



COURS RDM - HLME501

Equipe enseignante :
P. Cañadas, L. Daridon & V. Huon

MCC : (1ère session)*80% + 20% TP ou 2nde session*80% + 20% TP



COURS RDM

- Objectifs
 - Déterminer les déplacements et la déformée
 - Premiers pas vers le Dimensionnement d'une poutre
 - Premiers pas vers les EF
- Méthodes
 - Méthode des coupures (Rappel)
 - Écrire les équations d'équilibre dans le cas des poutres
 - Résoudre les équations d'équilibre locale
 - Utiliser les méthodes énergétiques
 - *PFS* ou *PPV*
 - *MEF*



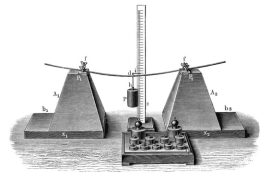
• Merci à :

- Pierre Alain Boucard
- R. Boudet et P. Stephan - Vous avez dit : «Résistance des Matériaux »- ISBN 2.854284801
- P. Ballard Mec553 «structures élancées»
- ...



La **résistance des matériaux**, aussi appelée RDM, est une discipline particulière de la mécanique des milieux continus permettant le calcul des contraintes et déformations dans les structures des différents matériaux (machines, génie mécanique, bâtiment et génie civil).

Galileo Galilei



« *Discorsi e Dimostrazioni matematiche*
intorno à due nuove scienze attenenti alla
meccanica e i movimenti locali »





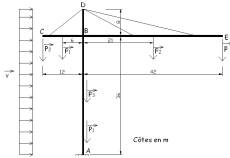
De quoi a t on besoin ?

HLMA101 HLMA201
HLME201

Torseur des actions transmissibles (liaisons)

Torseur des Efforts appliqués:

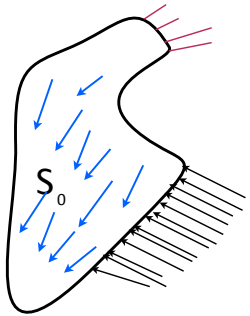
- Force linéique
- Effort Ponctuel



Et si je bouge mon noeud pap... y s'passe quoi au Texas?!



PFS



1. Équations d'équilibre

- 1.1.MMC
- 1.2.RDM

2. Conditions aux limites

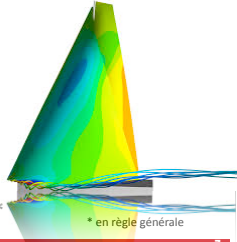
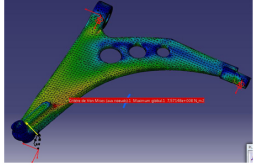
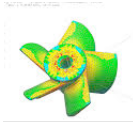
- 1.En effort
- 2.En déplacement

3. Loi de comportement

Le comportement du matériau est élastique linéaire (loi de Hooke).



3-D



Pas d'hypothèse
Pas de solution analytique*

* en règle générale



2-D Plaques et coques

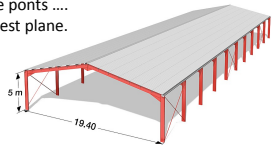
Ce sont des structures pour lesquelles *une dimension* est petite par rapport aux deux autres (l'épaisseur).



Les coques : Réservoirs sphériques, cylindriques, tours de réfrigération, coupes, éléments de carrosserie...



Les plaques : dalles, murs, tabliers de ponts
Ce sont des coques dont la surface moyenne est plane.





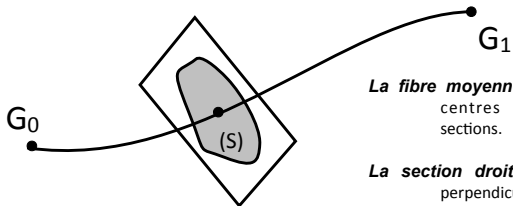
1-D Poutres

Les Poutres: poteau, rail, mat, pilône, super structure,....

Ce sont des structures pour lesquelles **deux dimensions** sont petites par rapport à la dernière (épaisseur et largeur).



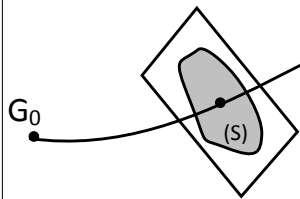
Poutre : le solide occupant dans son état de référence (non déformé) le domaine engendré par la surface plane (S) lorsque G décrit un arc de courbe G_0G_1 , (S) restant normale en G à cet arc.



La fibre moyenne est le lieu des centres de gravité des sections.

La section droite est la section perpendiculaire à la ligne moyenne.

La section droite ne peut varier que continûment.

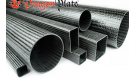

 G_1

Si G_0G_1 est un arc de courbe non plane, la poutre est dite *gauche*.

Si G_0G_1 est un arc de courbe plane, la poutre est dite *plane*.

Si G_0G_1 est un segment de droite, la poutre est dite *droite*.

Les sections les plus usuelles



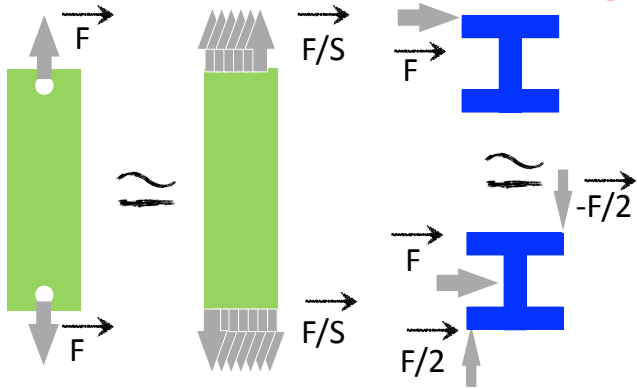
- Hypothèse de Saint Venant
- Hypothèse de Navier Bernoulli
- Hypothèse des Petites Perturbations.(HPP)

Saint Venant : Tous les efforts sont schématisés par leur torseur résultant.

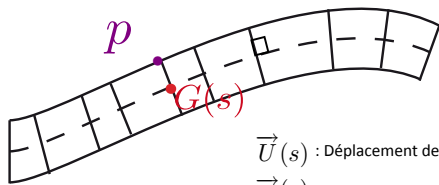
On ne connaît pas la répartition des efforts en chaque point de la section mais seulement leur moyenne et la moyenne des moments en un point.

Navier-Bernoulli : les sections droites restent, après déformation, planes et indéformables dans leur propre plan. Autrement dit, il n'y a pas gauchissement des sections ; cette hypothèse n'est pas toujours valable. Elle est cependant justifiée en hypothèse des petites déformations (HPP).

HPP : La poutre s'écarte «peu» de la configuration de référence. On assimile la configuration de référence et la configuration déformée.



Navier-Bernoulli : les sections droites restent, après déformation, **planes** et **indéformables dans leur propre plan**.



$\vec{U}(s)$: Déplacement de la section

$\vec{\omega}(s)$: Rotation de la section

$$\vec{U}(p) = \vec{U}(s) + \overrightarrow{PG(s)} \wedge \vec{\omega}(s)$$



Cas des poutres rectilignes (plan)

$$\vec{U}(p) = \vec{U}(s) + \overrightarrow{PG(s)} \wedge \vec{\omega}(s)$$

Cinématique de **Navier-Bernoulli** Cas des poutres rectilignes (plan):

$$\underline{U}(x, y) = \begin{cases} U_1 = u(x) - (y - y_g)v'(x) \\ U_2 = v(x) \end{cases}$$

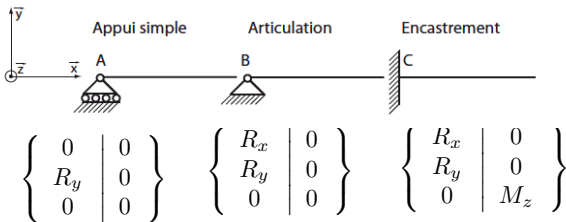
$u(x)$ Déplacement longitudinal de G

$v(x)$ Déplacement vertical de G

y_g Ordonnée de G



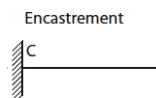
Liaisons: Inconnues en 2-D - plan



Linéaire annulaire



Rotule



Encastrement



Conditions aux limites en déplacement

Le Champs de Déplacement : $\underline{U}(x, y) = \begin{cases} U_1 = u(x) - (y - y_g)v'(x) \\ U_2 = v(x) \end{cases}$



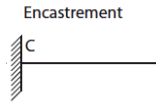
Linéaire annulaire

$$v(x_A) = 0$$



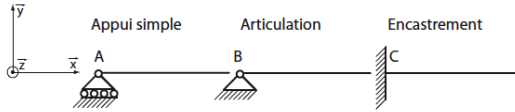
Rotule

$$u(x_B) = 0 \\ v(x_B) = 0$$



Encastrement

$$u(x_C) = 0 \\ v(x_C) = 0 \text{ et } v'(x_C) = 0$$



Qu'est ce qu'un Pb de mécanique ?

Qu'est ce qu'une poutre?

La fibre moyenne ?

La section droite ?

Hypothèse de Bernoulli ?

Champs cinématique d'une poutre gauche respectant les Hyp. Ber. ?

Champs cinématique d'une poutre droite respectant les Hyp. Ber. ?



Qu'est ce qu'un Pb de mécanique ?

Hypothèse de Bernoulli ?

Champs cinématique d'une poutre gauche respectant les Hyp. Ber. ?

Champs cinématique d'une poutre droite respectant les Hyp. Ber. ?

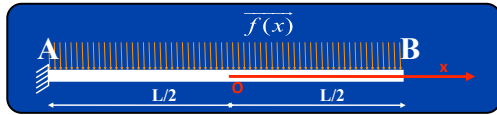


$$\{T\}_A^{ext} = \{0\}_A$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{liais} + \vec{F}_{app} \\ \vec{M}_{liais} + \vec{M}_{app} \end{array} \right\}_A^{ext} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

Méthode

- 1) Définition du Système à isoler
- 2) Bilan des efforts extérieurs
- 3) Ecrire les équations et résoudre



1) Bilan des Efforts Extérieurs

Effort Appliqué
Force linéique

Efforts de Liaison
Réaction et moment d'encastrement

2) Calcul des Eléments de Réduction des Torseurs



Effort Ponctuel en A = Glisseur $\left\{ \begin{array}{l|l} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_A$

Couple Ponctuel en A = Couple $\left\{ \begin{array}{l|l} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & C_z \end{array} \right\}_A$

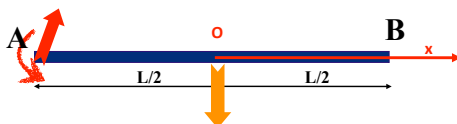
Effort réparti entre A et B = $\left\{ \begin{array}{l} \int_{x_A}^{x_B} \vec{f}(x) dx \\ \vec{M}_{(A)} = \int_{x_A}^{x_B} (x - x_A) \cdot f_y(x) dx \vec{z} \end{array} \right\}_{(A)}$



$$\vec{M}_{(B)} = \vec{M}_{(A)} + \vec{BA} \wedge \vec{R}_{(A)}$$



PFS : Exemple d'une force uniformément répartie

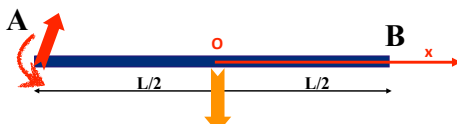


2) Calcul des Eléments de Réduction des Torseurs

$$\int_{x_A}^{x_B} f_y(x) dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} (-p) dx = -pL$$
$$\int_{x_A}^{x_B} (x - x_0) \cdot f_y(x) dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x \cdot (-p) dx = 0$$
$$\left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -pL & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(O)}$$

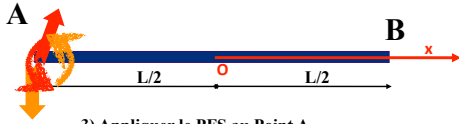


PFS : Exemple d'une force uniformément répartie



2) Calcul des Eléments de Réduction des Torseurs

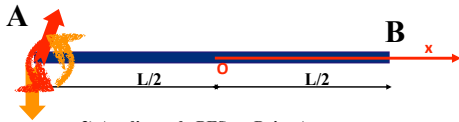
$$\left\{ \begin{array}{c|c} R_x & 0 \\ R_y & 0 \\ 0 & M_z \end{array} \right\}_{(A)}$$
$$\left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -pL & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(O)}$$



3) Appliquer le PFS au Point A

$$\left\{ \begin{array}{c|c} R_x & 0 \\ R_y & 0 \\ \hline 0 & M_z \end{array} \right\}_{(A)} + \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -pL & 0 \\ \hline 0 & 0 + \frac{L}{2}(-pL) \end{array} \right\}_{(A)} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right\}_{(A)}$$

4) Déterminer les Efforts de Liaison



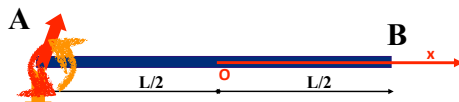
3) Appliquer le PFS au Point A

$$\left\{ \begin{array}{c|c} R_x & 0 \\ R_y & 0 \\ \hline 0 & M_z \end{array} \right\}_{(A)}$$

$$\left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -pL & 0 \\ \hline 0 & 0 + \frac{L}{2}(-pL) \end{array} \right\}_{(A)}$$



PFS : Exemple d'une force uniformément répartie



4) Déterminer les Efforts de Liaison

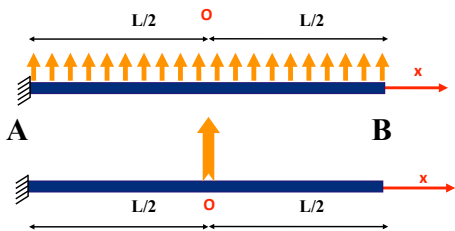
$$\begin{cases} R_x &= 0 \\ R_y &= -pL \\ M_z &= \frac{pL^2}{2} \end{cases}$$

Les efforts de liaison ne dépendent pas du type du chargement

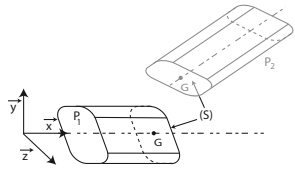


Pourquoi faire alors de RDM ?

Les efforts de liaison ne dépendent pas du type du chargement



Les efforts internes dépendent fortement du type du chargement



P.F.S. appliqué à la poutre

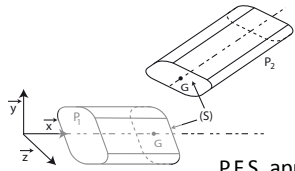
$$P = P_1$$

$$\{T\}_G^{ext \rightarrow P_1} + \{T\}_G^{P_2 \rightarrow P_1} = \{0\}_G$$

Par convention

$$\{T\}_G^{coh} = \{T\}_G^{P_2 \rightarrow P_1}$$

$$\{T\}_G^{coh} = -\{T\}_G^{ext \rightarrow P_1}$$



Par convention

$$\{T\}_G^{coh} = \{T\}_G^{P_2 \rightarrow P_1}$$

P.F.S. appliqué à la poutre $P = P_2$

$$\{T\}_G^{ext \rightarrow P_2} + \{T\}_G^{P_1 \rightarrow P_2} = \{0\}_G$$

$$\{T\}_G^{ext \rightarrow P_2} - \{T\}_G^{P_2 \rightarrow P_1} = \{0\}_G$$

$$\{T\}_G^{coh} = \{T\}_G^{ext \rightarrow P_2}$$



Sollicitations Élémentaires

Sollicitation élémentaire	Composante(s) non nulle(s)	$\{T\}_G^{coh}$
Traction/Compression	N	$\begin{Bmatrix} N\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$
Cisaillement pur	T_y	$\begin{Bmatrix} T_y\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$
Torsion	M_t	$\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ M_t\vec{x} \end{Bmatrix}_G$
Flexion pure	M_{fz}	$\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ M_{fz}\vec{z} \end{Bmatrix}_G$
On montrera que dans ce cas, M_{fz} , est constant.		
Flexion simple	T_y et M_{fz}	$\begin{Bmatrix} T_y\vec{y} \\ M_{fz}\vec{z} \end{Bmatrix}_G$



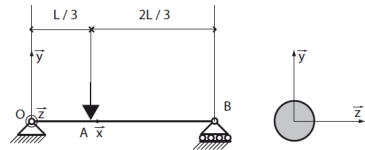
Sollicitations Élémentaires

Noms de la composantes	Composante(s) non nulle(s)	$\{T\}_G^{coh}$
Effort Normal	N	$\begin{Bmatrix} N\vec{x} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$
Effort Tranchant	T_y	$\begin{Bmatrix} T_y\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_G$
Moment de Torsion	M_t	$\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ M_t\vec{x} \end{Bmatrix}_G$
Moment de Flexion	M_{fz}	$\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ M_{fz}\vec{z} \end{Bmatrix}_G$



$$\{T\}_G^{coh} = \{T\}_G^{P_2 \rightarrow P_1}$$

$$\{T\}_G^{coh} = -\{T\}_G^{ext \rightarrow P_1} = \{T\}_G^{ext \rightarrow P_2}$$

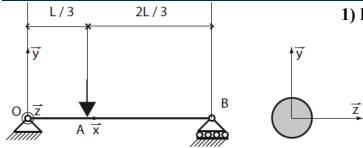


1) Bilan des Efforts Extérieurs

- Rotule en O
- Linéaire annulaire en B
- Force concentrée en A



1) Bilan des Efforts Extérieurs



Force concentrée en A

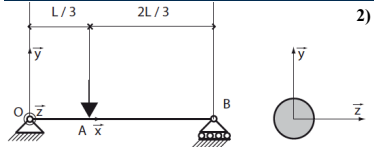
Rotule en O

$$\left\{ \begin{matrix} X_O \vec{x} + Y_O \vec{y} \\ 0 \end{matrix} \right\}_O$$

$$\left\{ \begin{matrix} -F \vec{y} \\ 0 \end{matrix} \right\}_A$$

Linéaire annulaire en B

$$\left\{ \begin{matrix} Y_B \vec{y} \\ 0 \end{matrix} \right\}_B$$


2) Application du PFS en A


$$\begin{cases} X_O = 0 \\ Y_O = \frac{2F}{3} \\ Y_B = \frac{F}{3} \end{cases}$$

Force concentrée en A

$$\left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$$

Rotule en O

$$\left\{ \begin{array}{c} X_O \vec{x} + Y_O \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O$$

Linéaire annulaire en B

$$\left\{ \begin{array}{c} Y_B \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_B$$

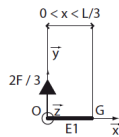

1) On isole le tronçon de GAUCHE

$$\{T\}_G^{coh} = -\{T\}_G^{ext \rightarrow P_1}$$

$$\{T\}_O^{ext \rightarrow P_1} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{2F}{3} \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_O^{ext \rightarrow P_1}$$

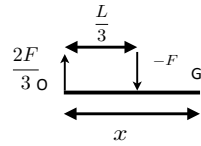
$$-\{T\}_G^{ext \rightarrow P_1} = -\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} + \frac{2F}{3} \vec{y} \\ \vec{0} + \vec{GO} \wedge \frac{2F}{3} \vec{y} \end{array} \right\}_G^{ext \rightarrow P_1}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} -\frac{2F}{3} \vec{y} \\ \frac{2F}{3} x \vec{z} \end{array} \right\}_G^{ext \rightarrow P_1} = \{T\}_G^{coh}$$




2) On isole le tronçon de GAUCHE

$$\frac{L}{3} < x < L$$



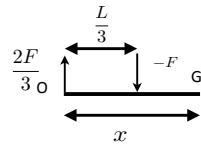
$$\{T\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \frac{2F}{3} \vec{y} \\ 0 \end{array} \right\}_O$$

$$\{F\}_A = \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ 0 \end{array} \right\}_A$$

$$\begin{aligned} \{T\}_G^{coh} &= -\{T\}_G^{ext \rightarrow P_1} \\ &= -\{T\}_G - \{F\}_G \end{aligned}$$


2) On isole le tronçon de GAUCHE

$$\frac{L}{3} < x < L$$



$$\{T\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \frac{2F}{3} \vec{y} \\ 0 \end{array} \right\}_O$$

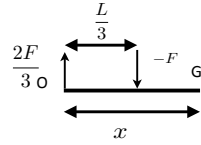
$$\{F\}_A = \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ 0 \end{array} \right\}_A$$

$$-\{T\}_G = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{2F}{3} \vec{y} \\ \frac{2F}{3} x \vec{z} \end{array} \right\}_G$$

$$-\{F\}_G = \left\{ \begin{array}{c} F \vec{y} \\ -F(x - \frac{L}{3}) \vec{z} \end{array} \right\}_G$$


2) On isole le tronçon de GAUCHE

$$\frac{L}{3} < x < L$$



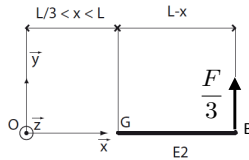
$$\{T\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \frac{2F}{3} \vec{y} \\ 0 \end{array} \right\}_O$$

$$\{F\}_A = \left\{ \begin{array}{c} -F \vec{y} \\ 0 \end{array} \right\}_A$$

$$\{T\}_G^{coh} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{F}{3} \vec{y} \\ F \frac{1}{3} (L-x) \vec{z} \end{array} \right\}_G$$


2 bis) On isole le tronçon de DROITE

$$\frac{L}{3} < x < L$$



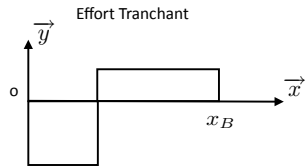
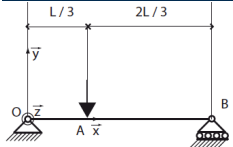
$$\{T\}_G^{coh} = \{T\}_G^{ext} \rightarrow P_2$$

$$\{T\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \frac{F}{3} \vec{y} \\ 0 \end{array} \right\}_O$$

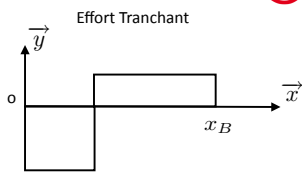
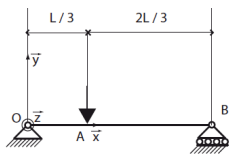
$$\{T\}_G^{coh} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{F}{3} \vec{y} \\ F \frac{1}{3} (L-x) \vec{z} \end{array} \right\}_G$$



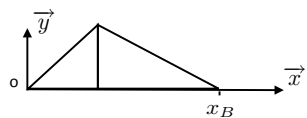
Diagrammes des efforts



Diagrammes des efforts



Moment Fléchissant





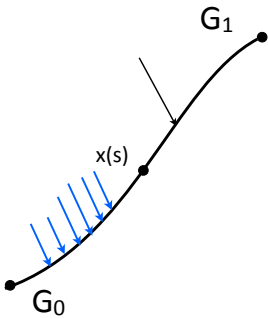
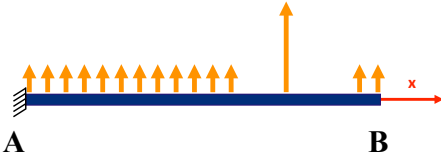
Qu'est ce qu'un Pb de mécanique ?

Hypothèse de Bernoulli ?

Champs cinématique dans un repère Cartésien d'une poutre droite respectant les Hyp. Ber. ?

Définition du Torseur de cohésion

Nombre de coupure dans le cas suivant ou de zones d'étude



1. Équations d'équilibre 1-D

1.1.RDM

2. Conditions aux limites

2.1.En efforts

2.1.1. Ponctuel

2.1.2.Couple de torsion

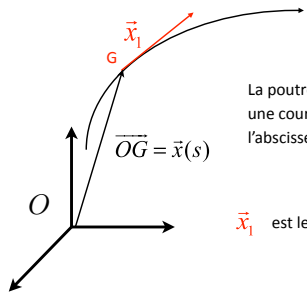
2.2.En déplacement

3. Loi de comportement

Les quantités que l'on recherche sont des fonctions d'une seule variable.



Mise en place des équations



La poutre est d'un point de vue géométrique une courbe d'équation : $\overrightarrow{OG} = \vec{x}(s)$ où s est l'abscisse curviligne.

\vec{x}_1 est le vecteur unitaire tangent défini par :

$$\vec{x}_1 = \frac{d\overrightarrow{OG}}{ds}$$



Torseur des efforts appliqués

-Force linéique

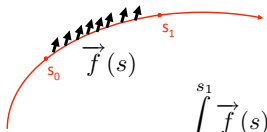
$$T_O^{Linéique} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{s_1}^{s_2} \vec{f}(s) ds \\ \vec{M}(O) = \int_{s_1}^{s_2} \overrightarrow{OG(s)} \wedge \vec{f}(s) ds \end{array} \right\}$$

-Effort Ponctuel

$$T_O^{Ponctuel} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}(0) \\ \vec{M}(O) \end{array} \right\}$$

Relation fondamentale des torseurs

$$\vec{M}(A) = \vec{M}(O) + \overrightarrow{AO} \wedge \vec{F}(O)$$


PFS Résultante

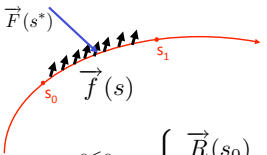
$$\int_{s_0}^{s_1} \vec{f}(s) ds + \vec{R}(s_1) - \vec{R}(s_0) = \vec{0}$$

$$\int_{s_0}^{s_1} (\vec{f}(s) + \frac{d}{ds} \vec{R}(s)) ds = \vec{0} \quad \forall s_0, s_1$$

$$\boxed{\vec{f}(s) + \frac{d}{ds} \vec{R}(s) = \vec{0} \quad \forall s_0, s_1}$$



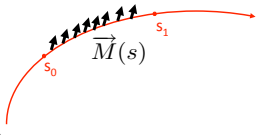
Bilan des efforts :



- > Les actions de la partie $\{s > s_1\}$ en s_1
- > Les actions de la partie $\{s < s_0\}$ en s_0
- > La densité linéique
- > Une force ponctuelle en s^*

$$T_{s_0}^{s < s_0} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(s_0) \\ \vec{M}(s_0) \end{Bmatrix} \quad T_{s_1}^{s > s_1} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(s_1) \\ \vec{M}(s_1) \end{Bmatrix}$$

$$T_O^{Linéique} = \begin{Bmatrix} \int_{s_0}^{s_1} \vec{f}(s) ds \\ \vec{M}(O) = \int_{s_0}^{s_1} \overrightarrow{OG(s)} \wedge \vec{f}(s) ds \end{Bmatrix} \quad T_{s^*}^F = \begin{Bmatrix} \vec{F}(s^*) \\ 0 \end{Bmatrix}$$


PFS Moment en 0

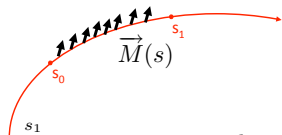
$$\vec{M}_{\vec{f}}(O) + \vec{M}_{s_1}(O) + \vec{M}_{s_0}(O) = \vec{0}$$

$$\int_{s_0}^{s_1} \vec{OG}(s) \wedge \vec{f}(s) ds + \vec{M}_{s_1}(G_1) + \vec{OG}_1 \wedge \vec{R}(s_1) - \vec{M}_{s_0}(G_0) - \vec{OG}_0 \wedge \vec{R}(s_0) = \vec{0}$$

$$\int_{s_0}^{s_1} \vec{OG}(s) \wedge \vec{f}(s) + \frac{d}{ds} \vec{M}(s) + \frac{d}{ds} (\vec{OG} \wedge \vec{R}(s)) ds = \vec{0}$$

$$\frac{d}{ds} \vec{OG} \wedge \vec{R}(s) = \frac{d}{ds} (\vec{OG}) \wedge \vec{R}(s) + \vec{OG} \wedge \frac{d}{ds} \vec{R}(s)$$

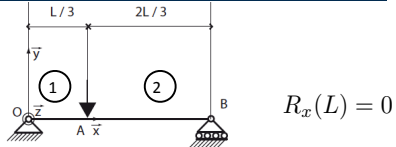
$$= \vec{x}_1 \wedge \vec{R}(s) - \vec{OG} \wedge \vec{f}$$


PFS Moment en 0

$$\int_{s_0}^{s_1} \vec{OG}(s) \wedge \vec{f}(s) + \frac{d}{ds} \vec{M}(s) + \frac{d}{ds} (\vec{OG} \wedge \vec{R}(s)) ds = \vec{0}$$

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{d}{ds} \vec{M}(s) + \vec{x}_1 \wedge \vec{R}(s) ds = \vec{0}$$

$$\frac{d}{ds} \vec{M}(s) + \vec{x}_1 \wedge \vec{R}(s) = \vec{0}$$



$$R_x(L) = 0$$

$$\frac{d}{dx} \vec{R}^1(x) = \vec{0}$$

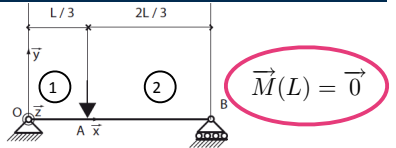
$$\frac{d}{dx} \vec{R}^2(x) = \vec{0}$$

$$[[\vec{R}]]_{\frac{L}{3}} + \vec{F} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} C_2 & = & C_1 & = & 0 \\ K_2 - K_1 & = & -(-F) & & \end{cases}$$



$$\vec{M}(0) = \vec{0}$$



$$\vec{M}(L) = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dx} M^1(x) + R_y^1(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx} M^2(x) + R_y^2(x) = 0$$

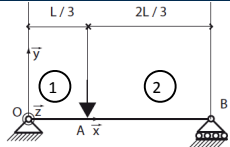
$$[[\vec{M}(s)]]_{\frac{L}{3}} = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dx} M^1(x) + K_1 = 0$$

$$\frac{d}{dx} M^2(x) + K_2 = 0$$



$$\vec{M}(0) = \vec{0}$$



$$\vec{M}(L) = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dx} M^{\textcircled{1}}(x) + R_y^{\textcircled{1}}(x) = 0$$

$$\frac{d}{dx} M^{\textcircled{2}}(x) + R_y^{\textcircled{2}}(x) = 0$$

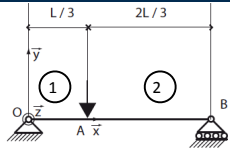
$$[[\vec{M}(s)]]_{\frac{L}{3}} = \vec{0}$$

$$M^{\textcircled{1}}(x) = -K_1 x$$

$$M^{\textcircled{2}}(x) = -K_2(x - L)$$



$$\vec{M}(0) = \vec{0}$$



$$\vec{M}(L) = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dx} M^{\textcircled{1}}(x) + R_y^{\textcircled{1}}(x) = 0$$

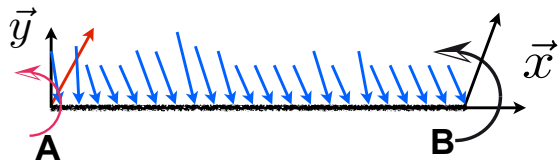
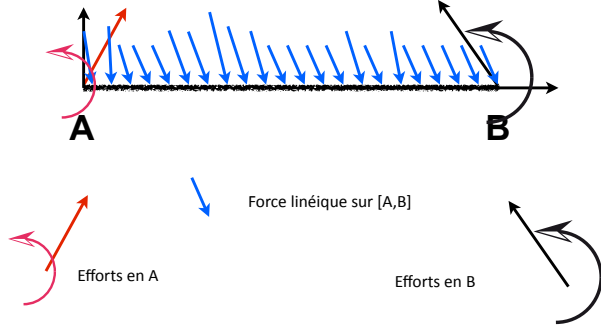
$$\frac{d}{dx} M^{\textcircled{2}}(x) + R_y^{\textcircled{2}}(x) = 0$$

$$[[\vec{M}(s)]]_{\frac{L}{3}} = \vec{0}$$

$$M^{\textcircled{1}}(x) = -K_1 x$$

$$M^{\textcircled{2}}(x) = -K_2(x - L)$$

$$-K_1 \frac{L}{3} = -K_2 \left(\frac{L}{3} - L \right)$$



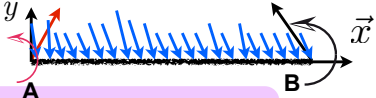
s est remplacé par x

$$\frac{d}{ds} \vec{R}(s) + \vec{f}(s) = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dx} \vec{R}(x) + \vec{f}(x) = \vec{0}$$

$$\frac{d}{ds} M(s) + \vec{x}_1 \wedge \vec{R}(s) = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dx} M(x) + \vec{x} \wedge \vec{R}(x) = \vec{0}$$


Poutre droite - Pb Plan - (Flexion - Traction)

 Cas des poutres droites
 Chargement plan

$$\begin{aligned} N(0) &= -F_x^A & u(0) &= u_d^A \\ T(0) &= -F_y^A & \text{ou } v(0) &= v_d^A \\ M(0) &= -M_z^A & \omega(0) &= \omega_d^A \end{aligned}$$

6 conditions aux limites

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}N(x) + f_x = 0 \\ \frac{d}{dx}T(x) + f_y = 0 \\ \frac{d}{dx}M(x) + T(x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} N(L) &= F_x^B & u(L) &= u_d^B \\ T(L) &= F_y^B & \text{ou } v(L) &= v_d^B \\ M(L) &= M_z^B & \omega(L) &= \omega_d^B \end{aligned}$$


Les Conditions aux limites RDM - PB Plan

Ponctuelle

Pivot Glissant

Encastrement

Déplacements

$$\left\{ \begin{array}{l|l} \omega_x & u_x \\ \omega_y & u_y \\ \omega_z & 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l|l} \omega_x & u_x \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l|l} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}$$

 Efforts
 inconnus

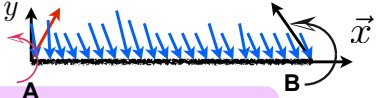
$$\left\{ \begin{array}{l|l} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ R_z & 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l|l} 0 & 0 \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l|l} R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{array} \right\}$$



Poutre droite - Pb Plan - (Flexion - Traction)



$$\begin{aligned} N(0) &= -F_x^A & u(0) &= u_d^A \\ T(0) &= -F_y^A & \text{ou } v(0) &= v_d^A \\ M(0) &= -M_z^A & \omega(0) &= \omega_d^A \end{aligned}$$

Cas des poutres droites
Chargement plan

6 conditions aux limites

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} N(x) + f_x &= 0 \\ \frac{d}{dx} T(x) + f_y &= 0 \\ \frac{d}{dx} M(x) + T(x) &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} N(L) &= F_x^B & u(L) &= u_d^B \\ T(L) &= F_y^B & \text{ou } v(L) &= v_d^B \\ M(L) &= M_z^B & \omega(L) &= \omega_d^B \end{aligned}$$



Sollicitations simples



Traction



flexion



Torsion

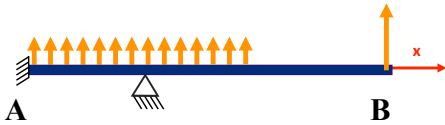


Définition des efforts généralisés

Équations d'équilibre scalaire en coordonnée cartésienne

Combien de zones à étudier ?

Conditions aux limites et de raccords en effort du problème :



cas plan - Poutre rectiligne - HPP -Elasticité linéaire homogène

Equations scalaire d'équilibre

Efforts généralisés

Déplacements

Déformations



cas plan - Poutre rectiligne - HPP - Elasticité linéaire homogène

Equations scalaire d'équilibre

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}N(x) + f_x = 0 \\ \frac{d}{dx}T(x) + f_y = 0 \\ \frac{d}{dx}M(x) + T(x) = 0 \end{cases}$$

Déplacements

Navier-Bernoulli:

$$\underline{U}(x, y) = \begin{cases} U_1 = u(x) - (y - y_g)v'(x) \\ U_2 = v(x) \end{cases}$$

Efforts généralisés

$$N(s) = \int_{Sec} \sigma_{x_1} dS$$

$$\vec{T}(s) = \int_{Sec} \vec{\sigma} - \sigma_{x_1} \vec{x}_1 dS$$

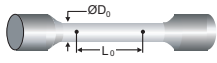
$$M(s) = - \int_{Sec} y \sigma_{x_1} ds$$

Déformations

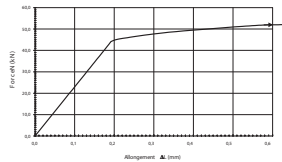
$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial}{\partial x} U_1(x, y) \\ &= u'(x) - (y - y_g)v''(x) \end{aligned}$$



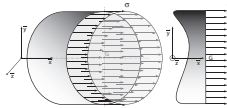
Traction uniaxial :



Eprouvette de traction



Courbe $N/\Delta L$ pour l'essai de traction

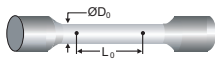


$$\sigma = \frac{F}{S} \quad \epsilon = \frac{\delta L}{L_0}$$

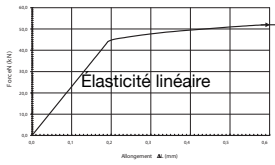
Figures : P.A Boucard



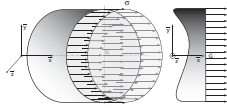
Traction uniaxial :



Eprouvette de traction



Courbe N/ΔL pour l'essai de traction



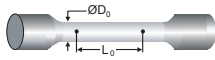
Figures : P.A Boucard

$$\sigma = \frac{F}{S} = E\epsilon$$

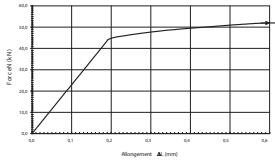
E = Module d' Young



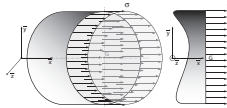
Traction uniaxial :



Eprouvette de traction



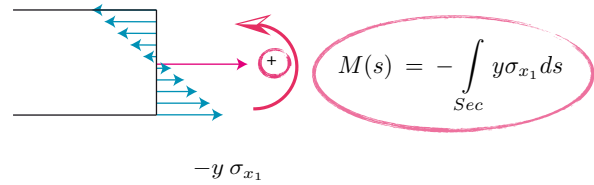
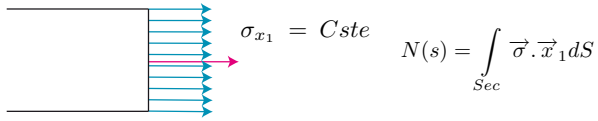
Courbe N/ΔL pour l'essai de traction



Figures : P.A Boucard

$$E = \frac{\sigma(x)}{\epsilon(x)}$$

E = Module d' Young



Navier-Bernouilli :

$$\underline{U}(x, y) = \begin{cases} U_1 = u(x) - (y - y_g)v'(x) \\ U_2 = v(x) \end{cases}$$

d'où la déformation longitudinale en HPP

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial}{\partial x} U_1(x, y) \\ &= u'(x) - (y - y_g)v''(x) \end{aligned}$$

$$M(s) = - \int_{Sec} y \sigma_{x_1} ds = EI v''(x) \quad \sigma_{x_1} = E \epsilon_{11}$$

$$M(s) = EI v''(x)$$



http://www.xr6805.fr/school/sti_web/rdm/quadra/quadrat.htm

IG_z (mm ⁴)	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi (D^4 - d^4)}{64}$
I_0 (mm ⁴)	$\frac{bh^3 + hb^3}{12}$	$\frac{a^4}{6}$	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi (D^4 - d^4)}{32}$

Moment polaire

$$I_{G_z} = \int_{Sec} y^2 ds$$

$$I_O = \int_{Sec} z^2 + y^2 ds$$



cas plan - Poutre rectiligne - HPP - Elasticité linéaire homogène

Equation d'équilibre

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} T(x) + f_y = 0 \\ \frac{d}{dx} M(x) + T(x) = 0 \end{cases}$$

Loi de comportement locale

$$\sigma = E \epsilon$$

Déplacement

$$\underline{U}(x, y) = \begin{cases} U_1 = -y v'(x) \\ U_2 = v(x) \end{cases}$$

$$M(x) = EI v''(x)$$

$$\sigma(x) = -\frac{M(x)}{I} = -y \frac{M(x)}{I}$$



cas plan - Poutre rectiligne - HPP -Elasticité linéaire homogène

Equations scalaire d'équilibre

Loi de comportement locale

Déplacements

Loi de comportement macro



cas plan - Poutre rectiligne - HPP -Elasticité linéaire homogène

Equation d'équilibre

Loi de comportement locale

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}T(x) + f_y = 0 \\ \frac{d}{dx}M(x) + T(x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= E\varepsilon(x) \\ \sigma(x) &= -\frac{M(x)}{y} = -y\frac{M(x)}{I} \end{aligned}$$

Déplacements

Loi de comportement macro

$$\underline{U}(x, y) = \begin{cases} U_1 = -y v'(x) \\ U_2 = v(x) \end{cases}$$

$$M(x) = EI v''(x)$$



cas plan - Poutre rectiligne - HPP -Elasticité linéaire homogène

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}N(x) + f_x = 0 \\ \frac{d}{dx}T(x) + f_y = 0 \\ \frac{d}{dx}M(x) + T(x) = 0 \end{cases}$$

Conditions aux limites :

Efforts ou déplacements

$$\underline{U}(x, y) = \begin{cases} u(x) - (y - y_g)v'(x) \\ v(x) \end{cases}$$

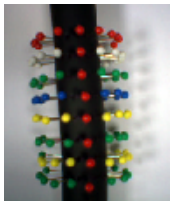
$$N(x) = ESu'(x) = ES\epsilon(x)$$

$$M(x) = -EIv''(x) = EI\kappa(x)$$

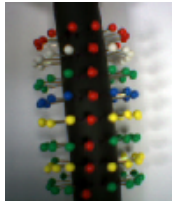


Cas de la Torsion

HLMES01



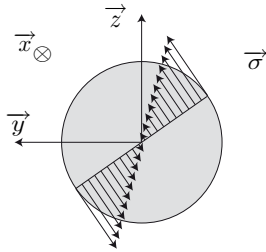
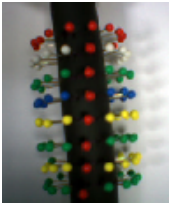
Avant



Après

<http://meca.iutcachan.free.fr>

http://meca.iutcachan.free.fr/dds_cours/dds_cours.html



Répartition des contraintes dans une section droite



Équation d'équilibre

$$\frac{d}{dx} M_t(x) = 0$$

Condition aux limites

$$M_t(L) = C_{imp} \quad M_t(0) = C'_{imp}$$

$$\phi(0) = \phi_{imp} \quad \phi(L) = \phi'_{imp}$$

Loi de comportement

$$\theta(x) = \frac{d\phi}{dx} = \frac{M_t(x)}{GI_{Gx}}$$

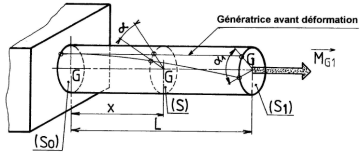
G : Module de cisaillement

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$M_t(x) = GI_{Gx}\theta(x)$$



L.P. AULNOYE

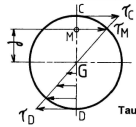
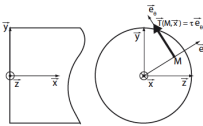


Angle de torsion des sections

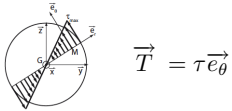
$$\alpha = \theta x$$

Angle de torsion unitaire $\theta = \frac{\alpha_1}{L} = \frac{\alpha}{x}$

$$\tau(r) = G \theta r$$


 Cours de Dimensionnement des Structures
 Résistance des Matériaux
 Pierre-Alain Boucard
<http://meca.iutcahan.free.fr>


Répartition de la contrainte dans la section



$$\vec{T} = \tau \vec{e}_\theta$$

Loi de comportement Locale

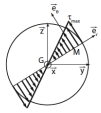
$$\tau = G\gamma$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Cisaillement = f(angle unitaire de rotation)

$$\gamma = r\theta$$

$$\tau(r) = G \theta r$$



$$\iint_S \vec{T} ds = \iint_S \tau \vec{e}_\theta ds = \vec{0}$$

Loi de comportement

$$\vec{M}_t = \iint_S \vec{GM} \wedge \vec{T} ds = \iint_S r \vec{e}_r \wedge G \theta r \vec{e}_\theta ds \quad \tau = G\gamma$$

$$\vec{M}_t = G \theta \iint_S r^2 ds \vec{x}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$I_0 = \iint_S r^2 ds$$

$$\vec{M}_t = G \theta I_0 \vec{x}$$

Moment de Torsion ou Moment Polaire



cas plan - Poutre rectiligne - HPP -Elasticité linéaire homogène

Equation d'équilibre

$$\frac{d}{dx} M_t(x) = 0$$

Loi de comportement locale

$$\tau = G\gamma$$

Contrainte

$$\tau(x) = \frac{M_t(x)}{I_0} = r \frac{M_t(x)}{I_0}$$

$$\vec{M}_t = G \theta I_0 \vec{x}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$



Selons VOus !!

La broche d'une fraiseuse transmet un couple maximal de 80 N.m.

On l'assimile à un tube en acier pour lequel $D = 2d$ et $G = 8.104 \text{ Mpa}$.

La déformation est limitée à 0,25 degré par mètre.

- Calculez le diamètre, extérieur D et intérieur d , de cette broche.
- Calculez la contrainte maximale dans le tube soumis à un moment de torsion de 80 N.m.

Récapitulatif - FLEXION et Torsion SIMPLE



cas plan - Poutre rectiligne - HPP -Elasticité linéaire homogène

Equation d'équilibre

Loi de comportement locale

Déplacements

Loi de comportement macro



cas plan - Poutre rectiligne - HPP -Elasticité linéaire homogène

Equation d'équilibre

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}T(x) + f_y = 0 \\ \frac{d}{dx}M(x) + T(x) = 0 \end{cases}$$

Déplacements

$$U(x, y) = \begin{cases} U_1 = -y v'(x) \\ U_2 = v(x) \end{cases}$$

Loi de comportement locale

$$\sigma(x) = E\varepsilon(x)$$

$$\sigma(x) = -\frac{M(x)}{I} = -y \frac{M(x)}{I}$$

Loi de comportement macro

$$M(x) = EIv''(x)$$



cas plan - Poutre rectiligne - HPP -Elasticité linéaire homogène

Equation d'équilibre

$$\frac{d}{dx}M_t(x) = 0$$

Loi de comportement locale

$$\tau = G\gamma$$

Contrainte

$$\tau(x) = \frac{M_t(x)}{I_O} = r \frac{M_t(x)}{I_O}$$

$$\vec{M}_t = G \theta I_O \vec{x}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$



Que faire dans ce cas là !!

Méthodes Énergétiques
Christian La Borderie
Institut Supérieur Aquitain du
Bâtiment et des Travaux Publics

MS1-POUTRES: Les méthodes
énergétiques: des méthodes «
éclair» pour les poutres à appuis
multiples

<http://web.univ-pau.fr/~clb/>



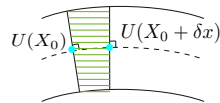
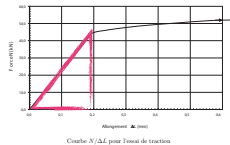
Cas d'un ressort 1-D

$$F = k\Delta x$$

$$W_{ressort} = \frac{1}{2}F\Delta x$$
$$= \frac{1}{2}\frac{F^2}{k} = \frac{1}{2}k(\Delta x)^2$$

Cas d'une poutre rectiligne (flexion-traction)

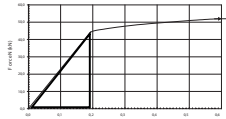
$$\sigma = E\epsilon$$



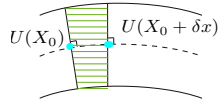


Cas d'une poutre rectiligne (flexion-traction)

$$\sigma = E\epsilon$$



Courbe $\sigma/\Delta L$ pour l'état de traction

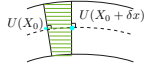
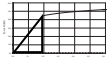


$$w_{Poutre}(s) = \frac{1}{2}\sigma\epsilon$$

$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(X)\epsilon(X) d\omega$$



Cas d'une poutre rectiligne (flexion-traction)

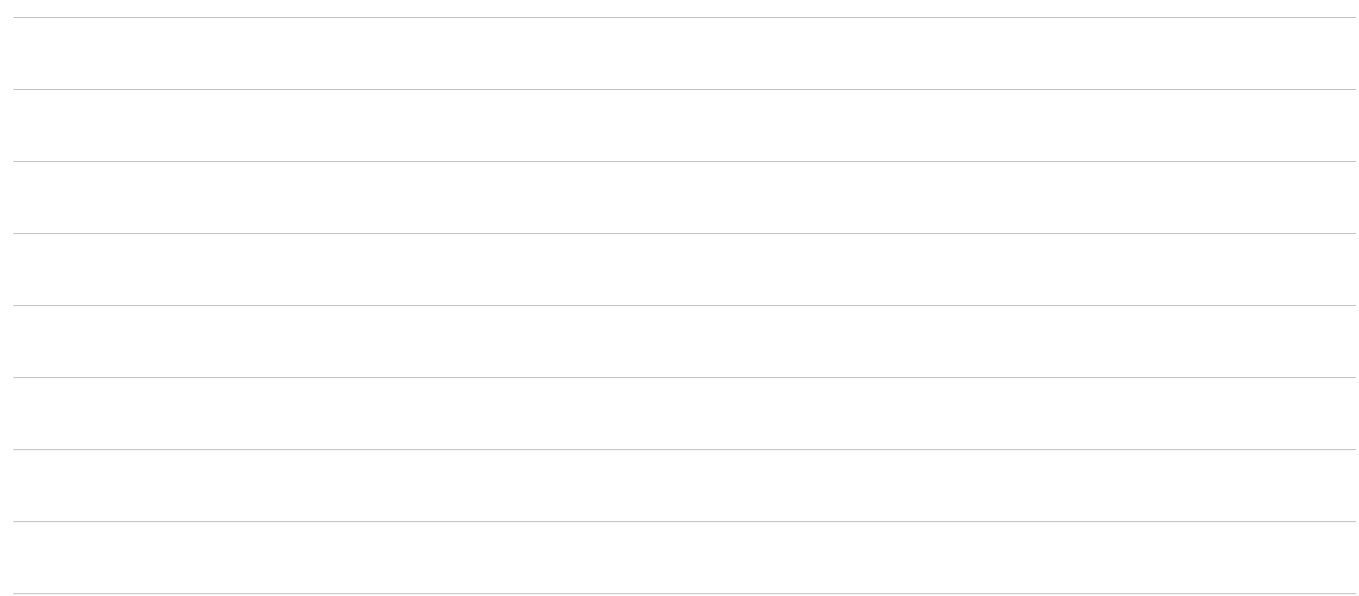


$$W = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(X)\epsilon(X) d\omega$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\int_{\text{sect}} \sigma(x)\epsilon(x) dy dz \right) dx$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial}{\partial x} U_1(x, y) \\ &= u'(x) - (y - y_G)v''(x) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\int_{\text{sect}} \sigma(x) (u'(x) - (y - y_G)v''(x)) dy dz \right) dx$$





Cas d'une poutre rectiligne (flexion-traction)

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(u'(x) \left(\int_{sect} \sigma(x) dydz \right) - v''(x) \left(\int_{sect} (y - y_G) \sigma(x) dydz \right) \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L \left(u'(x) \left(\int_{sect} \sigma(x) dydz \right) + v''(x) \left(- \int_{sect} (y - y_G) \sigma(x) dydz \right) \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^L (u'(x)N(x) + v''(x)M(x)) dx = \frac{1}{2} \int_0^L (N(x)e(x) + M(x)k(x)) dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} e(x) = u'(x) \\ k(x) = v''(x) \end{cases} \quad \begin{cases} N(x) = \int \sigma(x) dS \\ M(x) = - \int_{S_{ec}} y \sigma(x) dS \end{cases}$$



Loi de comportement

$$k(x) = -v''(x) \quad e(x) = u'(x) \quad \sigma = E\epsilon \quad \epsilon = u'(x) - (y - y_G)v''(x)$$

$$\begin{aligned}
 N(x) &= \int_{S_{ec}} \sigma(x) dS \\
 &= \int_{S_{ec}} E\epsilon(x) dS \\
 &= \int_{S_{ec}} E(u'(x) - (y - y_G)v''(x)) dS \\
 &= ES(x)u'(x) = ES(x)e(x)
 \end{aligned}$$

$$N(x) = ES(x)u'(x) = ES(x)e(x)$$



Loi de comportement

$$k(x) = v''(x) \quad e(x) = u'(x) \quad \sigma = E\epsilon \quad \epsilon = u'(x) - (y - y_g)v''(x)$$

$$M(x) = - \int_{Sec} y\sigma(x) dS$$

$$M(x) = EI(x)v''(x) = EI(x)k(x)$$

$$= - \int_{Sec} yE\epsilon(x) dS$$

$$= - \int_{Sec} Ey(u'(x) - (y - y_g)v''(x)) dS$$

$$= EI(x)v''(x) = EI(x)k(x)$$



Cas d'une poutre rectiligne (flexion-traction)

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L (N(x)e(x) + M(x)k(x)) dx$$

$$k(x) = -v''(x)$$

$$e(x) = u'(x)$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L (ESe(x)^2 + EIv''(x)^2) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{N(x)^2}{ES} + \frac{M(x)^2}{EI} \right) dx$$

$$N(x) = ESu'(x) = ES e(x)$$

$$M(x) = -EIv''(x) = EI k(x)$$



Cas du ressort 1-D

$$W_{\text{ressort}} = \frac{1}{2} F \Delta x$$

$$= \frac{1}{2} \frac{F^2}{k} = \frac{1}{2} k (\Delta x)^2$$

Cas de la poutre rectiligne

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L (N(x)e(x) + M(x)k(x) + M_t(x)\theta(x)) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L (ES(x)e(x)^2 + EIv''(x)^2 + GI_{Gx}\theta(x)^2) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{N(x)^2}{ES} + \frac{M(x)^2}{EI} + \frac{M_t(x)^2}{GI_{Gx}} \right) dx$$



Energie potentielle : on la définit pour n'importe quel champs de type Navier Bernoulli, respectant les conditions aux limites cinématiques (portant sur les déplacements et les rotations)

$$U \in CA \iff U(x, y) = u_d \quad \forall x \in D_u$$

$U \in CA \iff U$ vérifie les conditions aux limites imposées en déplacements

$$\Pi_d(u) = W(u) - W_d(u)$$

Énergie élastique

Travail des efforts données



$$W_d(u) = \int_0^L \vec{f}(x) \cdot \vec{U}(x) dx + \vec{F}(x_0) \cdot \vec{U}(x_0)$$

Force linéique

Force ponctuelle



Énergie Complémentaire : on la définit pour n'importe quel champs de contrainte, respectant les équations d'équilibre et les conditions aux limites sténiques

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} N(x) + f_x & = 0 \\ \frac{d}{dx} T(x) + f_y & = 0 \\ \frac{d}{dx} M(x) + T(x) & = 0 \end{cases} \quad \text{Travail des déplacements donnés}$$

$$\Pi_c(N, T, M) = W(N, T, M) - W_{dd}(N, T, M)$$

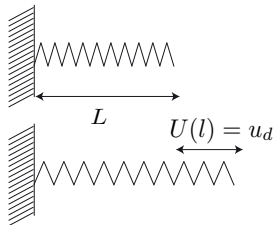
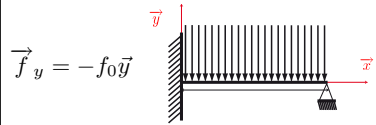
Énergie élastique



Si le système est hyperstatique de degré p , on peut exprimer les efforts intérieurs en fonction de p inconnues. Ces inconnues hyperstatiques prennent alors la valeur qui minimise l'énergie complémentaire (= énergie élastique car les liaisons sont parfaites).



Luigi Federico Menabrea



$$\Pi_c(F) = \frac{1}{2} \frac{F^2}{K} - F \cdot u_d$$

Minimise F
l'énergie complémentaire

$$\underline{F = K \cdot u_d}$$

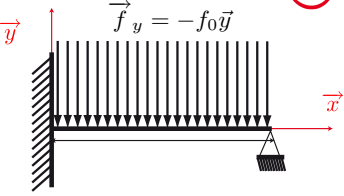
$$\frac{\partial \Pi_c}{\partial F} = 0$$



$$M_z(x) = \frac{f_y}{2}(x-L)^2 - R_L(x-L)$$

$$T_y(x) = -f_y(x-L) + R_L$$

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{M(x)^2}{EI} \right) dx$$



Théorème de Menabrea

R_L Minimise l'énergie complémentaire

$$\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial R_L} = 0$$



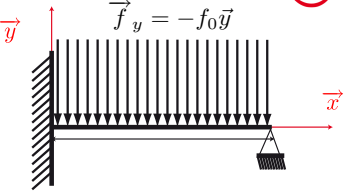
R_L Minimise l'énergie de déformation

$$\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial R_L} = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial R_y} = \frac{1}{2EI} \left(\frac{-f_y}{8} L^4 + \frac{R_y}{3} L^3 \right) = 0$$

$$R_y = \frac{3f_y L}{8}$$

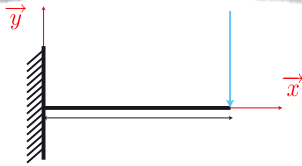
changer le y en L





Théorème de Castigliano

Si une structure est soumise à une force (respectivement un couple) concentré alors la dérivée de l'énergie de déformation par rapport à cette force (resp. ce couple) donne le déplacement (resp. la rotation) de son point d'application dans sa direction



$$v(L) = \frac{\partial W}{\partial F}$$



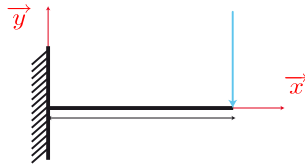
$$\frac{d^2}{dx^2} M(x) = 0 \quad \text{Eq. d Eq.}$$

$$M(L) = 0$$

$$M'(L) = F \quad \text{Cdt o Lim}$$

Eq. d Eq.

Cdt o Lim



$$M(x) = F(x - L)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{M(x)^2}{EI} \right) dx$$

$$W = \frac{F^2 L^3}{6EI}$$

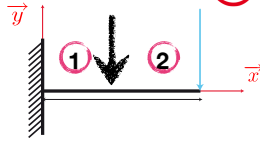
$$v(L) = \frac{\partial W}{\partial F}$$

$$v(L) = -\frac{FL^3}{3EI}$$



$$W = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{M(x)^2}{EI} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{L}{2}} \left(\frac{M_1(x)^2}{EI} \right) + \frac{1}{2} \int_{\frac{L}{2}}^L \left(\frac{M_2(x)^2}{EI} \right)$$



$$M_2(x) = F(x - L)$$

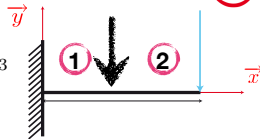
$$M_1(x) = F(x - L) + F_{fic}(x - \frac{L}{2})$$

$$U(A) = \frac{\partial W}{\partial F_{fic}} \Big|_{F_{fic}=0}$$

$$W = \frac{1}{48 EI} (7 F^2 + 5 F F_{fic} + F_{fic}^2) L^3$$



$$W = \frac{1}{48 EI} (7 F^2 + 5 F F_{fic} + F_{fic}^2) L^3$$



$$\frac{\partial W}{\partial F_{fic}} = -\frac{1}{48 EI} (5 F + 2 F_{fic}) L^3$$

$$U(A) = \frac{\partial W}{\partial F_{fic}} \Big|_{F_{fic}=0}$$

$$V(L/2) = -\frac{5FL^3}{48 EI}$$

$$v(x) = 1/6 F (x - L)^3 - 1/2 FL^2 x + 1/6 FL^3$$

