ANNEXE D

Rappels des formules de Bresse

Les équations rappelées ici sont utilisées dans la section 1.7 du chapitre 1.

Ces formules proviennent de l'intégration le long d'une partie d'une poutre des relations qui lient contraintes et déformations (loi de Hooke). Seuls les résultats sont rappelés ici.

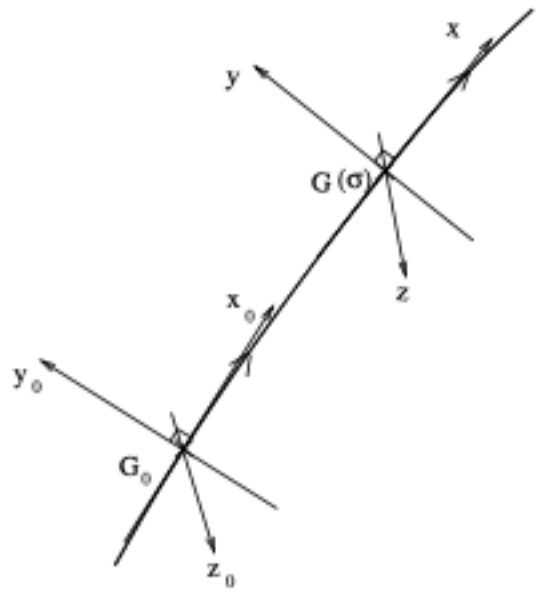

FIG. D.1. Déplacement des fibres pour une poutre tridimensionnelle.

On considère une poutre tridimensionnelle (cf. figure D.1). La section droite de centre $G(s)$ (s est l'abscisse curviligne du point G le long de la fibre moyenne) a subi une translation relative (par rapport à son état au repos) définie par le vecteur $\overrightarrow{\lambda}(s)$ et une rotation relative définie par le vecteur $\overrightarrow{\omega}(s)$; on montre que sous une sollicitation quelconque, on a

$$\boxed{\overrightarrow{\lambda}(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{N}{ES} \\ \\ \dfrac{T_y}{GS_{1,y}} \\ \\ \dfrac{T_z}{GS_{1,z}} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{\omega}(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{M_t}{GJ_\rho} \\ \\ \dfrac{M_y}{EI_y} \\ \\ \dfrac{M_z}{EI_z} \end{pmatrix},} \tag{D.1}$$

où les grandeurs E, S, ... ont été définies dans les sections précédentes (sauf $S_{1,y}$ et $S_{1,z}$, pour lesquelles on renvoie à (3.21) et (3.22) page 54).

Par intégration, on obtient les équations générales de Bresse, qui permettent de déterminer la translation $\overrightarrow{\Lambda}(G)$ et la rotation $\overrightarrow{\Omega}(G)$ de la section de centre de gravité G, par rapport à un point G_0

de référence (supposé à translation et rotation relatives connues et notée $\overrightarrow{\Lambda}(G_0)$ et $\overrightarrow{\Omega}(G_0)$) :

$$\boxed{\overrightarrow{\Lambda}(G) = \overrightarrow{\Lambda}(G_0) + \overrightarrow{\Omega}(G_0) \wedge \overrightarrow{G_0 G} + \int_{S_0}^{S} \overrightarrow{\lambda}(s) ds + \int_{S_0}^{S} \overrightarrow{\omega}(s) ds \wedge \overrightarrow{\Gamma(s) G},} \tag{D.2}$$

et

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega}(G) = \overrightarrow{\Omega}(G_0) + \int_{S_0}^{S} \overrightarrow{\omega}(s) ds,} \tag{D.3}$$

où S, S_0 et s sont les abscisses curvilignes des points G_0, G et Γ de la fibre moyenne (dans cette formule d'intégrale, G_0 et G sont fixes et Γ varie).

Dans le cas particulier des poutres droites à plan moyen (c'est-à-dire quand la fibre moyenne est rectiligne, parallèle à l'axe x, on note $(U(G), V(G))$ le déplacement (plan) du point G et $\omega(G)$ la rotation (selon l'axe orthogonal au plan de la poutre) du point G. En considérant les efforts plans de la RDM, notés N, T et M, il vient

$$\boxed{\omega(G) = \omega(G_0) + \int_{X_0}^{X} \frac{M(\xi)}{EI} d\xi,} \tag{D.4a}$$

$$\boxed{U(G) = U(G_0) + \int_{X_0}^{X} \frac{N(\xi)}{ES} d\xi,} \tag{D.4b}$$

et

$$\boxed{V(G) = V(G_0) + \omega(G_0)(X - X_0) + \int_{X_0}^{X} \frac{M(X-\xi)}{EI} d\xi + \int_{X_0}^{X} \frac{T(\xi)}{GS_1} d\xi} \tag{D.4c}$$

où X, X_0 et ξ sont les abscisses des point G_0, G et du point où l'on calcule la valeur de l'intégrante.