - \underline{\underline{K}} \cdot \tilde{\underline{q}}^1 = \underline{0}.$$

Soit  $\underline{X}^0$  un vecteur arbitraire qui n'est pas contenu dans l'hyperplan engendré par les  $\tilde{\underline{q}}^i$  pour  $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ , et  $\underline{Y}^0 = \underline{X}^0 / \sqrt{\underline{X}^0 \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{X}^0}$ . On calcule alors par récurrence sur  $i \geq 1$  :

$$\begin{aligned} \underline{X}^i &= \underline{\underline{K}}^{-1} \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{Y}^{i-1}, \\ \underline{Y}^i &= \frac{\underline{X}^i}{\sqrt{\underline{X}^i \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \underline{X}^i}}, \\ \lambda_i &= \underline{Y}^i \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \underline{Y}^i, \end{aligned}$$

où la première étape est réalisée pratiquement à l'aide de la méthode de Cholesky décrite dans la section B.2.2. Alors :

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} (\underline{Y}^i, \lambda_i) = (\tilde{\underline{q}}^1, \tilde{\omega}_1^2).$$

En effet, par hypothèse :

$$\underline{X}^0 = \alpha_1 \tilde{\underline{q}}^1 + \sum_{j=2}^n \alpha_j \tilde{\underline{q}}^j \quad (\alpha_1 \neq 0).$$

Comme les  $\tilde{\underline{q}}^j$  sont  $\underline{\underline{M}}$ -orthogonaux et  $\underline{\underline{K}}$ -orthogonaux, et qu'en outre :

$$\tilde{\underline{q}}^j \cdot \underline{\underline{K}} \cdot \tilde{\underline{q}}^j = \tilde{\omega}_j^2 \tilde{\underline{q}}^j \cdot \underline{\underline{M}} \cdot \tilde{\underline{q}}^j = \tilde{\omega}_j^2,$$

il en résulte facilement :

$$\begin{aligned} \underline{X}^i &= \frac{\tilde{\underline{q}}^1 + \frac{1}{\tilde{\omega}_1^{2i}} \sum_{j=2}^n \tilde{\omega}_j^{2i} \alpha_j \tilde{\underline{q}}^j}{\left| \tilde{\underline{q}}^1 + \frac{1}{\tilde{\omega}_1^{2i}} \sum_{j=2}^n \tilde{\omega}_j^{2i} \alpha_j \tilde{\underline{q}}^j \right|_{\underline{\underline{M}}}}, \\ \lambda_i &= \frac{\tilde{\omega}_1^2 + \frac{1}{\tilde{\omega}_1^{4i}} \sum_{j=2}^n \tilde{\omega}_j^{4i+2} \alpha_j^2}{\left| \tilde{\underline{q}}^1 + \frac{1}{\tilde{\omega}_1^{2i}} \sum_{j=2}^n \tilde{\omega}_j^{2i} \alpha_j \tilde{\underline{q}}^j \right|_{\underline{\underline{M}}}^2}, \end{aligned}$$

et donc la convergence annoncée.

En pratique, il suffira de construire le vecteur  $\underline{X}^0$  de manière aléatoire et d'ajouter un test de convergence pour arrêter la récurrence. Les expressions explicites obtenues pour les  $\underline{X}^i$  et les  $\lambda_i$  montrent que des difficultés de convergence peuvent apparaître lorsque des fréquences propres de la structure discrétisée sont très voisines.



### B.3.2 Discrétisation totale : le schéma de Newmark

La méthode de semi-discrétisation (ou superposition modale) s'avère très performante pour la recherche de solution approchée en élasto-dynamique linéarisée. Ses limitations reposent sur le fait qu'elle exploite essentiellement le caractère linéaire du problème d'évolution en jeu. La méthode que nous allons décrire maintenant, bien que moins performante dans le cas particulier de l'élasto-dynamique linéarisée, a une portée plus générale au sens où elle peut facilement être adaptée pour les problèmes dynamiques mettant en jeu une non-linéarité.

#### Description du schéma de Newmark

Considérons le problème de Cauchy associé à une équation différentielle ordinaire du second ordre :

$$\begin{aligned}\ddot{q}(t) &= \varphi(t, q(t), \dot{q}(t)), \\ q(0) &= q_0, \quad \dot{q}(0) = \dot{q}_0.\end{aligned}$$

Pour obtenir une approximation numérique de la solution de ce problème de Cauchy, introduisons un découpage uniforme de l'intervalle de temps  $[0, T]$  :

$$t_k = k \Delta t, \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, K\},$$

où le pas de temps est donné par  $\Delta t = T/K$ . On cherche alors à calculer, pour tout  $k = 1, 2, \dots, K$ , une approximation  $(q_k, \dot{q}_k)$  de  $(q(t_k), \dot{q}(t_k))$ . Pour cela, commençons par remarquer que, pour toute solution suffisamment régulière de l'équation différentielle, on a :

$$q(t_{k+1}) = q(t_k) + \Delta t \dot{q}(t_k) + \Delta t^2 \left[ \beta \ddot{q}(t_{k+1}) + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{q}(t_k) \right] + O(\Delta t^3),$$

soit :

$$\begin{aligned}q(t_{k+1}) &= q(t_k) + \Delta t \dot{q}(t_k) + \Delta t^2 \left[ \beta \varphi(t_{k+1}, q(t_{k+1}), \dot{q}(t_{k+1})) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \varphi(t_k, q(t_k), \dot{q}(t_k)) \right] + O(\Delta t^3),\end{aligned}$$

et :

$$\dot{q}(t_{k+1}) = \dot{q}(t_k) + \Delta t \left[ \gamma \ddot{q}(t_{k+1}) + (1 - \gamma) \ddot{q}(t_k) \right] + O(\Delta t^2),$$

soit :

$$\begin{aligned}\dot{q}(t_{k+1}) &= \dot{q}(t_k) + \Delta t \left[ \gamma \varphi(t_{k+1}, q(t_{k+1}), \dot{q}(t_{k+1})) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \gamma) \varphi(t_k, q(t_k), \dot{q}(t_k)) \right] + O(\Delta t^2),\end{aligned}$$

où  $\beta$  et  $\gamma$  sont des paramètres. La méthode de Newmark consiste alors à remplacer l'équation différentielle par le schéma aux différences finies :

$$\begin{aligned}q_{k+1} &= q_k + \Delta t \dot{q}_k + \Delta t^2 \left[ \beta \varphi(t_{k+1}, q_{k+1}, \dot{q}_{k+1}) + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \varphi(t_k, q_k, \dot{q}_k) \right], \\ \dot{q}_{k+1} &= \dot{q}_k + \Delta t \left[ \gamma \varphi(t_{k+1}, q_{k+1}, \dot{q}_{k+1}) + (1 - \gamma) \varphi(t_k, q_k, \dot{q}_k) \right],\end{aligned}$$

pour  $k = 0, 1, 2, \dots, K - 1$ . Notons, qu'à chaque pas de temps, on doit alors résoudre un système  $2 \times 2$  non-linéaire (on dit que le schéma est alors implicite), sauf lorsque  $(\beta, \gamma) = (0, 0)$ , auquel cas le système est déjà résolu (on dit que le schéma est alors explicite). Nous verrons cependant plus loin que la stabilité du schéma (pas d'amplification des erreurs à chaque pas de temps) requiert  $\gamma \geq 1/2$ .

Étudions maintenant la *précision* du schéma de Newmark. Considérons une solution  $q(t)$  de l'équation différentielle, supposée suffisamment régulière. Un développement de Taylor au point  $t_k$  donne alors :

$$q(t_{k+1}) = q(t_k) + \Delta t \dot{q}(t_k) + \Delta t^2 \left[ \beta \ddot{q}(t_{k+1}) + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{q}(t_k) \right] + \Delta t^3 \left( \frac{1}{6} - \beta \right) \ddot{q}(t_k) + O(\Delta t^4),$$

et,

$$\dot{q}(t_{k+1}) = \dot{q}(t_k) + \Delta t \left[ \gamma \ddot{q}(t_{k+1}) + (1 - \gamma) \ddot{q}(t_k) \right] + \Delta t^2 \left( \frac{1}{2} - \gamma \right) \ddot{q}(t_k) + O(\Delta t^3),$$

lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$ . Ainsi, la suite  $(q_k, \dot{q}_k)$  ( $0 \leq k \leq K$ ) satisfait approximativement le schéma de Newmark au sens suivant :

$$\begin{aligned} q(t_{k+1}) &= q(t_k) + \Delta t \dot{q}(t_k) + \Delta t^2 \left[ \beta \varphi(t_{k+1}, q(t_{k+1}), \dot{q}(t_{k+1})) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \varphi(t_k, q(t_k), \dot{q}(t_k)) \right] + \Delta t \varepsilon_k, \\ \dot{q}(t_{k+1}) &= \dot{q}(t_k) + \Delta t \left[ \gamma \varphi(t_{k+1}, q(t_{k+1}), \dot{q}(t_{k+1})) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \gamma) \varphi(t_k, q(t_k), \dot{q}(t_k)) \right] + \Delta t \eta_k, \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} \varepsilon_k &= \Delta t^2 \left( \frac{1}{6} - \beta \right) \ddot{q}(t_k) + O(\Delta t^3), \\ \eta_k &= \Delta t \left( \frac{1}{2} - \gamma \right) \ddot{q}(t_k) + O(\Delta t^2). \end{aligned}$$

On dit alors que la méthode de Newmark est *d'ordre 1* pour  $\gamma \neq 1/2$  et *d'ordre 2* pour  $\gamma = 1/2$ .

### Étude de la stabilité du schéma de Newmark

La *stabilité* d'un schéma numérique correspond à l'idée que l'erreur ne doit pas s'amplifier au fur et à mesure des incréments de temps successifs de la méthode. Cette problématique va ici être étudiée pour l'application du schéma de Newmark à l'équation différentielle modèle :

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0 \quad (\omega > 0).$$

Toute solution de cette équation différentielle satisfait l'égalité de l'énergie :

$$|\dot{q}(t)|^2 + |\omega q(t)|^2 = |\dot{q}(0)|^2 + |\omega q(0)|^2,$$

de sorte que l'énergie  $|\dot{q}(t)|^2 + |\omega q(t)|^2$  reste bornée lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Pour se prémunir d'une éventuelle amplification de l'erreur au fur et à mesure des incréments de temps successifs de la méthode de Newmark, on va lui imposer une propriété analogue, à savoir que  $|\dot{q}_k|^2 + |\omega q_k|^2$  reste borné lorsque  $k \rightarrow +\infty$ , auquel cas le schéma sera réputé *stable*.

Appliqué à l'équation différentielle modèle, le schéma de Newmark s'écrit :

$$\begin{aligned} q_{k+1} &= q_k + \Delta t \dot{q}_k - \omega^2 \Delta t^2 \left[ \beta q_{k+1} + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) q_k \right], \\ \dot{q}_{k+1} &= \dot{q}_k - \omega^2 \Delta t \left[ \gamma q_{k+1} + (1 - \gamma) q_k \right]. \end{aligned}$$

Dans toute la suite, on se restreindra au cas  $\beta \geq 0$ , de sorte que l'on peut poser :

$$\underline{\underline{B}}(\theta) = \begin{pmatrix} \frac{1+(\beta-1/2)\theta^2}{1+\beta\theta^2} & \frac{\theta}{1+\beta\theta^2} \\ -\frac{\theta+(\beta-\gamma/2)\theta^3}{1+\beta\theta^2} & \frac{1+(\beta-\gamma)\theta^2}{1+\beta\theta^2} \end{pmatrix}$$

où  $\theta = \omega \Delta t$ . Le schéma de Newmark prend alors la forme :

$$\begin{pmatrix} \omega q_{k+1} \\ \dot{q}_{k+1} \end{pmatrix} = \underline{\underline{B}}(\theta) \cdot \begin{pmatrix} \omega q_k \\ \dot{q}_k \end{pmatrix}$$

soit :

$$\begin{pmatrix} \omega q_k \\ \dot{q}_k \end{pmatrix} = \underline{\underline{B}}^k(\theta) \cdot \begin{pmatrix} \omega q_0 \\ \dot{q}_0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, la méthode de Newmark est stable si  $|\underline{\underline{B}}^k(\theta)|$  reste borné lorsque  $k \rightarrow +\infty$ . Notant  $\rho(\underline{\underline{B}}(\theta))$  le *rayon spectral* de la matrice  $\underline{\underline{B}}(\theta)$  (c'est-à-dire le maximum des modules de toutes les valeurs propres réelles ou complexes de la matrice) et remarquant :

$$\rho(\underline{\underline{B}}(\theta))^k = \rho(\underline{\underline{B}}^k(\theta)) \leq |\underline{\underline{B}}^k(\theta)|,$$

on voit qu'une *condition nécessaire* de stabilité du schéma de Newmark est donnée par :

$$\rho(\underline{\underline{B}}(\theta)) \leq 1.$$

L'examen des deux racines du polynôme caractéristique de  $\underline{\underline{B}}(\theta)$  donne alors :

$$\rho(\underline{\underline{B}}(\theta)) \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \theta^2 \leq \begin{cases} \frac{2}{\gamma - 2\beta}, & \text{si } 2\beta < \gamma, \\ +\infty, & \text{si } 2\beta \geq \gamma. \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

En d'autres termes, suivant les valeurs respectives des paramètres  $\beta$  et  $\gamma$ , des pas de temps trop grands peuvent conduire à l'instabilité du schéma.

Il s'agit maintenant de vérifier dans quelle mesure ces conditions nécessaires très simples de stabilité du schéma sont suffisantes. Un cas où on peut conclure aisément est celui où la matrice  $\underline{\underline{B}}(\theta)$  est *normale* (c'est-à-dire, commute avec sa transposée), auquel cas on a :

$$|\underline{\underline{B}}(\theta)| = \rho(\underline{\underline{B}}(\theta)),$$

et les conditions nécessaires précédentes sont alors suffisantes. Néanmoins, on vérifie facilement que la matrice  $\underline{\underline{B}}(\theta)$  n'est normale que si  $\beta = 1/4$  et  $\gamma = 1/2$ . Dans ce cas, le schéma est donc stable. En fait, dans ce cas, la matrice  $\underline{\underline{B}}(\theta)$  est non seulement normale, mais orthogonale. Cela assure que le schéma respecte l'égalité de l'énergie (et c'est le cas seulement pour ce couple de valeurs des paramètres  $\beta, \gamma$ ). Cette propriété est particulièrement intéressante pour l'étude des vibrations libres sur des temps longs, puisqu'elle assure que le schéma ne produira pas d'amortissement artificiel des ondes. Pour l'obtention de conditions suffisantes de stabilité du schéma de Newmark dans le cas général, on va rechercher une matrice  $\underline{\underline{G}}(\theta)$  inversible telle que  $\underline{\underline{G}}(\theta) \cdot \underline{\underline{B}}(\theta) \cdot \underline{\underline{G}}^{-1}(\theta)$  soit normale. En effet, dans tous les cas où l'on y parviendra, on aura :

$$\begin{aligned} |\underline{\underline{B}}^k(\theta)| &= \left| \underline{\underline{G}}^{-1}(\theta) \cdot [\underline{\underline{G}}(\theta) \cdot \underline{\underline{B}}(\theta) \cdot \underline{\underline{G}}^{-1}(\theta)]^k \cdot \underline{\underline{G}}(\theta) \right|, \\ &\leq |\underline{\underline{G}}(\theta)| |\underline{\underline{G}}^{-1}(\theta)| \rho(\underline{\underline{B}}(\theta))^k, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

et donc la stabilité du schéma pourvu que  $\rho(\underline{\underline{B}}(\theta)) \leq 1$ . En limitant la recherche à des matrices  $\underline{\underline{G}}(\theta)$  triangulaires inférieures inversibles que l'on peut toujours prendre sous la forme :

$$\underline{\underline{G}}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s(\theta) & t(\theta) \end{pmatrix},$$

on vérifie facilement que la matrice  $\underline{\underline{G}}(\theta) \cdot \underline{\underline{B}}(\theta) \cdot \underline{\underline{G}}^{-1}(\theta)$  a ses coefficients diagonaux égaux et ses coefficients non-diagonaux opposés, et donc est normale dès que :

$$\begin{aligned} \frac{1 + (\beta - 1/2)\theta^2}{1 + \beta\theta^2} - \frac{\theta}{1 + \beta\theta^2} \frac{s}{t} &= \frac{1 + (\beta - \gamma)\theta^2}{1 + \beta\theta^2} + \frac{\theta}{1 + \beta\theta^2} \frac{s}{t}, \\ \frac{(\gamma - 1/2)\theta^2}{1 + \beta\theta^2} s - \frac{1 + (\beta - \gamma/2)\theta^2}{1 + \beta\theta^2} \theta t - \frac{\theta}{1 + \beta\theta^2} \frac{s^2}{t} &= \frac{\theta}{1 + \beta\theta^2} \frac{1}{t}, \end{aligned}$$

qui équivaut à :

$$\begin{aligned} t^2 &= \frac{4}{4 + \theta^2 [4\beta - (\gamma + 1/2)^2]}, \\ s &= \frac{(\gamma - 1/2)\theta}{2} t. \end{aligned}$$

Ce système n'a de solution réelle que si et seulement si :

$$4 + \theta^2 [4\beta - (\gamma + 1/2)^2] > 0,$$

soit :

$$\theta^2 < \begin{cases} \frac{4}{(\gamma + 1/2)^2 - 4\beta}, & \text{si } 4\beta < (\gamma + 1/2)^2, \\ +\infty, & \text{si } 4\beta \geq (\gamma + 1/2)^2. \end{cases}$$

Si cette condition est satisfaite, et qu'en outre  $\gamma \geq 1/2$ , l'équivalence (B.7) montre qu'alors  $\rho(\underline{\underline{B}}(\theta)) \leq 1$ , et donc que le schéma est stable.

En résumé, dans le cas où  $\beta \geq 0$ , on a montré qu'une condition nécessaire de stabilité du schéma de Newmark est :

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \theta^2 \leq \begin{cases} \frac{2}{\gamma - 2\beta}, & \text{si } 2\beta < \gamma, \\ +\infty, & \text{si } 2\beta \geq \gamma. \end{cases}$$

et qu'une condition suffisante est :

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \theta^2 < \begin{cases} \frac{4}{(\gamma + 1/2)^2 - 4\beta}, & \text{si } 4\beta < (\gamma + 1/2)^2, \\ +\infty, & \text{si } 4\beta \geq (\gamma + 1/2)^2. \end{cases}$$

**Remarque.** Le calcul explicite du rayon spectral de la matrice  $\underline{\underline{B}}(\theta)$ , dans le cas  $\gamma > 1/2$ ,  $4\beta \geq (\gamma + 1/2)^2$ , donne :

$$\rho(\underline{\underline{B}}(\theta)) = \left(1 - \frac{\theta^2(\gamma - 1/2)}{1 + \beta\theta^2}\right)^{1/2} < 1.$$

Il résulte alors de la formule (B.8) que, dans ce cas, le schéma de Newmark possède une propriété d'amortissement (qui n'est pas présente, comme on l'a vu, dans le cas  $\beta = 1/4$ ,  $\gamma = 1/2$ ). Cette propriété est parfois utilisée en pratique pour amortir les éventuelles oscillations parasites pouvant apparaître lors de l'utilisation du schéma dans le cas  $\beta = 1/4$ ,  $\gamma = 1/2$ . Naturellement, cela se paye en terme de précision, puisque le schéma n'est plus alors que d'ordre 1.

### Application à l'élasto-dynamique linéarisée

Revenons à l'exemple des vibrations axiales libre, à partir d'une condition initiale, de la poutre rectiligne encastree à ses deux extrémités, qui nous a déjà servi à illustrer la méthode de semi-discrétisation (superposition modale) :

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\xi}(t, x) - E|S| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{\xi}(t, x) &= 0, \\ \bar{\xi}(t, 0) = \bar{\xi}(t, l) &= 0, \\ \bar{\xi}(0, x) = \bar{\xi}_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} \bar{\xi}(0, x) &= \dot{\bar{\xi}}_0(x). \end{aligned}$$

On a vu, dans la section B.3.1, que la discrétisation en éléments finis (dite discrétisation spatiale) de la poutre et l'introduction du sous-espace d'approximation correspondant :

$$\widetilde{CA} = \left\{ \sum_{i=1}^n q_i \bar{\xi}^i(x) \mid \underline{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n \right\},$$

conduisait au problème approché :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{M}} \cdot \ddot{\underline{q}}(t) + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{q}(t) &= \underline{0}, \quad \forall t \in [0, T], \\ \underline{q}(0) = \underline{\tilde{q}}_0, \quad \frac{d}{dt} \underline{q}(0) &= \dot{\underline{\tilde{q}}}_0, \end{aligned}$$

où  $\underline{q}(t)$  désigne le vecteur de  $\mathbb{R}^n$  constitué des composantes de la solution approchée  $\tilde{\xi}(t)$  dans la base des fonctions de formes de la discrétisation en éléments finis. On a alors proposé, en s'appuyant sur le caractère linéaire du problème d'évolution et la décomposition sur les modes propres de vibration que cela autorise, une méthode de résolution de ce problème approché. Ne reposant en aucune manière sur la linéarité des équations, le schéma de Newmark permet alors de proposer une autre méthode de portée plus générale. Après introduction d'une discrétisation de l'intervalle de temps considéré, l'application de la méthode de Newmark au problème approché ci-dessus s'écrit :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{M}} \cdot \underline{q}_{k+1} &= \underline{\underline{M}} \cdot \underline{q}_k + \Delta t \underline{\underline{M}} \cdot \dot{\underline{q}}_k - \Delta t^2 \left[ \beta \underline{\underline{K}} \cdot \underline{q}_{k+1} + \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \underline{\underline{K}} \cdot \underline{q}_k \right], \\ \underline{\underline{M}} \cdot \dot{\underline{q}}_{k+1} &= \underline{\underline{M}} \cdot \dot{\underline{q}}_k - \Delta t \left[ \gamma \underline{\underline{K}} \cdot \underline{q}_{k+1} + (1 - \gamma) \underline{\underline{K}} \cdot \underline{q}_k \right].\end{aligned}$$

Notons qu'en éliminant  $\dot{\underline{q}}_k$  dans ces équations, on trouve le schéma :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{M}} \cdot (\underline{q}_{k+2} - 2\underline{q}_{k+1} + \underline{q}_k) \\ + \Delta t^2 \underline{\underline{K}} \cdot \left[ \beta \underline{q}_{k+2} + \left( \frac{1}{2} - 2\beta + \gamma \right) \underline{q}_{k+1} + \left( \frac{1}{2} + \beta - \gamma \right) \underline{q}_k \right] = \underline{0},\end{aligned}$$

où  $k$  parcourt successivement  $\{0, 1, \dots, K-2\}$ , de sorte, qu'à chaque pas de temps, il faut résoudre un système de la forme :

$$(\underline{\underline{M}} + \beta \Delta t^2 \underline{\underline{K}}) \cdot \underline{q}_{k+2} = \underline{f}_{k+2},$$

où le second membre  $\underline{f}_{k+2}$ , qui s'exprime en fonction de  $\underline{q}_k$  et  $\underline{q}_{k+1}$  est connu. La matrice  $\underline{\underline{M}} + \beta \Delta t^2 \underline{\underline{K}}$  étant symétrique définie positive, la résolution de ce système peut être réalisée pratiquement par la méthode de Cholesky (cf section B.2.2). D'ailleurs, on peut réaliser la factorisation de Cholesky une fois pour toute, pour n'avoir, à chaque pas de temps, plus qu'à résoudre deux systèmes linéaires triangulaires. Dans le cas où la matrice de masse est diagonale (ce qui peut être obtenu en concentrant toute la masse aux nœuds de la discrétisation) et, de plus,  $\beta = 0$ , le schéma est explicite.

Il reste à étudier la convergence de la solution numérique obtenue par discrétisation totale (spatiale et temporelle) vers la solution exacte lorsque le pas du maillage éléments finis et le pas de temps convergent vers 0. Pour cela, on pose :

$$\tilde{\xi}_k(x) = \sum_{i=1}^n q_{k,i} \bar{\xi}^i(x),$$

et l'on est conduit à examiner une norme de l'erreur :  $\tilde{\xi}_k - \bar{\xi}(t_k)$ . En s'appuyant sur l'étude de stabilité menée dans la section B.3.2, on peut alors montrer que, sous la condition :

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \tilde{\omega}_n^2 \Delta t^2 < \begin{cases} \frac{4}{(\gamma + 1/2)^2 - 4\beta}, & \text{si } 4\beta < (\gamma + 1/2)^2, \\ M, & \text{si } 4\beta \geq (\gamma + 1/2)^2, \end{cases}$$

où  $\tilde{\omega}_n$  est la plus grande pulsation propre de la barre discrétisée en éléments finis et  $M$  une constante arbitraire, indépendante du pas du maillage et du pas de temps, la norme en

énergie élastique de l'erreur :

$$\max_{k \in \{0,1,\dots,K\}} \|\tilde{\xi}_k - \bar{\xi}(t_k)\|_{\text{élas}}, \quad (\text{B.9})$$

tend vers 0, lorsque le pas du maillage et le pas de temps tendent vers 0. Dans le cas particulier où le maillage est homogène :

$$x_{i+1} - x_i = \frac{l}{n+1},$$

on peut montrer que :

$$\tilde{\omega}_n = O(n),$$

et la condition ci-dessus implique :

$$n \Delta t = O(1),$$

c'est-à-dire, que le pas du maillage et le pas de temps convergent vers 0 à la même vitesse. Ce résultat de convergence (conditionnel) constitue la justification théorique de la méthode.

Lorsque  $4\beta < (\gamma + 1/2)^2$  et que la condition de stabilité :

$$\tilde{\omega}_n^2 \Delta t^2 < \frac{4}{(\gamma + 1/2)^2 - 4\beta},$$

n'est pas satisfaite, l'erreur (B.9) tend, en général, vers  $+\infty$  lorsque  $n$  tend vers l'infini et  $\Delta t$  vers 0. On voit ainsi que la convergence du schéma repose essentiellement sur sa stabilité. Par contre, lorsque  $4\beta \geq (\gamma + 1/2)^2$ , la condition  $\tilde{\omega}_n^2 \Delta t^2 < M$  n'introduit aucune restriction gênante en pratique, dans la mesure où la constante  $M$  est arbitraire.

En conclusion, la méthode de Newmark correspondant à  $\beta \geq 1/4$  et  $\gamma = 1/2$  est inconditionnellement stable et d'ordre 2. Elle fournit en général une bonne approximation de la solution. La méthode la plus utilisée est relative au cas limite  $\beta = 1/4$  et  $\gamma = 1/2$  qui conserve l'énergie. Dans certains cas, cependant, elle fait apparaître des oscillations parasites qui ne sont pas amorties. Il est alors préférable d'utiliser la méthode de Newmark avec  $\beta \geq (\gamma + 1/2)^2 / 4$ ,  $\gamma > 1/2$  convenables. Cette méthode n'est plus que d'ordre 2 mais introduit une propriété d'amortissement de l'erreur au cours du temps qui se traduit par une diminution notable des oscillations parasites mentionnées plus haut. Le choix du coefficient  $\gamma$  convenable dépend dans une large mesure du problème considéré. Enfin, la méthode de Newmark correspondant à  $\beta = 0$ ,  $\gamma = 1/2$  est très utilisée en pratique lorsque la matrice de masse  $\underline{M}$  est diagonale (masse concentrée aux nœuds du maillage). Cependant dans ce cas, il faut absolument choisir un pas de temps respectant la condition de stabilité :

$$\tilde{\omega}_n^2 \Delta t^2 < 4.$$

## B.4 Calcul approché des bifurcations

Le résultat d'unicité de solution pour le problème d'équilibre linéarisé autour de l'état naturel (cadre d'analyse TIEN), démontré dans le chapitre 4, s'interprète, comme on l'a vu au chapitre 5, comme le fait que l'état naturel n'est point de bifurcation d'aucune courbe d'équilibre. Pour un problème à un paramètre de chargement  $Q$ , la solution du problème

d'équilibre du cadre d'analyse TIEN fournit alors l'unique tangente à la courbe d'équilibre en l'origine. Aucune analyse de bifurcation ne peut alors être menée dans ce cadre. Le cadre TIEN est un cadre d'analyse linéarisé et l'origine des bifurcations réside dans les non-linéarités.

Ainsi, le contexte de recherche, même approchée, de bifurcation est essentiellement non-linéaire. Les méthodes de calcul de solutions approchées dans ce contexte (cadre d'analyse DI-RF), et leur justification dépassent le cadre de ce cours introductif. Nous nous limiterons ici au contexte simple d'un problème à un paramètre de chargement  $Q$  et au calcul approché de ses valeurs critiques (éventuelles), lorsqu'il est loisible d'utiliser la théorie TIEN pour décrire la branche d'équilibre fondamentale. C'est le contexte qui a été étudié dans la section 5.3.2. Ce contexte rétréci a néanmoins un champ d'application très large en théorie des poutres. On sait, que dans ce cadre, tout point critique de la droite d'équilibre fondamentale est un point de bifurcation. Pour faire référence à ce cadre d'étude rétréci, on parle alors de *flambage eulerien*.

L'objectif ici est de décrire une méthode systématique de calcul approché de charge critique et du mode de bifurcation associé en flambage eulerien.

### B.4.1 Méthode générale

#### Rappel du cadre d'étude

Le cadre général de l'étude est celui qui a déjà été décrit et étudié dans la section 5.2. On en conserve les notations. On considère une poutre dont une configuration dénuée de contrainte (état naturel) est connue. La courbe définie par la fibre moyenne dans cette configuration est paramétrée par son abscisse curviligne notée  $S_0$ . On étudie, dans un premier temps, l'équilibre sous l'effet d'un chargement dépendant linéairement d'un paramètre scalaire noté  $Q$ . On peut alors associer à chaque valeur de  $Q$  dans un voisinage de 0, un unique déplacement à l'équilibre définissant la courbe d'équilibre fondamentale. On restreindra alors les valeurs susceptibles d'être prises par le paramètre de chargement  $Q$  de manière à pouvoir légitimement confondre la courbe d'équilibre fondamentale, ainsi définie, avec sa tangente en l'origine. Concrètement, cela signifie que la courbe d'équilibre fondamentale est décrite dans le cadre d'analyse linéarisé TIEN (transformation infinitésimale à partir de l'état naturel). Le champ de distributeur de déplacement linéarisé à l'équilibre, et le champ de contrainte généralisée correspondant, qui dépendent tous les deux linéairement de  $Q$ , seront notés :

$$Q \left\{ \tilde{\xi}_0, \tilde{\theta}_0 \right\}, \quad \text{et,} \quad Q \left[ \tilde{R}_0, \tilde{M}_0 \right].$$

On sait (cf section 5.2) que la recherche des valeurs critiques de  $Q$  correspondant à des points de bifurcation de cette courbe d'équilibre fondamentale passe par l'étude des équations de l'équilibre linéarisées autour d'un point arbitraire de la courbe d'équilibre fondamentale. Cela nécessite en particulier la linéarisation du chargement autour de l'état d'équilibre défini par le déplacement  $Q \left\{ \tilde{\xi}_0, \tilde{\theta}_0 \right\}$ . À titre d'illustration supposons que le chargement de la poutre soit défini par une condition d'encastrement en l'extrémité amont  $S = 0$ , un torseur d'effort extérieur  $[\underline{F}_L, \underline{C}_L]$  imposé en l'extrémité aval, ainsi qu'une densité linéique de torseur d'effort extérieur  $[\underline{F}, \underline{C}]$  imposé sur toute la fibre moyenne. La linéarisation de



ce chargement en un point  $Q \{\tilde{\xi}_0, \tilde{\theta}_0\}$  de la courbe d'équilibre fondamentale s'écrit :

$$\begin{aligned} [\underline{E}_L, \underline{C}_L] &= Q [\tilde{R}_0(L), \tilde{M}_0(L)] + Q \tilde{\mathcal{L}}_L(\tilde{\xi}, \theta), \\ [\underline{F}, \underline{C}] &= Q \left[ -\frac{d\tilde{R}_0}{dS}, -\frac{d\tilde{M}_0}{dS} - \underline{T} \wedge \tilde{R}_0 \right] + Q \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\xi}, \theta), \end{aligned}$$

où  $S \in [0, L]$  désigne l'abscisse curviligne dans la configuration d'équilibre défini par  $Q\{\tilde{\xi}_0, \tilde{\theta}_0\}$ , et  $\underline{T}$  le vecteur tangent à la fibre moyenne dans cette configuration. On a ici fait l'hypothèse que les opérateurs linéaires  $\mathcal{L}_L$  et  $\mathcal{L}$  qui décrivent la dépendance du chargement au premier ordre en la configuration, qui dépendent aussi *a priori* du paramètre de chargement  $Q$ , en dépendent linéairement. L'étude menée à la section 5.2 montre alors que les valeurs critiques  $Q_c$  sont les valeurs de  $Q$  pour lesquelles on peut trouver un champ de distributeur de déplacement linéarisé  $\{\tilde{\xi}_c, \tilde{\theta}_c\}$  non identiquement nul sur la configuration d'équilibre précontrainte définie par  $Q\{\tilde{\xi}_0, \tilde{\theta}_0\}$  tel que :

$$\forall \{\hat{u}, \hat{\omega}\} \in CA_0, \quad K_{\text{el}} \left( \{\tilde{\xi}_c, \tilde{\theta}_c\}, \{\hat{u}, \hat{\omega}\} \right) + Q \tilde{K}_{\text{géom}} \left( \{\tilde{\xi}_c, \tilde{\theta}_c\}, \{\hat{u}, \hat{\omega}\} \right) = 0, \quad (\text{B.10})$$

où  $CA_0$  est l'espace vectoriel des champs de distributeur de déplacement linéarisé cinématiquement admissibles à zéro sur la configuration d'équilibre précontrainte définie par  $Q\{\tilde{\xi}_0, \tilde{\theta}_0\}$ ,  $K_{\text{el}}$  la forme bilinéaire sur  $CA_0$  associée à l'énergie élastique dans l'état naturel (opérateur de rigidité élastique) et  $Q\tilde{K}_{\text{géom}}$  la correction de la rigidité due à la précontrainte  $Q[\tilde{R}_0, \tilde{M}_0]$  dont l'expression est (cf section 5.3.2) :

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{\text{géom}} \left( \{\tilde{\xi}, \theta\}, \{\hat{u}, \hat{\omega}\} \right) &= \int_0^{L(Q)} \tilde{R}_0 \cdot \left( \frac{d\tilde{\xi}}{dS} \wedge \hat{\omega} + \frac{d\hat{u}}{dS} \wedge \theta \right) + (\theta \wedge \tilde{R}_0) \cdot (\underline{T} \wedge \hat{\omega}) \\ &+ \tilde{M}_0 \cdot \left( \frac{d\hat{\omega}}{dS} \wedge \theta \right) + \left( \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial S} \cdot \underline{T} \right) \left\{ \left( \frac{\partial \tilde{R}_0}{\partial S} \cdot \hat{u} \right) + \left( \frac{\partial \tilde{M}_0}{\partial S} \cdot \hat{\omega} \right) + (\underline{T} \wedge \tilde{R}_0) \cdot \hat{\omega} \right\} dS \\ &+ \int_0^{L(Q)} \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\xi}, \theta) \cdot \{\hat{u}, \hat{\omega}\} dS + \tilde{\mathcal{L}}_L(\tilde{\xi}, \theta) \cdot \{\hat{u}(L), \hat{\omega}(L)\}, \quad (\text{B.11}) \end{aligned}$$

où l'on a fait figurer ici les contributions dues aux opérateurs linéaires  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}_L$  et qui n'apparaissent dans le résultat obtenu à la section 5.3.2 où l'on avait fait l'hypothèse de charge morte ( $\mathcal{L} = 0$  et  $\mathcal{L}_L = 0$ ). Le problème à résoudre est donc alors formellement un problème aux valeurs propres, le vecteur propre  $\{\tilde{\xi}_c, \tilde{\theta}_c\}$  étant l'éventuel mode de bifurcation. Celui-ci est relatif à la configuration précontrainte, paramétrée par  $S \in [0, L(Q)]$ . En pratique, dans le contexte du flambage eulerien qui est ici le notre, on pourra confondre la géométrie de la configuration précontrainte avec la géométrie initiale. Les intégrales figurant dans l'expression de l'opérateur de rigidité géométrique étant alors prises par rapport à  $S_0 \in [0, L_0]$ .

Rappelons, pour conclure, que si l'opérateur de rigidité élastique  $K_{\text{el}}$  est toujours symétrique, l'opérateur de rigidité géométrique  $Q\tilde{K}_{\text{géom}}$  peut ne pas l'être, en particulier, lorsque le chargement n'est pas conservatif.

### Approximation et résolution

Ici encore, la recherche de valeur critique approchée et du mode de bifurcation repose sur l'introduction d'un sous-espace d'approximation de dimension finie (par exemple issu d'une discrétisation de la structure en éléments finis) :

$$\widetilde{CA}_0 = \left\{ \sum_{i=1}^n q_i \{ \underline{\xi}^i(x), \underline{\theta}^i(x) \} \mid \underline{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Ce sous-espace d'approximation permet alors de formuler le problème approché associé au problème spectral (B.10). Il s'agit de trouver :

$$\{ \underline{\xi}_c, \underline{\theta}_c \} = \sum_{i=1}^n \tilde{q}_i \{ \underline{\xi}^i(x), \underline{\theta}^i(x) \} \in \widetilde{CA}_0, \quad (\text{B.12})$$

satisfaisant :

$$\forall \{ \underline{\hat{u}}, \underline{\hat{w}} \} \in \widetilde{CA}_0, \quad K_{\text{él}} \left( \{ \underline{\xi}_c, \underline{\theta}_c \}, \{ \underline{\hat{u}}, \underline{\hat{w}} \} \right) + Q \tilde{K}_{\text{géom}} \left( \{ \underline{\xi}_c, \underline{\theta}_c \}, \{ \underline{\hat{u}}, \underline{\hat{w}} \} \right) = 0.$$

Introduisant les matrices de rigidité élastique et géométrique associées au sous-espace d'approximation :

$$\begin{aligned} K_{ij}^{\text{él}} &= K_{\text{él}} \left( \{ \underline{\xi}^i, \underline{\theta}^i \}, \{ \underline{\xi}^j, \underline{\theta}^j \} \right), \\ \tilde{K}_{ij}^{\text{géom}} &= \tilde{K}_{\text{géom}} \left( \{ \underline{\xi}^i, \underline{\theta}^i \}, \{ \underline{\xi}^j, \underline{\theta}^j \} \right), \end{aligned}$$

le problème approché est ramené au calcul de la plus petite valeur  $\tilde{Q}_c$  de  $Q$  telle qu'il existe  $\tilde{\underline{q}} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  satisfaisant :

$$\left( \underline{\underline{K}}^{\text{él}} + \tilde{Q}_c \underline{\underline{K}}^{\text{géom}} \right) \cdot \tilde{\underline{q}} = \underline{0}.$$

Pour résoudre pratiquement ce problème spectral, on est conduit d'abord à construire la matrice de rigidité élastique  $\underline{\underline{K}}^{\text{él}}$  en appliquant la méthode décrite à la section B.2.2. Cette matrice de rigidité élastique est alors utilisée pour résoudre un problème approché en statique linéarisée dans le cadre TIEN pour obtenir une approximation de la précontrainte  $Q[\tilde{\underline{R}}_0, \tilde{\underline{M}}_0]$ . Cette valeur approchée de la précontrainte est alors utilisée en conjonction avec la formule (B.11) pour calculer la matrice  $\underline{\underline{K}}^{\text{géom}}$ . Une fois ces deux matrices construites, la méthode des puissances inverses, décrite à la section B.3.1, permet de calculer systématiquement la plus petite (en valeur absolue) valeur critique  $\tilde{Q}_c$  et le mode propre associé  $\tilde{\underline{q}}$  qui permet de construire une approximation du mode de bifurcation par la formule (B.12).

#### B.4.2 Étude d'un exemple

Pour illustrer la méthode générale que l'on vient de présenter, revenons sur l'exemple du mât haubanné étudié dans la section B.2.2 et représenté sur la figure B.4. Il s'agit d'un

mât constitué d'une poutre de Navier-Bernoulli, paramétrée par  $x \in ]0, l[$ , obéissant à la loi de comportement :

$$\begin{aligned} R_x &= E|\mathcal{S}_m| \frac{d\bar{\xi}_x}{dx}, \\ M_z &= EI \frac{d^2\bar{\xi}_y}{dx^2}, \end{aligned}$$

et encadrée à sa base. Ce mât est haubanné par deux barres (poutres rectilignes ne pouvant se déformer qu'axialement) identiques, paramétrées par  $x \in ]0, l\sqrt{2}[$ , obéissant à la loi de comportement :

$$R_x = E|\mathcal{S}_h| \frac{d\bar{\xi}_x}{dx},$$

inclinaison d'un angle  $\pi/4$  et articulées à leurs extrémités. On se limite à l'étude des déformations de cette structure dans son plan. L'ensemble de la structure est discrétisée en trois éléments finis : un élément poutre de Navier-Bernoulli pour le mât et deux éléments barres pour les haubans. La structure discrétisée a alors les trois degrés de liberté représentés par les deux composantes du déplacement de l'articulation, respectivement, orthogonales à la direction définie par la configuration initiale de la fibre moyenne du mât, et suivant cette direction, complétées par l'angle de rotation de la tangente à la fibre moyenne du mât au nœud articulé. La matrice de rigidité élastique  $\underline{\underline{K}}^{\text{él}}$  globale de la structure discrétisée est alors (cf section B.2.2) :

$$\underline{\underline{K}} = \begin{pmatrix} \frac{E|\mathcal{S}_h|\sqrt{2}}{2l} + \frac{12EI}{l^3} & 0 & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{E|\mathcal{S}_h|\sqrt{2}}{2l} + \frac{E|\mathcal{S}_m|}{l} & 0 \\ \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix}.$$

On souhaite maintenant évaluer les risques de flambage du mât sous l'effet de la mise en tension  $N_0 \geq 0$  préliminaire des haubans. Cette tension des haubans est équilibrée par une compression axiale  $-N_0\sqrt{2}$  dans le mât. Pour calculer la matrice de rigidité géométrique globale, on procède à l'assemblage de matrices de rigidité géométrique élémentaires sur le principe décrit dans la section B.2.2. Pour le mât, la matrice de rigidité géométrique élémentaire dans le repère local s'écrit :

$$\underline{\underline{K}}_m^{\text{géom}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{N_0\sqrt{2}}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et la matrice de rigidité géométrique élémentaire d'un hauban dans le repère local est :

$$\underline{\underline{K}}_h^{\text{géom}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{N_0\sqrt{2}}{l} \end{pmatrix}.$$

L'assemblage de ces matrices élémentaires après rotation d'angle  $\alpha = \pi/2$  pour le mât, et d'angles respectifs  $\alpha = \pi/4$  et  $\alpha = 3\pi/4$  pour chacun des haubans, conduit facilement à la

matrice de rigidité géométrique globale de la structure discrétisée :

$$\underline{\underline{K}}^{\text{géom}} = \begin{pmatrix} -\frac{N_0\sqrt{2}}{2l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N_0\sqrt{2}}{2l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où c'est finalement  $N_0$  qui joue le rôle du paramètre de chargement. Les valeurs critiques de  $N_0$  sont celles qui annulent le déterminant :

$$\det(\underline{\underline{K}}^{\text{él}} + \underline{\underline{K}}^{\text{géom}}) = \begin{vmatrix} \frac{E|\mathcal{S}_h|\sqrt{2}}{2l} + \frac{12EI}{l^3} - \frac{N_0\sqrt{2}}{2l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{E|\mathcal{S}_h|\sqrt{2}}{2l} + \frac{E|\mathcal{S}_m|}{l} + \frac{N_0\sqrt{2}}{2l} & 0 \\ \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{4EI}{l} \end{vmatrix}.$$

Dans le cas de hauban en tension ( $N_0 \geq 0$ ), on obtient une unique valeur critique :

$$\tilde{N}_0 = E|\mathcal{S}_h| + \frac{3EI\sqrt{2}}{l^2},$$

et le vecteur propre associé  $(1 \ 0 \ -3l/2)$  conduit au mode de bifurcation approché associé

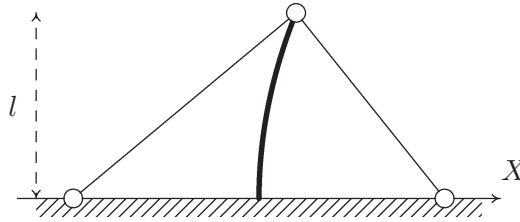


FIG. B.8 – Allure du mode de bifurcation.

au déplacement transversal :

$$\bar{\xi}_X(Y) = \frac{3}{2} \left( \frac{Y}{l} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{Y}{l} \right)^3.$$

dans le mât et dont l'allure est représentée sur la figure B.8.

À titre d'exercice, le lecteur vérifiera que ce calcul approché ne fournit pas la valeur exacte de la charge critique. De façon générale, une démonstration analogue à celle présentée dans la section B.3.1, du fait que la pulsation propre de vibration fondamentale de la structure discrétisée est toujours supérieure ou égale à la pulsation propre fondamentale de la structure non discrétisée (démonstration par la méthode dite du quotient de Rayleigh), montre que, dans toute circonstance où l'opérateur de rigidité géométrique est symétrique (ce qui est le cas ici), le calcul approché fournit une surestimation de la charge critique.

# Bibliographie

- [1] S.S. ANTMAN, *Nonlinear problems of elasticity*, Springer-Verlag, 1995.
- [2] P.G. CIARLET, *Introduction à l'Analyse Numérique Matricielle et à l'Optimisation*, Masson, 1990.
- [3] P.A. RAVIART & J.M. THOMAS, *Introduction à l'Analyse Numérique des Équations aux Dérivées Partielles*, Masson, 1983.
- [4] J. SALENÇON, *Mécanique des milieux continus*, Les Éditions de l'École Polytechnique, 2002.
- [5] J. SANCHEZ-HUBERT & E. SANCHEZ-PALENCIA, *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*, Masson, 1992.
- [6] S. TIMOSHENKO & J. GERE, *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill, 1961.
- [7] L. TRABUCHO & J.M. VIAÑO, *Mathematical modelling of rods*, Handbook of numerical analysis, volume IV, P.G. CIARLET & J.L. LIONS éditeurs, Elsevier, 1996.
- [8] B.Z. VLASSOV, *Pièces longues en voiles minces*, traduit du Russe par G. SMIRNOFF, Eyrolles, 1962.

# Index

- Énergie élastique de contrainte, 42
- Énergie complémentaire, 41, 46, 166
- Énergie potentielle totale, 41, 46, 166
- Énergie élastique de déformation, 42
- Équations locales, 40, 45, 166
- DI-RF, 27
- TIEN, 37
- TIEP, 110
  
- Auto-contrainte, 40
- Axe central, 222
- Axe instantané de rotation, 221
  
- Bifurcation, 94, 111
- Bifurcation de Hopf, 117, 124
- Branche bifurquée, 94
  
- Centre de cisaillement, 186
- Champ de distributeur, 6
- Champ de distributeur des déplacements linéarisés, 8
- Champ de torseur, 14
- Champ de vitesse rigidifiant, 7
- Charge évanescence, 50
- Charge conservative, 113
- Charge critique d'Euler, 93
- Charge morte, 108, 111
- Cinématiquement admissible, 39
- Cinématiquement admissible à zéro, 40
- Compatibilité géométrique, 165
- Configuration actuelle, 6
- Configuration de référence, 4
- Contrainte généralisée, 15
- Contrainte généralisée lagrangienne, 18
- Couple, 222
- Courbe fondamentale d'équilibre, 94, 110
  
- Décomposition polaire, 4
- Déformation lagrangienne, 5
  
- Déformation linéarisée, 8
- Développement asymptotique, 190, 195
- Degrés de liberté, 233
- Description eulerienne, 6
- Description lagrangienne, 3
- Discrétisation en éléments finis, 232
- Discrétisation totale, 247
- Distributeur, 217, 220
  
- Effort normal, 17
- Effort tranchant, 17
- Espace des vitesses virtuelles, 11
- Estimation d'erreur, 231
  
- Fil, 21
- Flambage, 93
- Flambage eulerien, 114, 254
- Flexion pure, 179
- Flexion simple, 179
- Formulation variationnelle en déplacement, 41, 46, 167
- Formulation faible en contrainte, 41, 46, 167
- Formulation faible en déplacement, 40, 45, 166
- Formulation variationnelle en contrainte, 41, 46, 167
- Formule de Clapeyron, 42, 168
  
- Gauchissement, 177
- Glisseur, 222
- Gradient de la transformation, 4
  
- Hyperstaticité, 43
- Hypostaticité, 43
- Hypothèse des petites déformations, 24
  
- Imperfection, 96
- Instabilité par flottement, 117, 124
- Isostaticité, 43

- Liaison interne, 25
- Liaison interne d'inextensibilité, 26
- Liaison interne de Navier-Bernoulli, 27
- Ligne moyenne, 3
- Linéarisation autour de l'état précontraint, 98
- Linéarisation autour de l'état naturel, 35
- Linéarisation géométrique, 36
- Loi de comportement élastique, 23
  
- Méthode de Cholesky, 240
- Méthode de Lyapunov-Schmidt, 132
- Méthode de Rayleigh-Ritz, 228
- Méthode des puissances inverses, 245
- Maillage, 232
- Masse linéique, 13
- Matrice de masse, 244
- Matrice de rigidité, 231
- Matrice de rigidité élémentaire, 235
- Matrice de rigidité géométrique, 256
- Matrice de rigidité globale, 238
- Matrice de souplesse, 51
- Matrice normale, 249
- Mode de bifurcation, 98
- Mode propre de vibration, 61
- Moment de torsion, 17
- Moment fléchissant, 17
- Multiplicateur de Lagrange, 26
  
- Opérateur de rigidité élastique, 113
- Opérateur de rigidité géométrique, 113
- Opérateur de rigidité globale, 113
  
- Paramètre de chargement, 47, 110, 254
- Pas du maillage, 233
- Point critique, 110
- Point de bifurcation, 111
- Point limite, 111, 123
- Poutre de Navier-Bernoulli, 27
- Poutre de Timoshenko, 26
- Poutre naturelle, 26, 37
- Principe des puissances virtuelles, 11
- Principe d'action locale, 23
- Principe d'isotropie de l'espace, 23
- Principe de Saint-Venant, 168
- Problème de Neumann, 177
- Problème de Saint-Venant, 173
  
- Problème spectral, 61
- Puissance virtuelle des efforts extérieurs, 14
- Puissance virtuelle des efforts intérieurs, 15
- Puissance virtuelle des quantités d'accélération, 12
- Pulsation propre, 61
- Pulsation propre fondamentale, 103
  
- Quotients de Rayleigh, 244
  
- Résultante, 221
- Rayon spectral, 249
- Rotations finies, 27
  
- Schéma de Newmark, 247
- Section droite, 3
- Semi-discrétisation, 242
- Sous-espace d'approximation, 229
- Stabilité d'un équilibre, 100
- Stabilité d'un schéma numérique, 248
- Statiquement admissible, 39
- Superposition modale, 67, 242
  
- Taux de déformation eulerien, 8
- Taux de déformation lagrangien, 8
- Tenseur d'inertie, 13, 223
- Tenseur des modules d'élasticité, 25
- Théorème de Castigliano, 47
- Torseur, 221
- Torsion, 179
- Traction-compression simple, 179
- Transformation, 4
- Transformation infinitésimale, 7
- Transformation rigidifiante, 5, 215
- Transport, 17, 105
  
- Verrouillage, 240
- Vibrations axiales, 59
- Vibrations libres, 60
- Vibrations propres, 60
- Vibrations transverses, 59