

# Chapitre 4: La poutre de la RdM

## Modélisation des barres et poutres

Pierre Alart

Laboratoire de Mécanique et Génie Civil  
Université Montpellier 2

Cours FLSI 151 2009-2010

# Plan du cours

- 1 Efforts, résultante et moment
- 2 Principe Fondamental de la Statique
- 3 Modélisation géométrique et sthénique des liaisons simples
- 4 La poutre de la RdM  
Hypothèses

① Efforts, résultante et moment

② Principe Fondamental de la Statique

③ Modélisation géométrique et sthénique des liaisons simples

④ La poutre de la RdM

Hypothèses

Efforts normal et tranchant, moment fléchissant

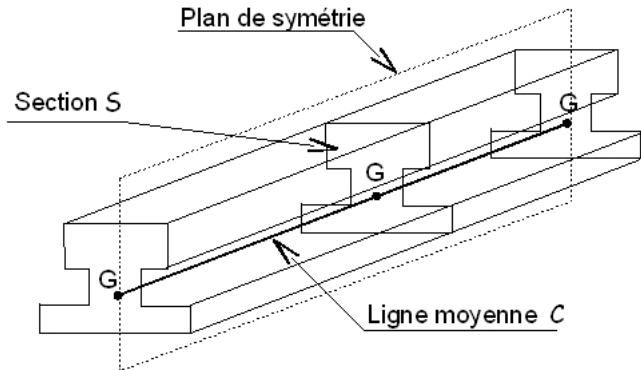
# Plan du cours

- 1 Efforts, résultante et moment
- 2 Principe Fondamental de la Statique
- 3 Modélisation géométrique et sthénique des liaisons simples
- 4 La poutre de la RdM
  - Hypothèses
  - Efforts normal et tranchant, moment fléchissant
  - Exercice d'application

- 1 Efforts, résultante et moment
- 2 Principe Fondamental de la Statique
- 3 Modélisation géométrique et sthénique des liaisons simples
- 4 La poutre de la RdM
  - Hypothèses
  - Efforts normal et tranchant, moment fléchissant
  - Exercice d'application
  - Equations d'équilibre d'un petit élément de poutre
- 5 Etude de 2 sollicitations simples

## Hypothèses

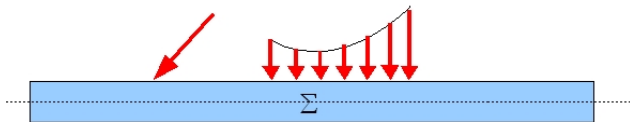
Une poutre est un solide engendré par une surface ( $S$ ) dont le centre de masse  $G$  décrit une courbe plane ( $C$ ) appelée **ligne moyenne**. La **longueur de** ( $C$ ) est **grande** par rapport aux dimensions transversales.



# Hypothèses sthéniques

Des hypothèses doivent aussi porter sur les forces extérieures.

- **Forces extérieures situées dans le plan de symétrie.**
- **Forces concentrées** (en Newtons) en des points de la ligne moyenne ou **réparties** (en Newtons/mètre)



## Hypothèses sur les déformations

Efforts

PFS

Liaisons

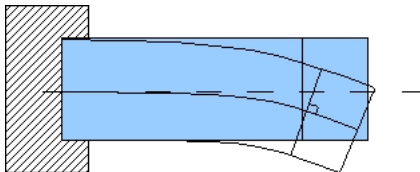
La poutre

Hypothèses

Efforts normal et  
tranchant,  
moment  
fléchissant  
Exercice  
d'application  
Equations  
d'équilibre d'un  
petit élément de  
poutre

Sollicitations  
simples

- **Sections planes restent normales à la ligne moyenne** après déformation (hypothèse de Bernoulli - figure).
- Résultats obtenus valables loin des efforts concentrés (extérieurs ou de liaison) (hypothèse de Saint Venant).





# Hypothèse de Saint Venant - Illustration

Efforts

PFS

Liaisons

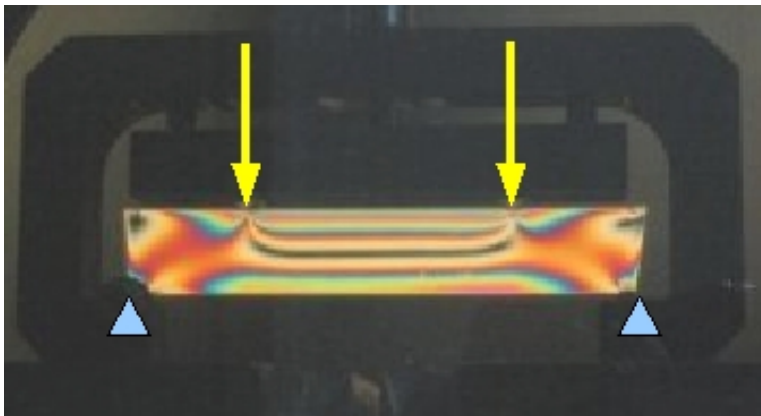
La poutre

**Hypothèses**

Efforts normal et tranchant, moment fléchissant  
Exercice d'application  
Equations d'équilibre d'un petit élément de poutre

Sollicitations simples

## Photoélasticité sur flexion 4 points



## Système isostatique

Efforts

PFS

Liaisons

La poutre

Hypothèses

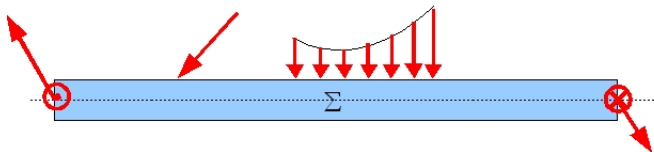
Efforts normal et tranchant, moment fléchissant

Exercice d'application

Equations d'équilibre d'un petit élément de poutre

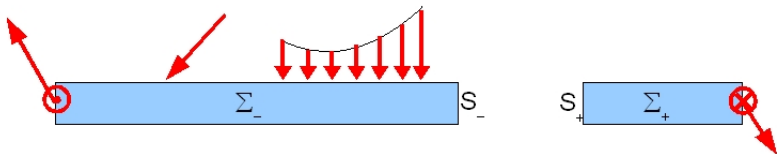
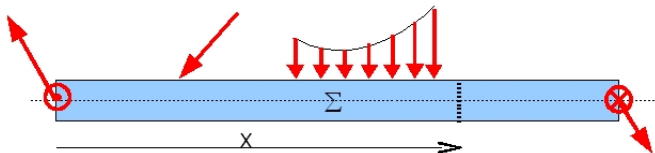
Sollicitations simples

Poutre de longueur  $L$  soumise à des efforts extérieurs et de liaison avec son environnement. On suppose que ces **efforts de liaison** ont pu être **déterminés en appliquant le PFS** au système poutre, noté  $\Sigma$ . Le **système** est dit **isostatique** ;



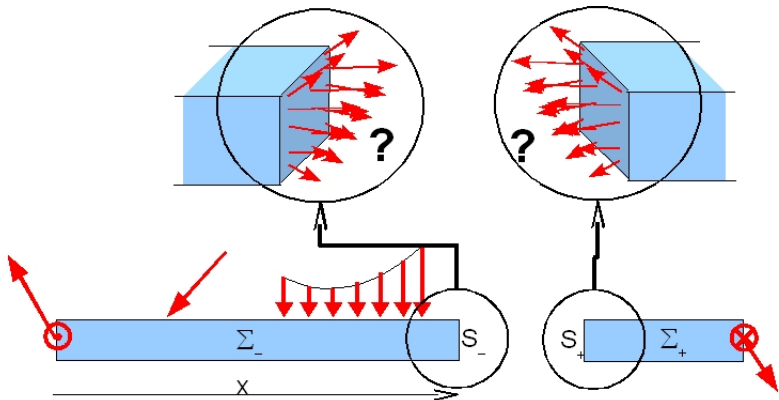
## Coupure fictive

Pour déterminer les **efforts intérieurs de liaison** ou **cohésion**, on applique le PFS à un sous système en effectuant une **coupure fictive** de la poutre en deux parties  $\Sigma_-$  et  $\Sigma_+$  situées de part et d'autre de l'abscisse  $x$ .



## Efforts de cohésion

Hypothèse de Cauchy : **efforts** (intérieurs à la poutre) de  $\Sigma_+$  sur  $\Sigma_-$  (et réciproquement) **localisés** sur la section  $S(x)$



## Efforts généralisés de cohésion

Efforts

PFS

Liaisons

La poutre

Hypothèses  
Efforts normal et tranchant, moment fléchissant  
Exercice d'application  
Equations d'équilibre d'un petit élément de poutre

Sollicitations simples

Sur  $S_-$ , en  $G_x$  centre de masse de la section on définit les **efforts généralisés de cohésion** :

- Résultante en  $\vec{x}$  :  $N(x)$  **effort normal**,
- Résultante en  $\vec{y}$  :  $T(x)$  **effort tranchant**,
- Moment en  $\vec{z}$  :  $\mathcal{M}_f(x)$  **moment fléchissant**.

$$\begin{cases} \vec{R}(\Sigma_+ \rightarrow \Sigma_-) = N(x) \vec{x} + T(x) \vec{y} \\ \vec{\mathcal{M}}_{G_x}(\Sigma_+ \rightarrow \Sigma_-) = \mathcal{M}_f(x) \vec{z} \end{cases}$$

# Représentation des efforts généralisés de cohésion

Efforts

PFS

Liaisons

La poutre

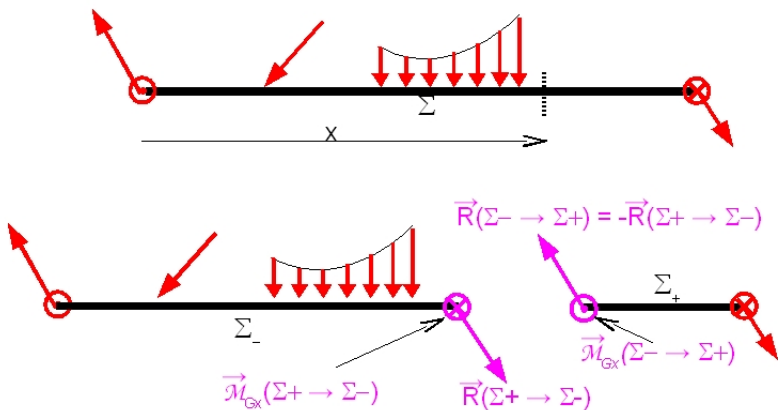
Hypothèses

Efforts normal et tranchant, moment fléchissant

Exercice d'application

Equations d'équilibre d'un petit élément de poutre

Sollicitations simples



# Efforts généralisés de cohésion

par convention sur la partie gauche

Efforts

PFS

Liaisons

La poutre

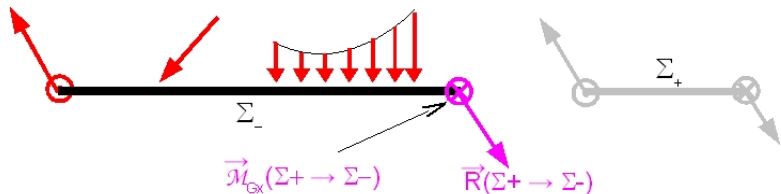
Hypothèses

Efforts normal et tranchant, moment fléchissant

Exercice d'application

Equations d'équilibre d'un petit élément de poutre

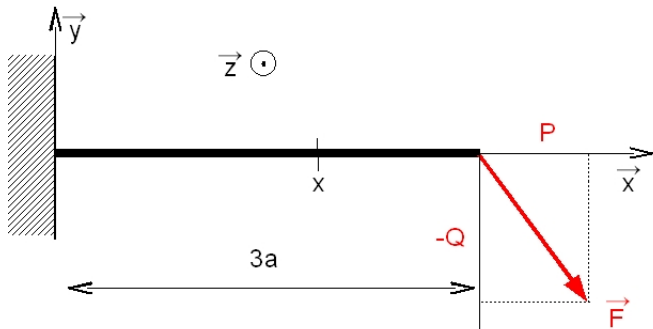
Sollicitations simples



$$\begin{cases} \vec{R}(\Sigma_+ \rightarrow \Sigma_-) = N(x) \vec{x} + T(x) \vec{y} \\ \vec{M}_{G_x}(\Sigma_+ \rightarrow \Sigma_-) = \mathcal{M}_f(x) \vec{z} \end{cases}$$

## Exercice d'application

On considère une poutre ( $OA$ ), homogène, horizontale (direction  $\vec{x}$ ), de section constante, de longueur  $3a$ , encastée à l'origine  $O$ , soumise à une force terminale  $\vec{F} = P\vec{x} - Q\vec{y}$ .



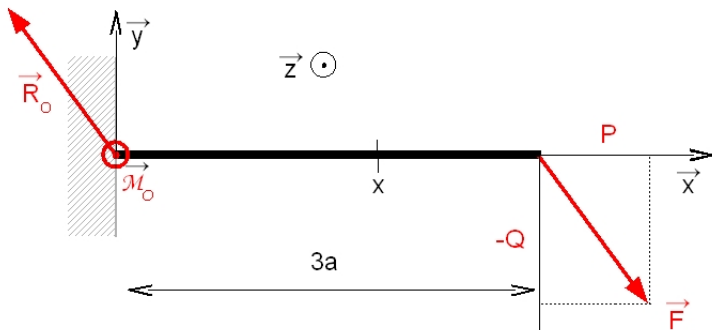


# Détermination des efforts de liaison

Application du PFS à la poutre entière,

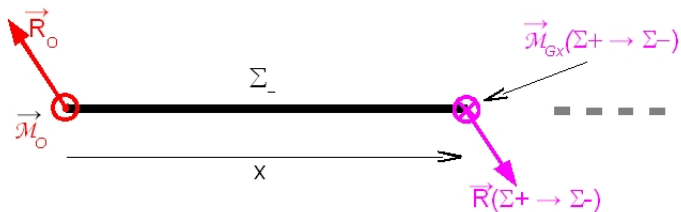
$$\begin{cases} \vec{R}^{ext} = \vec{R}_O + P\vec{x} - Q\vec{y} = \vec{0} \\ \vec{M}(O, ext) = \vec{M}_O + \vec{OA} \wedge \vec{F} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_O = -P\vec{x} + Q\vec{y} \\ \vec{M}_O = \vec{OA} \wedge (-\vec{F}) = 3a\vec{x} \wedge (-P\vec{x} + Q\vec{y}) = 3aQ\vec{z} \end{cases}$$



## Coupure fictive

Coupure fictive à la section d'abscisse  $x$ .  
PFS appliqué à la partie gauche notée  $\Sigma_-$ .



$$\begin{cases} \vec{R}(ext \rightarrow \Sigma_-) = \vec{R}_o + \vec{R}(\Sigma_+ \rightarrow \Sigma_-) = \vec{0} \\ \vec{M}(G_x, ext \rightarrow \Sigma_-) = \vec{M}_o + \vec{GO} \wedge \vec{R}_o + \vec{M}_{G_x}(\Sigma_+ \rightarrow \Sigma_-) = \vec{0} \end{cases}$$

## Efforts de cohésion

Efforts

PFS

Liaisons

La poutre

Hypothèses

Efforts normal et tranchant, moment fléchissant

Exercice d'application

Equations d'équilibre d'un petit élément de poutre

Sollicitations simples

On en tire les efforts de cohésion sur  $\Sigma_-$  décomposés en efforts normal, tranchant et moment fléchissant,

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(\Sigma_+ \rightarrow \Sigma_-) = -\vec{R}_O = P\vec{x} - Q\vec{y} \\ \vec{M}_{G_x}(\Sigma_+ \rightarrow \Sigma_-) = -\vec{M}_O + \vec{OG} \wedge \vec{R}_O = -3aQ\vec{z} + x\vec{x} \wedge Q\vec{y} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} N(x) = P \\ T(x) = -Q \\ \mathcal{M}_f(x) = -(3a - x)Q = (x - 3a)Q \end{array} \right.$$

L'effort tranchant est l'opposé de la dérivée du moment fléchissant,  $\mathcal{M}'_f(x) = Q = -T(x)$ .

# Diagramme effort tranchant et moment fléchissant

Efforts

PFS

Liaisons

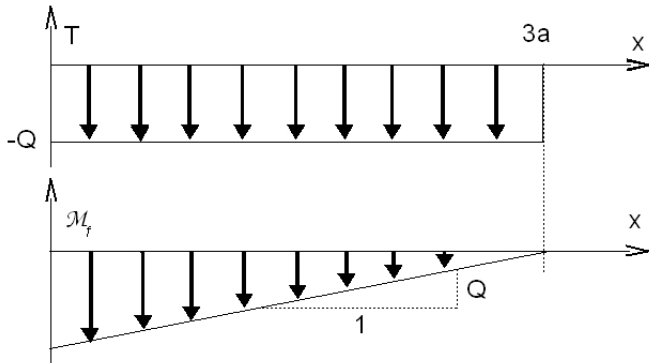
La poutre

Hypothèses  
Efforts normal et tranchant, moment fléchissant

Exercice d'application

Equations d'équilibre d'un petit élément de poutre

Sollicitations simples

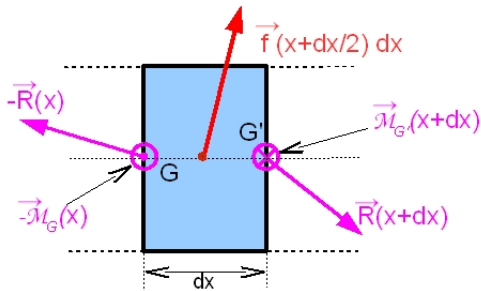


$$M'_f(x) = Q = -T(x)$$

# Equilibre d'un petit élément de poutre

Efforts extérieurs sur petit élément de poutre de longueur  $dx$

- Densité volumique de forces représentée par une force concentrée au milieu du segment  $[x, x + dx]$  :  $\vec{f}(x + dx/2)dx$ ,
- Résultantes,  $\vec{R}(x + dx)$  et  $-\vec{R}(x)$  et moments en  $G'$ ,  $\vec{M}_{G'}(x + dx)$  et  $G$ ,  $-\vec{M}_G(x)$  des efforts de cohésion sur les sections  $S(x + dx)$  et  $S(x)$ .



# PFS appliqué au petit élément de poutre

Efforts

PFS

Liaisons

La poutre

Hypothèses  
Efforts normal et tranchant, moment fléchissant  
Exercice d'application  
Equations d'équilibre d'un petit élément de poutre

Sollicitations simples

(moments calculés en  $G$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} -\vec{R}(x) + \vec{R}(x + dx) + \vec{f}(x + dx/2)dx = \vec{0} \\ -\vec{M}_G(x) + \vec{M}_{G'}(x + dx) + \overrightarrow{GG'} \wedge \vec{R}(x + dx) + \frac{1}{2} \overrightarrow{GG'} \wedge \vec{f}(x + dx/2)dx = \vec{0} \end{array} \right.$$

en réarrangeant les termes,

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(x + dx) - \vec{R}(x) + \vec{f}(x + dx/2)dx = \vec{0} \\ \mathcal{M}_f(x + dx)\vec{z} - \mathcal{M}_f(x)\vec{z} + \overrightarrow{GG'} \wedge \vec{R}(x + dx) + \frac{1}{2} \overrightarrow{GG'} \wedge \vec{f}(x + dx/2)dx = \vec{0} \end{array} \right.$$

## Equations locales d'équilibre

En remarquant que  $\overrightarrow{GG'} = dx \vec{x}$ , en divisant les deux équations par  $dx$  et en "passant à la limite", on obtient le système d'équations différentielles, ou équations locales d'équilibre,

$$\begin{cases} \frac{d\vec{R}}{dx}(x) + \vec{f}(x) = \vec{0} \\ \frac{d\vec{M}}{dx}(x) + \vec{x} \wedge \vec{R}(x) = \vec{0} \end{cases}$$

Ces équations relient la variation (dérivée) des efforts généralisés (normal, tranchant et fléchissant) aux efforts extérieurs répartis.

## Projections des équations d'équilibre locales

En projetant ces équations sur les axes on obtient 3 équations différentielles scalaires portant sur les efforts normal et tranchant et sur le moment fléchissant,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN}{dx} + f_x = 0 \\ \frac{dT}{dx} + f_y = 0 \\ \frac{dM_f}{dx} + T = 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \begin{array}{l} N'(x) + f_x(x) = 0 \\ T'(x) + f_y(x) = 0 \\ M'_f(x) + T(x) = 0 \end{array}$$

La dernière équation fournit une relation entre l'effort tranchant et le moment fléchissant : l'effort tranchant est l'opposé de la dérivée du moment fléchissant. En associant deuxième et troisième équations on obtient une unique équation liant directement la variation au second ordre du moment fléchissant à la densité d'effort extérieur réparti,

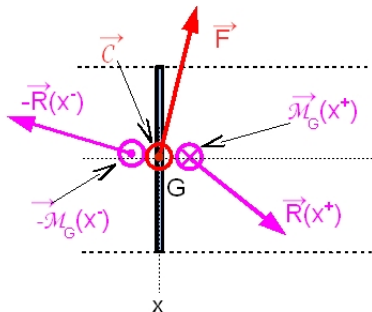
$$\frac{d^2 M_f}{dx^2} - f_y = 0 \quad \text{ou} \quad M''_f(x) - f_y(x) = 0$$



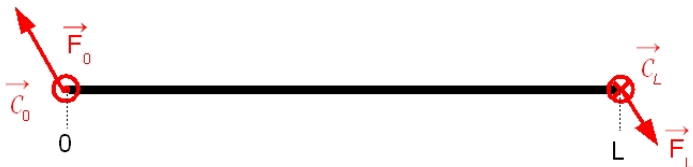
## Efforts extérieurs concentrés

- Traitement spécifique en considérant le **PFS sur une section**  $S(x)$  avec ses deux faces  $S^- = S(x^-)$  et  $S^+ = S(x^+)$
- $\vec{F}$  force concentrée et  $\vec{C}$  couple, appliqués à  $S(x)$
- $[A]_x$  **saut** en  $x$  de la quantité  $A$

$$\begin{cases} \vec{R}(x^+) - \vec{R}(x^-) = [\vec{R}]_x = -\vec{F} \\ \vec{M}(x^+) - \vec{M}(x^-) = [\vec{M}]_x = -\vec{C} \end{cases}$$



# Application à une poutre avec efforts concentrés aux extrémités



Conditions aux limites du domaine  $[0, L]$

$$\begin{aligned}\vec{R}(0^+) - \vec{R}(0^-) &= -\vec{F}_0 &\Rightarrow \vec{R}(0^+) &= \vec{R}(0) = -\vec{F}_0 \\ \vec{M}(0^+) - \vec{M}(0^-) &= -\vec{C}_0 &\Rightarrow \vec{M}(0^+) &= \vec{M}(0) = -\vec{C}_0 \\ \vec{R}(L^+) - \vec{R}(L^-) &= -\vec{F}_L &\Rightarrow \vec{R}(L^-) &= \vec{R}(L) = \vec{F}_L \\ \vec{M}(L^+) - \vec{M}(L^-) &= -\vec{C}_L &\Rightarrow \vec{M}(L^-) &= \vec{M}(L) = \vec{C}_L\end{aligned}$$

# A SUIVRE ...

## ① Efforts, résultante et moment

# A SUIVRE ...

① Efforts, résultante et moment

② Principe Fondamental de la Statique

## A SUIVRE ...

- ① Efforts, résultante et moment
- ② Principe Fondamental de la Statique
- ③ Modélisation géométrique et sthénique des liaisons simples

① Efforts, résultante et moment

② Principe Fondamental de la Statique

③ Modélisation géométrique et sthénique des liaisons simples

④ La poutre de la RdM

Hypothèses

Efforts normal et tranchant, moment fléchissant

Exercice d'application

Equations d'équilibre d'un petit élément de poutre

- 1 Efforts, résultante et moment
- 2 Principe Fondamental de la Statique
- 3 Modélisation géométrique et sthénique des liaisons simples
- 4 La poutre de la RdM
  - Hypothèses
  - Efforts normal et tranchant, moment fléchissant
  - Exercice d'application
  - Equations d'équilibre d'un petit élément de poutre
- 5 Etude de 2 sollicitations simples